

עירבול אולוגי של אותות דיבור באמצעות  
התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר

---

חיבור על מחקר

לשם מילוי חלקי של הדרישות לקבלת תואר  
מגיסטר למדעים  
בהנדסת חשמל

מ א ת

זאב שפירא

142



000001027921

הטכניון-מכון טכנולוגי לישראל  
הפקולטה להנדסת חשמל  
הפקולטה למדעי המחשב  
ס פ ר י ה

755

80.3.85

הוגש לסנט הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

כסלו תשמ"ד ח י פ ה 11 נובמבר 1983

המחקר נעשה בהנחית פרופי דוד מלאך  
בפקולטה להנדסת חשמל, מעבדה לעבוד אוטומת,  
הטכניון-מכון טכנולוגי לישראל.

ברצוני להודות לפרופי מלאך על הנחיתו  
ועזרתו הרבה, למר יריב אפרים על סיועו  
ועידודו לאורך כל שלבי המחקר, לפרופ  
אבי ברמן מהפקולטה למתמטיקה בטכניון על  
תרומתו, ולכל אלו שנתנו ידם כדי להביא  
עבודה זו לסיומה.

## תוכן העניינים

1	. . . . . תקציר		
2	. . . . . רשימת קיצורים		
3	. . . . . מבוא		.1
6	. . . . . ערבול אנלוגי		.2
6	. . . . . מערבלים אנלוגיים	2.1	
7	. . . . . ערבול במישור הזמן	2.2	
10	. . . . . ערבול במישור התדר	2.3	
12	. . . . . ערבול ע"י טרנספורמציות שונות	2.4	
13	. . . . . ערוצי טלפון	2.5	
18	. . . . . קריטריונים להערכת איכות הדבור	2.6	
18	. . . . . חסינות שיטות ערבול לפרמטרי ערוצי תקשורת	2.7	
21	. . . . . התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר - DSTFT		.3
21	. . . . . התמרת פוריה	3.1	
21	. . . . . התמרת פוריה לזמן קצר	3.2	
26	. . . . . התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר	3.3	
28	. . . . . אנליזת התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר	3.4	
30	. . . . . סינטיזת התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר	3.5	
	שיטת WEIGHTED OVERLAP ADD לאנליזה וסינטיזה של	3.6	
30	. . . . . התמרת פוריה לזמן קצר		
36	. . . . . דרגות החופש בתכנון מערכת DSTFT	3.7	
38	. . . . . בעיות פתוחות בתחום	3.8	
40	. . . . . ערבול אנלוגי באמצעות התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר		.4
40	. . . . . מערבלים אנלוגיים	4.1	
41	. . . . . חשיבות גורט הפאזה בערבול	4.2	
45	. . . . . רוחב הסרט של מסנון האנליזה	4.3	
51	. . . . . סינטיזה ואנליזה של DSTFT כמערכת יחידה	4.4	
53	. . . . . השפעת פרמטרי ערוץ תקשורת	4.5	
	הגישה האלגברית לתאור שיטות מקובלות לאנליזה וסינטיזה		.5
56	. . . . . של DSTFT		

תוכן העניינים (המשך)

56	הקדמה	5.1
56	אנליזת התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר - DSTFTA	5.2
68	סינטיזת התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר - DSTFTS	5.3
78	אנליזה של אות עם קיפולים בזמן	5.4
	סינטיזה של אות מ-DSTFT לאחר אנליזה עם "קיפולים	5.5
81	בזמן"	
	גודל מטריצת האנליזה, הקשר בין $M, N, R-1$ , וקיום	5.6
83	הפתרון	
	סינטיזה של DSTFT לאחר מודיפיקציה - MDSTFT הנובעת מהגישה	.6
89	האלגברית	
89	סינטיזה של MDSTFT עפ"י הגישה האלגברית	6.1
90	חישוב GENERALIZED INVERSE OF C - $C^\dagger$	6.2
100	סינטיזה של MDSTFT עבור אנליזה ללא קיפולים בזמן	.7
100	סינטיזה על פי הגישה המקובלת	7.1
101	סינטיזה על פי הגישה האלגברית	7.2
109	סינטיזה של MDSTFT עבור אנליזה עם קיפולים בזמן	.8
	סינטיזה על פי הגישה שפותחה עבור אנליזה ללא	8.1
109	קיפולים בזמן	
115	סינטיזה אופטימלית עבור צעד של דגימה אחת	8.2
123	סינטיזה תת אופטימלית המבטיחה מערכת יחידה	8.3
123	8.3.1 כללי	
126	8.3.2 שיטה א	
127	8.3.3 שיטה ב	
133	8.3.4 שיטה ג	
143	8.3.5 הרחבת השיטות עבור צעד הגדול מדגימה אחת	
148	8.3.6 סכום ודוגמאות	
151	ערבול אנלוגי באמצעות DSTFT על פי הגישה האלגברית	.9
151	נטויים עם סינטיזה אופטימלית	9.1
	יחידות של מערכת סינטיזה אנליזה להתמרת פוריה	9.2
152	לזמן קצר	

תוכן הענינים (המשך)

154	.....	סיכום ומסקנות	10
154	.....	ערבול אנלוגי באמצעות DSTFT	10.1
155	.....	הגישה האלגברית לתאור אנליזה וסינטיזה של DSTFT	10.2
158	.....	נספח א - תכונות ה-GENERALIZED INVERSE	
159	.....	רשימת מקורות	

תקציר באנגלית

ת ק צ י ר

עבודה זו דנה בבעיית הסתרת אותות דבור המועברים ברשת הטלפונים הקימת באמצעות מערבליים אנלוגיים הממומשים באמצעים ספרתיים. בבעיה זו המטרה הינה הגנה על פרטיות המידע המועבר עם פגיעה מינימלית באיכות ובמובנות הדבור המשוחזר תחת האילוך של העברת המידע בקו טלפון רגיל על מגבלותיו כגון רוחב סרט מוגבל והסחת פאזה לא לינארית. בשל מגבלת רוחב הסרט הוצע לבצע את ההסתרה ע"י ערבול בתחום התדר, ערבול דגמי התמרת פוריה (DFT) של אות הדבור בלוק אחרי בלוק, ושחזור האות המתאים בזמן. חטרונה העיקרי של שיטה זו הינה רגישותה הרבה להסחת פאזה של הערוץ. בעבודה זו, נשתמש בעקרון זה אולם ננצל את התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר (DSTFT) ככלי לשם בצוע המעבר לתחום התדר ולממוש מערך של מסננים צרי סרט שעברו דה-מודולציה, הערבול יבוצע על תפוקת המסננים ובדרך זו נמנע מהצורך בסנכרון בין המשדר למקלט.

בעבודה זו נבחנה בעיית הערבול כבעיית התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר עם מודיפיקציה שהיא פרמוטציה אקראית, והטפול בה מוצג במסגרת זו. אחת הבעיות העקרוניות בתחום זה הינה בעיית הסינטיזה של אות מהתמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר שעברה מודיפיקציה (MDSTFT), בעיה שעדיין לא נמצא לה פתרון. נסיון לפתור את הבעיה בשיטות מקובלות לא עלה יפה ולכן פותחה גישה חדשה - גישה אלגברית לתאור אנליזה וסינטיזה של DSTFT. גישה זו מתארת את האנליזה כמכפלת מטריצת אנליזה [A] בוקטור דגימות האות  $\underline{x}$  לקבלת וקטור התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר :  $[A]\underline{x} = \underline{b}$  (יש לציין שהמטריצות והוקטורים הם מסדר שואף לאינסופי). הסינטיזה מתוארת באופן דומה כמכפלת מטריצת סינטיזה [s] בוקטור התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר לקבלת וקטור האות המשוחזר  $\hat{\underline{x}}$  :  $[s]\hat{\underline{x}} = \underline{b}$ . הצגה זו מאפשרת שמוש בכלים אלגבריים לפתרון מספר בעיות פתוחות בתחום התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר כגון שחזור אות מ-MDSTFT.

לאחר מודיפיקציה, הסידרה המתקבלת בדיכ לא ניתנת להצגה כהתמרת פוריה של אות בזמן. במקרה זה מוגדר קריטריון לסינטיזה אופטימלית: קבלת סידרה בזמן שאם נבצע לה אנליזה התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר, הסידרה המתקבלת תהיה הקרובה ביותר לסדרה הנתונה במובן של מינימום שגיאה ריבועית. עפ"י הגישה האלגברית בעיה זו ניתנת להצגה כחישוב  $\hat{\underline{x}}$  עבור וקטור  $\underline{b}$  נתון המבטיח מינימום על  $\epsilon$  המוגדר ע"י  $\epsilon = ||[A]\hat{\underline{x}} - \underline{b}||$ . זו בעיה ידועה באלגברה עם פתרון המבוסס על מטריצת GENERALIZED INVERSE של [A].

העבודה סוקרת את עקרונות השיטה האלגברית ופתרון מספר בעיות בתחום ה-DSTFT עפ"י גישה זו, כמו כן מוצגות מסקנות המתקבלות מתאור זה לגבי מערבליים אנלוגיים.

רשימת קיצורים

---

התמרת פוריה דיסקרטית.	-	DFT
התמרת פוריה לזמן קצר.	-	STFT
התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר.	-	DSTFT
אנליזת התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר.	-	DSTFTA
סינטיזת התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר.	-	DSTFTS
התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר שעברה מודיפיקציה.	-	MDSTFT

מ ב א .1

הגדול וההרחבה שחלו בשנים האחרונות באמצעי הקומוניקציה העלו גם את הצורך בשמירת סודיות האינפורמציה [3, 2, 1]. מערכות קשר מוצפנות שהיו פעם נחלתם של הצבאות, והשרות הדיפלומטי בלבד נידרשות היום גם לצרכים אזרחיים. יש להבחין בשני סוגים עקרוניים של הגנה על אינפורמציה, הצפנה וערבול [3].

בהצפנה, אות הדבור נדגם בצורה ספרתית ומשונה על פי סידרה אקראית (למשל חיבור מודולו 2) ליצירת אות ספרתי השונה לחלוטין מדגימות האות המקורי. האות המוצפן מועבר בצורה ספרתית. בשיטה זו אין כלל מובנות לדבור המוצפן (אפילו לא ניתן להבחין בקטעי השקט בדבור). אולם העברת הדבור המוצפן מחייבת שמוש בקווי תמסורת בעלי רוחב סרט גדול או לחילופין העברתו בקווי טלפון רגילים תוך שמוש בטכניקות לדחיסת דבור - טכניקות הגורמות לקבלת דבור סינטטי באיכות נמוכה [4].

בערבול, אות הדבור מחולק למסגרות. מסגרות אלו עוברות סדור מחדש ו/או כל אחת מהמסגרות עוברת טרנספורמציה, מקדמי הטרנספורמציה עוברים סדור מחדש ולאחר מכן טרנספורמציה חזרה, כל זאת במטרה להרוס את מובנות הדבור וקבלה ביציאה של אות דבור אנלוגי מעורבל. ברור שבשיטה זו הבטחת האינפורמציה היא לא מוחלטת אולם מכיון שהדבור המעורבל הוא אנלוגי קל יותר להעבירו במערכת קווי הטלפון הקיימת.

מכיון שהמוש של מערבלים אנלוגיים, עם התקדמות הטכנולוגיה, הופך להיות זול ופשוט, במקרים בהם לא דרושה סודיות מוחלטת ניתן להשתמש בהם [6, 5].

שניים מהקריטריונים לבחינת שיטות ערבול הם מובנות הדבור המעורבל המהווה מדד למידת ההסתרה המושגת ע"י המערכת [7], והגדלת רוחב הסרט של האות המעורבל ביחס לאות המקורי. ההגדלה ברוחב הסרט נמדדת מכיון שדרוש להעביר את הדבור ברשת הטלפון הקיימת. רשת זו הינה בעלת רוחב סרט מוגבל והעברת אות בעל רוחב סרט גדול מהמותר גורמת לירידה באיכות הדבור המשוחזר. בשנים האחרונות התפרסמו מספר מאמרים הדנים בשיטות ערבול שונות, מימושן, והשוואה בין ביצועיהם עפ"י הקריטריונים שפורטו לעיל [9, 8].



מטרת המחקר בתחום זה הינה גיבוש אלגוריתם לערבול דבור המבטיח את סודיות הדבור, מאפשר את העברתו דרך רשת הטלפונים הקיימת וקבלת דבור משוחזר באיכות טובה. לשם כך יש לבחון את שיטות הערבול גם על פי חסינותן לפרמטרי ערוץ תקשורת. עד כה המחקר היה מופנה למציאת שיטת ערבול שתבטיח הגדלת רוחב סרט מינימלית וזאת בהתאם למגבלות רוחב הסרט של ערוצי טלפון. השיטה שהוצעה, כדי להתגבר על בעיה זו, הינה ערבול בתחום החדר באמצעות התמרת פוריה דיסקרטית - DFT [10]. אולם, מסתבר ששיטה זו רגישה מאוד לפרמטר נוסף של הערוץ שבדיון עד כה נהגו להתעלם ממנו - הסחת הפאזה הלא לינארית של הערוץ (השהית החבורה - GROUP DELAY DISTORTION). מכיון שמערכת השמיעה אינה רגישה לעיוות פאזה קבוע בגבולות מסויימים לא היו כמעט מגבלות על פרמטר זה בתכנון הערוצים הקיימים. דבור המועבר דרך ערוץ עם פאזה נתונה ישמע כמו הדבור המקורי, אולם בדבור מעורבל נהרסות התכונות המאפיינות את הדבור והאות המשוחזר, כפי שיוצג בהמשך, רגישה לפרמטר זה.

נעשו נסיונות להתגבר על הגדלת רוחב הסרט, הרגישות לפאזה לינארית והצורך בסנכרון בין מקלט למשדר ע"י ערבול בעזרת התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר. מספר עבודות [13] - [10] התפרטמו לאחרונה על היתרונות הגלומים בשיטת ערבול זו, אולם נסויים שנערכו במטרת עבודה זו והמאשרים את יתרונות השיטה על פני השיטות המקובלות, גם הוכיחו שהדבור המשוחזר המתקבל הוא באיכות נמוכה. נסיונות לשפר את איכות הדבור המשוחזר בהתבסס על דרגות החופש בתכנון מערכת התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר ומתוך ידיעת המבנה ההרמוני של הדבור הועילו רק במעט. התעמקות בבעיה הראתה שלמעשה זהו מקרה פרטי של בעיה כללית שלא נמצא לה עדיין פתרון, שחוזר אות מהתמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר שעברה מודיפיקציה. נסיונות להתמודד עם הבעיה בכלים הידועים לתאור התמרת פוריה לזמן קצר עלו בתוהו לכן פותחה גישה חדשה - גישה אלגברית לתאור אנליזה וסינטיזה התמרת פוריה לזמן קצר, גישה המאפשרת הצגה שונה של הבעיה ופתרונה בעזרת כלים מתמטיים חדשים.

העבודה שלהלן דנה בשתי בעיות עקריות, מערבלים אנלוגיים, וגישה אלגברית לתאור אנליזה וסינטיזה של התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר.

בפרק 2 המוקדש לערבול, מתוארות שיטות שונות לערבול, ופרמטרים אופייניים לערוצי טלפון תוך פירוט מבנה של מערבלים אנלוגיים בהם הערבול מתבצע במישור הזמן או החדר עם מקדמי התמרת פוריה דיסקרטית DFT.

פרק 3 כולל הגדרה של מושג התמרת פוריה רציפה ודיסקרטית לזמן קצר (TRANSFORM DOSTFT - DISCRETE SHORT TIME FOURIER), תאור קצר של שיטות למימוש אנליזה וסינטיזה של התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר, הצגת דרגות החופש בעת תכנון מערכת אנליזה וסינטיזה, ובחינת חלק מהבעיות הפתוחות בנושא.

פרק 4 מתאר מערבלים המבוססים על DOSTFT.

פרק 5 מציג גישה חדשה לתאור אנליזה וסינטיזה של DSTFT - גישה אלגברית המבוססת על יצוג ההליכים כמכפלת מטריצות.

פרק 6 מציג את העקרונות לסינטיזה אופטימלית עפ"י קריטריון מינימום שגיאה רבועית של אות שעבר מודיפיקציה. הסינטיזה בגישה זו גם מבטיחה שאם לא קיימת מודיפיקציה האות משוחזר במדוייק.

פרק 7 מתאר את יישום השיטה עבור אנליזה ללא קיפולים בזמן, כלומר חלונות אנליזה בהם מספר הדגמים שווה למספר פסי התדר בהתמרה. נוכיח ששיטת ה-WOLA WEIGHTED OVERLAP ADD - WOLA המקובלת [14] היא גם שיטת הסינטיזה האופטימלית, ונציג שיטה לתכנון מסנני סינטיזה עפ"י שיטת ה-WOLA; כמו כן מוגדרים תנאים שעל מערכת האנליזה למלא על מנת לאפשר שחזור של האות.

פרק 8 מתאר את יישום השיטה עבור אנליזה עם קיפולים בזמן, כלומר מספר הדגמים בחלון האנליזה גדול ממספר פסי התדר בהתמרה. מכיון שחשוב מסנן הסינטיזה במדוייק הוא מסובר מוצגות מספר דרכים לקרוב מסנן הסינטיזה האופטימלי - דרכים שבכל מקרה מבטיחות שאם לא מבצעים מודיפיקציה מתקבלת מערכת יחידה.

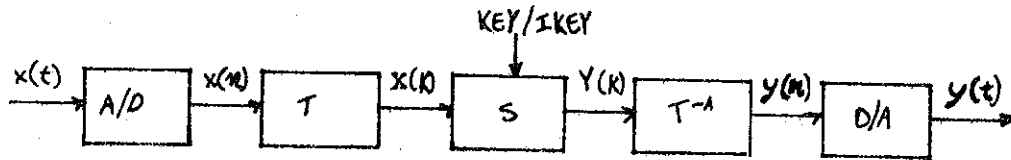
בפרק 9 מתוארים נסויים ליישום מסקנות הגישה החדשה שפותחה על מערבליים אנלוגיים המבוססים על DSTFT. כמו כן נבחנת הבעיה של קבלת מערכת סינטיזה ואנליזה (לשם הדגשה - עד כה דנו במערכות אנליזה וסינטיזה) המהווה מערכת שקופה ומשמעות התוצאות המתקבלות לגבי מערבליים באמצעות DSTFT.

סכום העבודה תוך הדגשת התוצאות העקרויות שהתקבלו מפורט בפרק 10. פרק זה כולל גם מסקנות והצעות להמשך המחקר בתחום התמרת פוריה דיסקטית לזמן קצר המבוססות על הגישה החדשה המוצגת בעבודה זו.

2. ערבול אנלוגי

1.2 מערבלים אנלוגיים

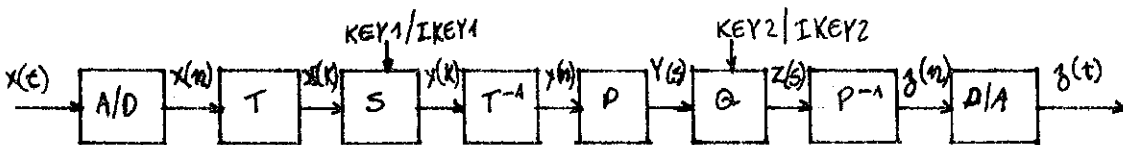
עבודה זו דנה במערבלים אנלוגיים כאשר הערבול מתבצע באמצעים ספרתיים. המערבל מקבל כקלט אות אנלוגי, מעבירו לאות ספרתי, מעבד אותו ומעבירו חזרה לאות אנלוגי. דיאגרמת בלוקים כללית של יחידה כזו מפורטת בתרשים 2.1.



תרשים 2.1 - מערבול אנלוגי בעל רמה אחת.

FIG 2.1 - ONE LEVEL ANALOG SCRAMBLER.

האות האנלוגי  $x(t)$  נידגם, דיגמי האות  $x(n)$  עוברים טרנספורמציה  $T$  למרחב כלשהו, ובמרחב זה עוברים ערבול או שחזור לפי מפתח מסוים. לאחר מכן עוברים טרנספורמציה חזרה  $T^{-1}$  לקבלת  $y(n)$  ודרך  $D/A$  לקבלת אות אנלוגי  $y(t)$ . זה היה תאור מערבלים הכוללים ערבול ברמה אחת. כדי להרוס לחלוטין את מובנות הדבור קיימים גם מערבלים בשתי רמות [15] כמתואר בתרשים 2.2.



תרשים 2.2 - מערבול אנלוגי בשתי רמות.

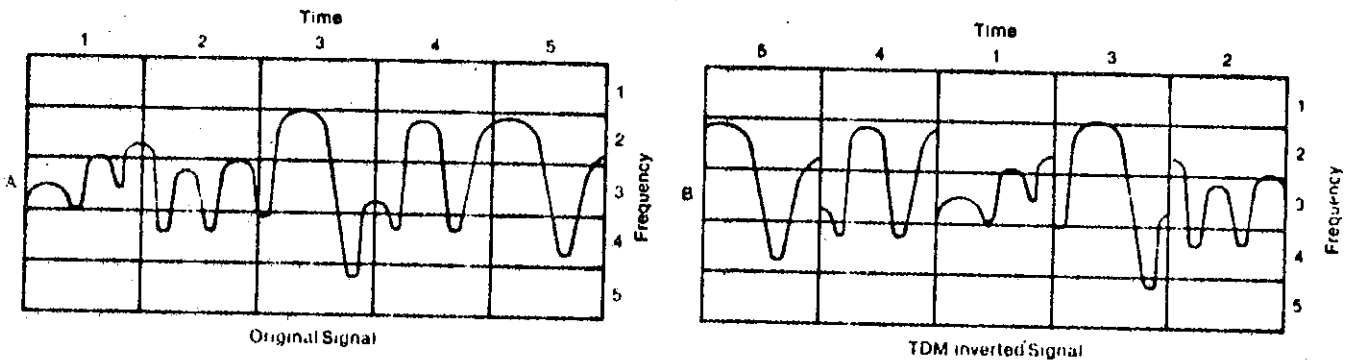
FIG 2.2 - TWO LEVEL ANALOG SCRAMBLER.

אלו שני מערבלים אנלוגיים בטור: האחד -  $A/D-T-S-T^{-1}$ , והשני -  $D/A-P^{-1}-Q-P$  כאשר ניתן לחסוך את המעבד לאות אנלוגי וחזרה בין שתי הרמות.  $T$  ו- $P$  אלו שתי טרנספורמציות ו- $S$  ו- $Q$  אלו שני מערבלים. במטרה להקטין את מובנות הדבור המערבל בוחרים טרנספורמציות שונות ( $T \neq P$ ) ומערבלים שונים ( $S \neq Q$ ).

הערבול מתבצע ע"י שנוי הסדר של מקדמי האות במרחב הערבול. ניתן להשתמש בפרמוטציה קבועה לערבול - מפתח קבוע, או במפתח משתנה בזמן. מפתח משתנה בזמן מקטין את מובנות הדבור המעורבל ומקשה על הבנתו אולם שמוש בו מחייב משלוח אות סנכרון נוסף המלמד על המפתח שבתוקף.

2.2 ערבול במישור הזמן

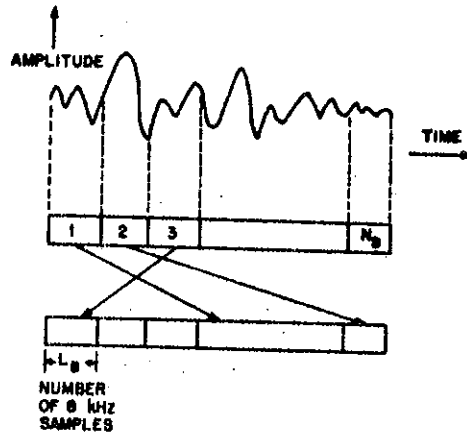
הטרנספורמציה הפשוטה ביותר הינה טרנספורמצית היחידה ואז הערבול מתבצע במישור הזמן, נהוג לסמן שיטה זו ב-TDM - TIME DIVISION MULTIPLEXING. תרשים 2.3 שלהלן מתאר ערבול מסוג זה.



תרשים 2.3 - ערבול במישור הזמן.  
FIG 2.3 - TIME DIVISION MULTIPLEXING

ערבול כזה ניתן למימוש בצורה פשוטה ונוחה בעזרת מקרו-מחשבים [16], ואכן מערכת כזו המבוססת על מעבד INTEL 8085 נבנתה בהנחית המחבר ע"י סטודנטים במסגרת המעבדה לעבוד אותות [17].

תרשים 2.4 שלהלן מתאר בצורה עקרונית את בצוע הערבול בזמן.

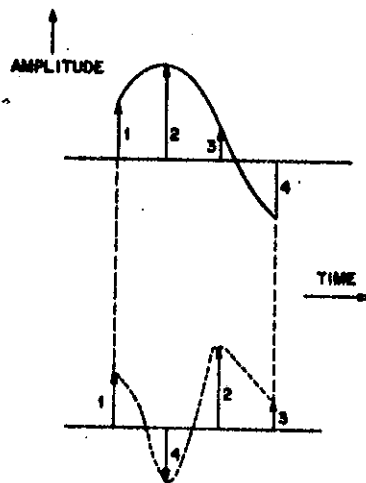


תרשים 2.4 - בצוע ערבול בלוקים במישור הזמן.

FIG 2.4 - BLOCK PERMUTATION IMPLEMENTATION IN TIME DOMAIN.

בתכנון המערכת קימות מספר דרגות חופש:  $L_B$  - אורך הבלוק שעובר פרמוטציה,  $N_B$ -מספר הבלוקים המשתתפים בערבול והגורם השלישי הנקבע ע"י השניים הראשונים זוהי ההשהיה הנגרמת עקב הערבול וגודלה  $L_B \cdot N_B$  דגימות.

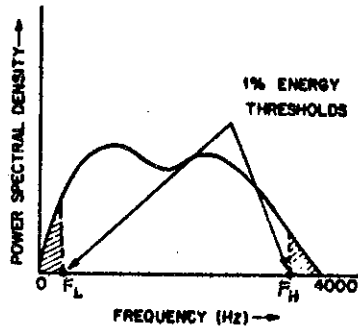
אחת הבעיות הראשונות המועלת בהקשר לערבול הינה הגדלת רוחב הסרט הנגרמת לדבור עקב הערבול. הדוגמא הבאה של ערבול דגימות המתוארת בתרשים 2.5 ממחישה בעיה זו, (ערבול דגימות הוא למעשה מקרה פרטי שבו  $L_B$  שווה לאחד).



תרשים 2.5 - ערבול דגימות.

FIG 2.5 - ILLUSTRATION OF SAMPLE PERMUTATIONS.

לכאורה, מכיון שאנו עובדים עם דגימות האות, שנדגמו בחדר ניקוויסט, לא קימת כלל בעיה של הגדלת רוחב סרט. דגימות האות המקורי (הנדגם בקצב של  $F_s=8000\text{Hz}$ ) מיצגות אות בתחום  $0-4000\text{Hz}$  ולכל פרמוטציה של דגימות קיים אות בתחום  $0-4000\text{Hz}$  שאלו דגימותיו. הבעיה מתעוררת מכיון שרוחב המעבר של ערוץ טלפון אופיני הוא  $300-3300\text{Hz}$  וערבול של דגימות האות עלול להעביר מידע חשוב של הדבור לתחום  $3300-4000\text{Hz}$ . מידע זה אובד במעבר דרך ערוץ התקשורת ולאחר מכן בשחזור יחסר מידע זה, ואיכות הדבור המשוחרר נפגמת. מבחינה תאורטית ניתן היה להתגבר על בעיה זו ע"י שמוש ב-L.P.F אידאלי בתדר של  $3.3\text{kHz}$  וקצב דגימה של  $6.6\text{kHz}$  אולם מכיון שמצד אחד לא קיים מסנן כזה ומצד שני התחום  $0-300\text{Hz}$  בכל מקרה לאחר הערבול הולך לאבוד, הבעיה נשארה בעינה. כדי למדוד את הגדלת רוחב הסרט מקובל להשתמש בספקטרום הממוצע של הדבור, כאשר הממוצע הוא על ספקטרום של סגמנטים באורך כ- $20\text{msec}$ . בכל ספקטרום יסומנו התדרים  $F_L$  - התדר שמתחתיו מרוכזת בממוצע  $1\%$  מאנרגיית האות, ו-  $F_H$  - התדר שמעליו מרוכזת בממוצע  $1\%$  מאנרגיית האות. מעתה - נתיחס להגדלה בתחום  $F_L - F_H$  כאל הגדלת רוחב הסרט. תרשים 2.6 שלהלן מבהיר מושגים אלו.



תרשים 2.6 - הגדרת ספי אנרגיה של  $1\%$   $F_L$  -  $F_H$ .

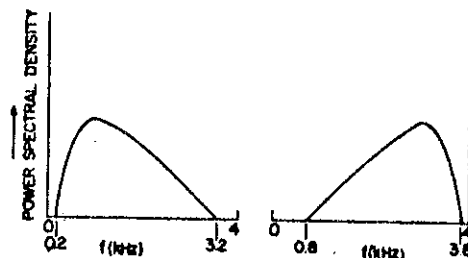
FIG 2.6 - DEFINITION OF 1 PERCENT ENERGY THRESHOLDS  $F_L$  AND  $F_H$ .

נבחן שיקולים לבחירת פרמטרי הערבול. ההשהיה הכוללת שווה ל- $L8 \cdot NB / Fs$  שניות. בהסתמך על נסויים שנערכו [18] מקובל להניח שהשהייה שאינה עולה על 0.5 שניות בין צד אחד לשני אינה פוגמת בשיחה. בחירת  $L8$  הינה פשרה בין דרישות סותרות; האחת - בלוק קטן רצוי באורך 1 כדי להקטין את מובנות הדבור המעורבל, והשניה בלוק ארוך כדי להקטין ככל האפשר את הגדלת רוחב הסרט הנובעת מהערבול.  $NB$  נבחר בדייק גדול ככל האפשר על מנת להקטין את מובנות הדבור המעורבל, אולם  $NB$  גדול מסבך את הממוש (דרוש עוד זכרון) ומגדיל את ההשהייה. נערכו נסיונות לבחירה אופטימלית של פרמטרים על סמך הגדלת רוחב הסרט, מובנות הדבור המעורבל וההשהיה הכוללת [8], והפרמטרים שנבחרו הינם  $NB=8$  ו- $L8=128$ .

### 2.3 ערבול במישור התדר

משור אחר שנוח לבצע בו ערבול הינו משור התדר. נבחין בשלושה מקרים: ערבול הכולל הפוך תדר, ערבול באמצעות התמרת פוריה דיסקרטית-DFT וערבול באמצעות התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר - DSTFT.

הפוך תדר זו קבלת תמונת ראי של הספקטרום, כפי שנחן לראות בתרשים 2.7.



תרשים 2.7 - הפוך תדר.

FIG 2.7 - ILLUSTRATION OF FREQUENCY INVERSION.

מכיון שהאות הדגום הוא ממשי. הספקטרום בתחום  $0-\pi$  הינו תמונת ראי של זה בתחום  $\pi-2\pi$  והספקטרום מחזורי במחזור  $2\pi$ . לכן הפוך תדר שקול "להזזת" הספקטרום ב- $\pi$  בערבול, כלומר ב- $N/2$  דגימות של ה-OFT, והחזרתו ב- $\pi$  בשחזור. (מכיון שהספקטרום מחזורי ב- $2\pi$  גם בשחזור ניתן להזיזו ב- $\pi$ ) לכן נקבל:

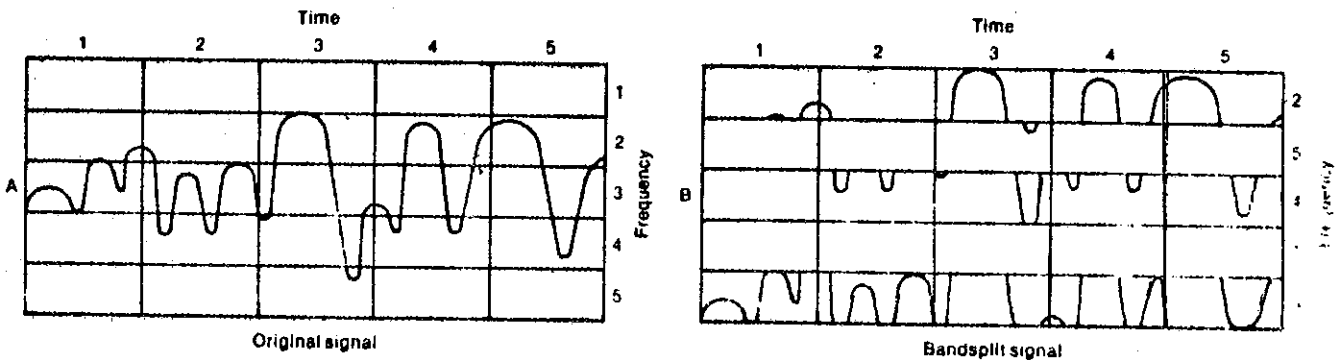
$$X\left(\left(k+\frac{N}{2}\right)_N\right) \iff W_N^{-\frac{N}{2}n} x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}\frac{N}{2}n} \cdot x(n) = (-1)^n x(n) \quad (2.1)$$

כאשר:

$X(k)$  - הדגם ה- $k$  של ספקטרום האות.  
 $x(n)$  - הדגם ה- $n$  של האות.

כלומר ממוש הפוך תדר מתבצע ע"י הפוך הסימן של כל דגם שני בזמן, דבר שקל לממש ואינו מצריך טרנספרמציה למישור התדר. בדרך כלל ערבול מסוג זה לא יעמוד לבדו מכיון שלמרות שמושגת בו דרגת סודיות כלשהי, הרי מערכת השמיעה מתרגלת חיש להיפוך התדרים ומתחילה לזהות את הנאמר. לכן ישמש כרמת ערבול נוספת לאחר ערבול במישור הזמן [8].

הערבול במישור התדר מתבצע בצורה אנלוגית לערבול במשור הזמן ע"י חלוקת הספקטרום למספר תחומים ושנוי הסדר שבו הם ערוכים. תרשים 2.8 שלהלן מבהיר שיטה זו.

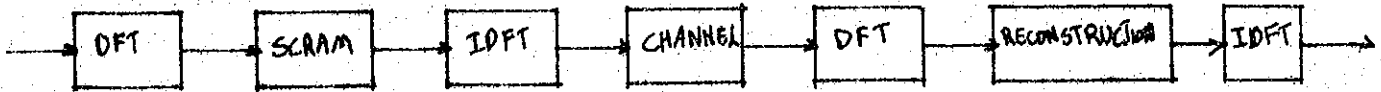


תרשים 2.8 - חלוקת אות הדבור המקורי (A) למספר פסי תדר, והחלפת הסדר ביניהם (B).

FIG 2.8 - BANDSPLITTING DIVIDES THE ORIGINAL VOICE FREQUENCY (A) SIGNAL INTO SEVERAL SUB-BANDS. SUB-BANDS ARE THEN INTERCHANGED OR INVERTED (B)



מימוש אנלוגי של מערבול מסוג זה הוא יקר ומסובך, ולכן נעשו נסיונות לממשו באמצעים ספרתיים. הדרך הנוחה לכך היא התייחסות למקדמי ה-DFT של האות כאל פלט מערך מסננים ובצוע הערבול עליו. תרשים 2.9 מפרט דיאגרמת בלוקים של מערכת כזו.



תרשים 2.9 - מערבול אנלוגי באמצעות DFT.  
FIG 2.9 - ANALOG SCRAMBLER BY MEANS OF DFT.

כל  $M$  דגימות מבוצע DFT ל- $M$  נקודות,  $M$  הדגימות המתקבלות מעורבלות ואחר הן עוברות התמרה הפוכה ופעולה דומה קורת במקלט. דרגת החופש בתכנון המערכת היא בחירת  $M$ , רוחב הסרט של כל אחד מהערוצים במערך שווה ל- $\Delta f = \frac{f_s}{M}$  ולכן  $M$  גדול מבטיח מסננים צרים וערבול טוב, מצד שני ככל ש- $M$  גדל, גדלה סיבוכיות חישוב ההתמרה, זמן ביצועה והשהיית המערכת.

מכיון שאנו עוסקים באות דבור שאינו סטציונרי ויש לנו דרישות חמורות לגבי אופיו של מערך המסננים, כפי שיפורט בפרק 4, נראה שהשימוש בהתמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר מבטיח מספר יתרונות על התמרת פוריה הרגילה שניתן לראותה כמקרה פרטי של ההתמרה לזמן קצר.

#### 2.4 ערבול על ידי טרנספורמציות שונות

מרחב ערבול אחר הנראה מבטיח זהו המרחב הנפרש על ידי מקדמי ה-FUNCTIONS PROLATE SPHERIODICAL [19], פונקציות אלו שהן אופטימליות ליצוג אות מוגבל בזמן ורוב האנרגיה שלו מוגבלת סרט מאפשרות ביצוע ערבול ללא הגדלת רוחב סרט [20]. הבעיה בעבודה עם מרחב זה הינה שאין משמעות פיסיקאלית למקדמי פונקציות אלו, כך שכאשר מערכת הערבול כוללת מעבר תווך של ערוץ מעשי והדיבור המשוחזר נפגם אין בידינו כלים לתקן או להקטין עוותים אלו. בעיה אחרת המתעוררת נובעת מהרצון לממש מערכות ערבול כאלו. חישוב המקדמים מצריך כושר חישוב רב (גדול יותר מזה הנדרש לשם חישוב התמרת פוריה רגילה).

כאופן כללי ניתן לעבור לכל מרחב שהוא בעזרת כל טרנספורמציה והשאלה מה התועלת שתצמח מכך, מרחב מנימלי מתקבל על פי WYNER [20] בעזרת ה-FUNCTIONS-PROLATE SPHERIODICAL, ומרחבים בעלי משמעות פיסיקלית אלו הזמן והחדר, ולכן עבודתי מתרכזת בשני המרחבים האחרונים.

2.5 ערוצי טלפון

בהשוואה בין מערכלים אנלוגיים יש להתחשב בעובדה שהדבור המעורבל עובר דרך ערוץ טלפון רגיל. בעבודות שהופיעו עד כה התחשבו רק בעקום הניחות של הערוץ כפרמטר היחידי המאפיין את הערוץ. קיימים מספר פרמטרים לאפיון ערוצי טלפון [21] וקיימים שני תקנים בנושא זה, האמריקאי [22] והאירופאי CCITT [23-26], שעל פיו עובדים בישראל. נבחן חלק מפרמטרים אלו.

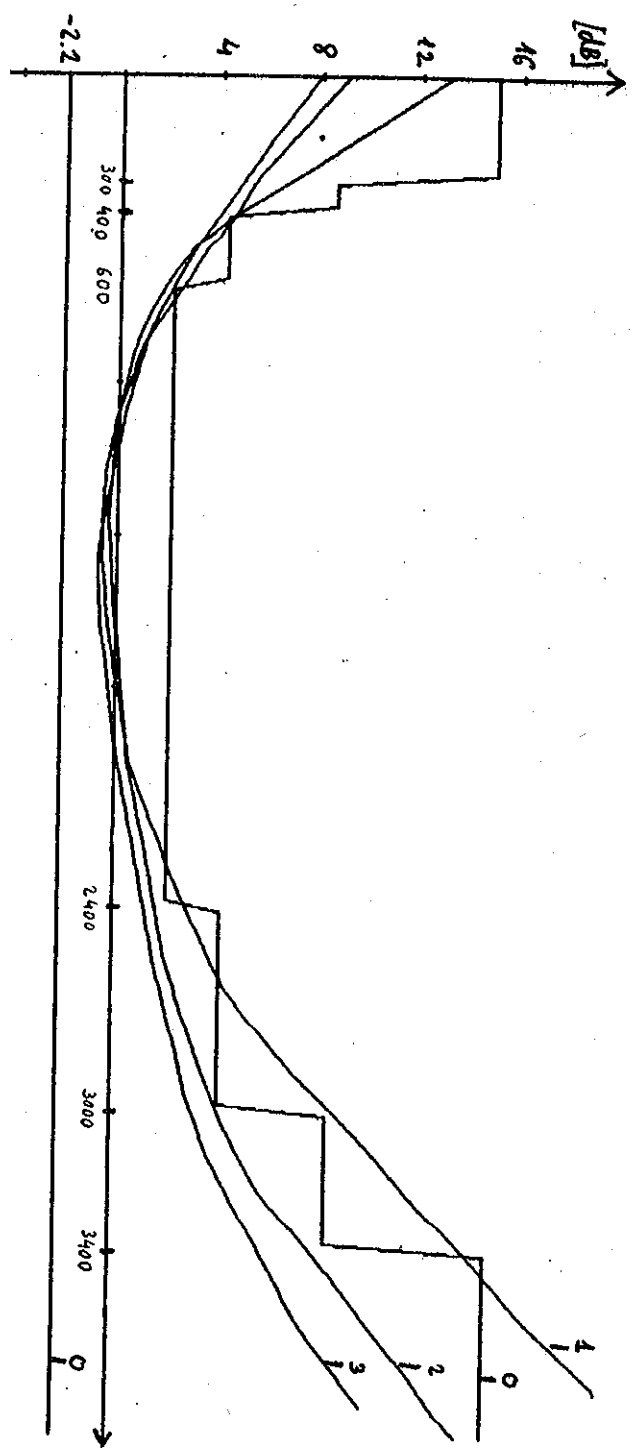
רעש - רעש זו הפרעה המופיעה על הערוץ ואינה בקורלציה עם האות. קיימים מקורות רבים לרעש בערוצי טלפון והם כוללים רעש תרמי של המגברים, השראוויות של קווי חשמל (50HZ והרמוניות שלו), הצלבת שיחות (CROSSTALK) הופעת טונים של מערכת החיוג וציווד טלגרף, ותופעות מעבר עקב מיתוג ושליחת אותות בקרה על רשת הטלפון. כאשר בוחנים את השפעת הרעש על מערכת ערבול דבור מסתבר שהרעש שהיה מתווסף לדבור, מתווסף באותה מידה לדבור המעורבל ולכן פעולת הערבול לא משנה את יחס S/N במוצא המערכת הנגרם עקב רעש הערוץ. הוכחה מפורטת לטענה זאת קיימת במאמרו של LEE [11].

ניחות הערוץ - נהוג לאפיין את ניחות הערוץ בתלות בתדר האות, כאשר נמדד הנחות היחסי לזה שבתדר 10000HZ [26]. תרשים 2.10 מתאר עקומי ניחות מקסימליים של מספר סוגי ערוצים.

הסחת פאזה - נתון נוסף המאפיין את הערוץ הינו עקום הסחת הפאזה שלו בתלות בתדר האות. ניתן להפריד עקום זה לסכום שני מרכיבים האחד לינארי והשני לא לינארי, העקום הלינארי שקול להשהייה קבועה במישור הזמן כפי שניתן לראות ב-(2.2).

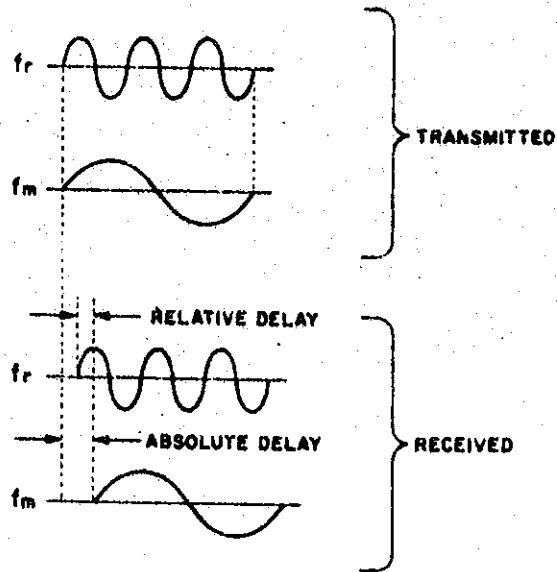
$$F\{f(n-m)\} = e^{-j\frac{2\pi}{N} k \cdot m} \cdot X(k) \quad (2.2)$$

זהו גורם המתאר שגיאות סינכרון בין המערבל למשחזר. העקום הלא לינארי מלמד על מהירויות העברה שונות של תדרים שונים בתחום המעבר. תופעה זו מתבטאת בהפרשי השהייה ופאזה יחסיים בין תדרים שונים. תרשים 2.11 מבהיר תופעה זו. שני טונים נשלחו על קו האחד בתדר F והשני F', הם נקלטו במקלט כעבור פרקי זמן שונים וניתן לבחון גם את השהייה היחסית בין הטונים.



CCITT ע"פ הגבלה  
 0 - עקום ע"פ  
 1 - עקום ע"פ  
 2 - עקום ע"פ  
 3 - עקום ע"פ

1978 ת"ש - 2.10 ד"ר - ת"ש 78 ת"ש - 1978 ת"ש  
 - FIG 2.10 - ATTENUATION DISTORTION OF TELEPHONE CHANNELS

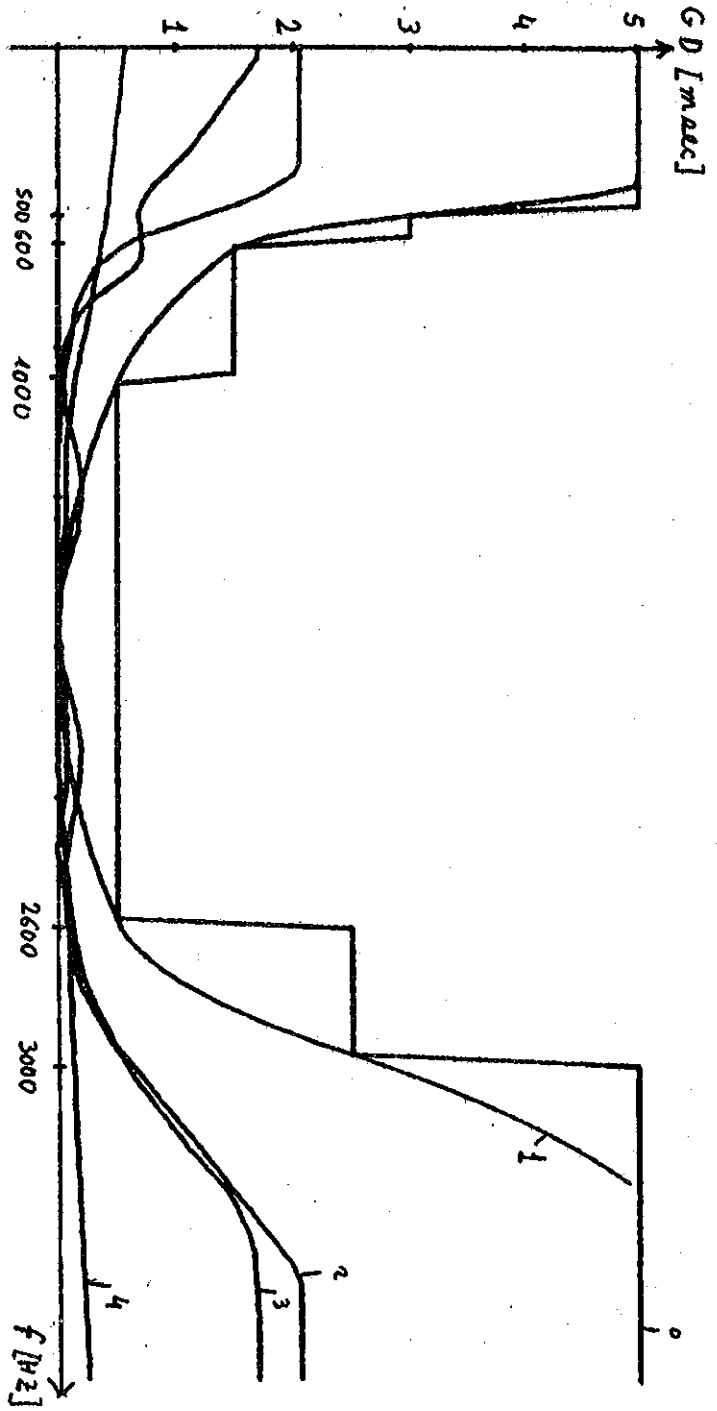


תרשים 2.11 - השהיית מעבר.

FIG 2.11 - TRANSMISSION DELAY.

מכיוון שקשה למדוד את פאזת הערוץ בצורה ישירה נהוג למדוד את שנוי הפאזה בתלות בתדר  $\Delta\phi/\Delta f$ . זוהי השהיית המעטפת (ENVELOPE DELAY DISTORTION) או השהיית החבורה (GROUP DELAY DISTORTION), המהווה מדד לליניאריות הפאזה של הערוץ. על פי תקני הטלפון [23] נבחן את עקומי השהיית החבורה של הערוץ כסכום של השהייה קבועה השווה להשהייה המינמלית של הערוץ עבור אות בתחום המעבר, והשהייה המשתנה המשלימה את העקום. מעתה נתייחס להשהייה המינמלית הקבועה כפאזה ליניארית וההשהייה המשתנה כפאזה לא ליניארית.

עקום פאזה לא ליניארי זהו פרמטר שבגבולות סבירים עם קיום תנאי רציפות אינו משפיע על מעבר דיבור בערוץ טלפון. לכן רק החל מהתקן של DCC שהתפרסם ב-1977 [23], קיימת התייחסות לגורם זה כאשר מתוארות מגבלות על רוב תחום המעבר, והמגבלות לגבי קצוות התחום נשארו נושא פתוח לדיון [24, 25]. תרשים 2.12 שלהלן מתאר את השהיית החבורה (הלא ליניארית) של ערוצי טלפון שונים על פי התקן האירופאי, האמריקאי ועקום מעשי שנמדד ברשת הטלפונים הקיימת בקו תל-אביב ירושלים וחזרה [27].



0- הגבלה על דדוקס  
 1- המקרה "המרוע ביער עפי דדוקס" (FGD)  
 2- עקום עפי צ  
 3- עקום עפי C4  
 4- עקום מעשי בדעת המלפון הק"מ

תרשים 2.12 - עקומי השהיית החבורה.  
 • FIG 2.12 - GROUP DELAY DISTORTION.

קריטריונים להערכת איכות הדבור

2.6

כדי להעריך את איכות הדבור המשוחזר ממערכת הערבול גם במדדים אובייקטיביים, כוצעו מדידות על אותו משפט דבור (שרובו קולי) עבור סוגי עבוד שונים ולאחר מכן האות המעובד הושווה לאות המקורי וחושב היחס SNR ב-DB, כאשר האות המקורי שימש כיחס והפרש בין האות המקורי והאות המעורבל הוגדר כרעש. ה-SNR שחושב זהו SEGMENTAL SNR כלומר האות חולק לסיגמנטים (כל אחד כ-20msec), עבור כל סיגמנט חושב SNR ב-DB וה-SNR הכולל זהו מצוע שלהם. בכל מדידה חושבו שלושה "סוגי" SNR. האחד SNRT שזהו SNR במישור הזמן, השני SNRFL שזהו SNR במישור התדר המשווה בין המעטפות הספקטראליות כאשר תחום התדר מחולק לתאי תדר שווים ברוחבם, השלישי זהו SNRFN שהוא SNR במישור התדר כאשר תחום התדר מחולק בצורה לא ליניארית על פי הצעתו של Klat [28] חלוקה שלטענתו מדמה טוב יותר את רגישות האוזן בתלות בתדר.

חסינות שיטות ערבול לפרמטרי ערוצי תקשורת

2.7

נבחן את חסינותם של שיטות העירבול שנסקרו לפרמטרי ערוצי התקשורת.

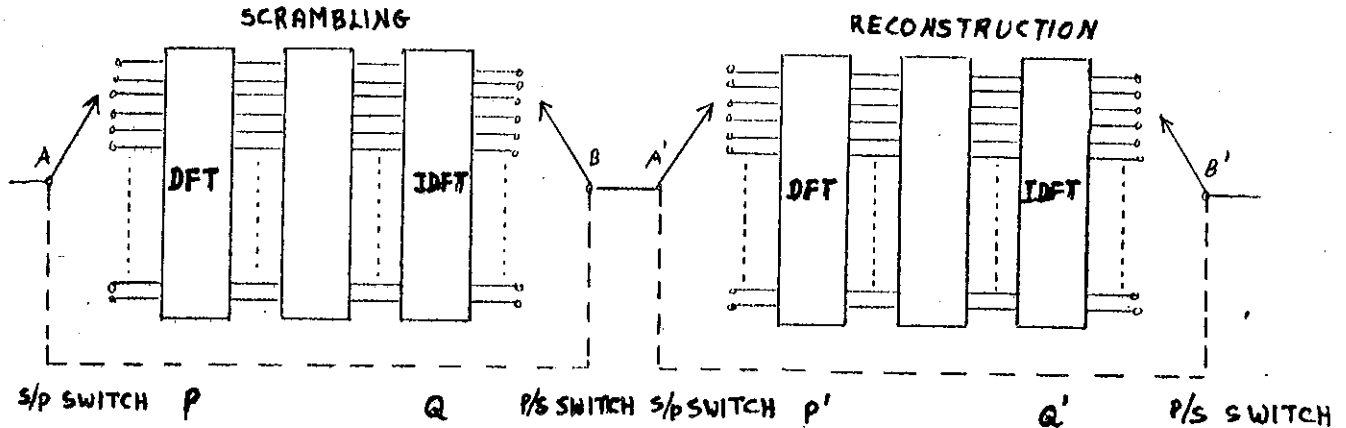
הגדלת רוחב הסרט - מערבלים במישור הזמן, עם בחירה נכונה של LB, מבטיחים הגדלה מעטה בלבד של רוחב הסרט כך שתחום זה אינו חורג מתחום המעבר של הערוץ. במערבלים במישור התדר הכוללים הפוך תדר ברור שקימת הגדלת רוחב סרט, התחום 300-3200Hz עובר ל- 800-3700Hz וחלק מתחום זה 3200-3700 המייצג את התדרים 300-800Hz יואבד במעבר דרך הערוץ, וזהו תחום המכיל חלק ניכר מאנרגיית אות הדיבור. במערבלים בתחום התדר בהם מתבצע ערבול מקדמים ניתן לערבול את המקדמים המייצגים את האות בתחום המעבר ובכך למנוע את הגדלת רוחב הסרט.

הסחת פאזה לא ליניארית-מערבלים במישור הזמן רגישים מאוד לפאזה לא ליניארית. בנסוי שביצעתי ובו העברתי דבור מעורבל דרך ערוץ עם השהיית חבורה גדושה שעדיין עומדת בתקן CDTC (עקום 1 בתרשים 2.12) והשווייתי אותו לדבור רגיל שהועבר דרך אותו ערוץ, התקבלו ה-SNR הבאים: SNRT=1.26DB, SNRFL=14DB, SNRFN=9.4DB. מערבלים בתחום התדר רגישים גם כן להסחת פאזה לא ליניארית. מכיוון שבערוצים מעשיים עקום השהיית החבורה נמוך בהרבה מהמותד, השפעת גורם זה אינה חזקה במיוחד, כמו-כן קיימות טכניקות ערבול שונות כמו זו המפורטת בסעיף 4.5, המקטינות את הרגישות לפרמטר זה.

הסחת פאזה ליניארית - מערבלים במישור הזמן רגישים מאוד לשגיאות סינכרון ואיכות הדבור המשוחזר יורדת ככל שהשגיאה גדולה יותר. תרשים 2.13 מתאר רגישות מערבול במישור הזמן (הכולל גם היפוך תדר) לשגיאות סינכרון, בתרשים מתוארים שלושת המדדים SNRT, SNRFL, ו-SNRFN בתלות בהשהיית הערוץ הנמדדת ביחידות של דגימות. כדי לבחון גם

השהיות שאינן כפולה שלמה של השהיית דגימה בוצעה אינטרפולציה לאותות הנבדקים (אינטרפולציה מוגבלת סרט [29]) שהעלתה את קצב הדגימה פי 5, וכך העקום חושב עבור השהיות שהן כפולה של 0.2 השהיית דגימה.

מערבלים בתחום התדר המבוטסים על ערבול מקדמי ה-DFT רגילים גם הם לשגיאות סינכרון, אם נבחן את התמרת פוריה על פי המתואר בציור 2.14

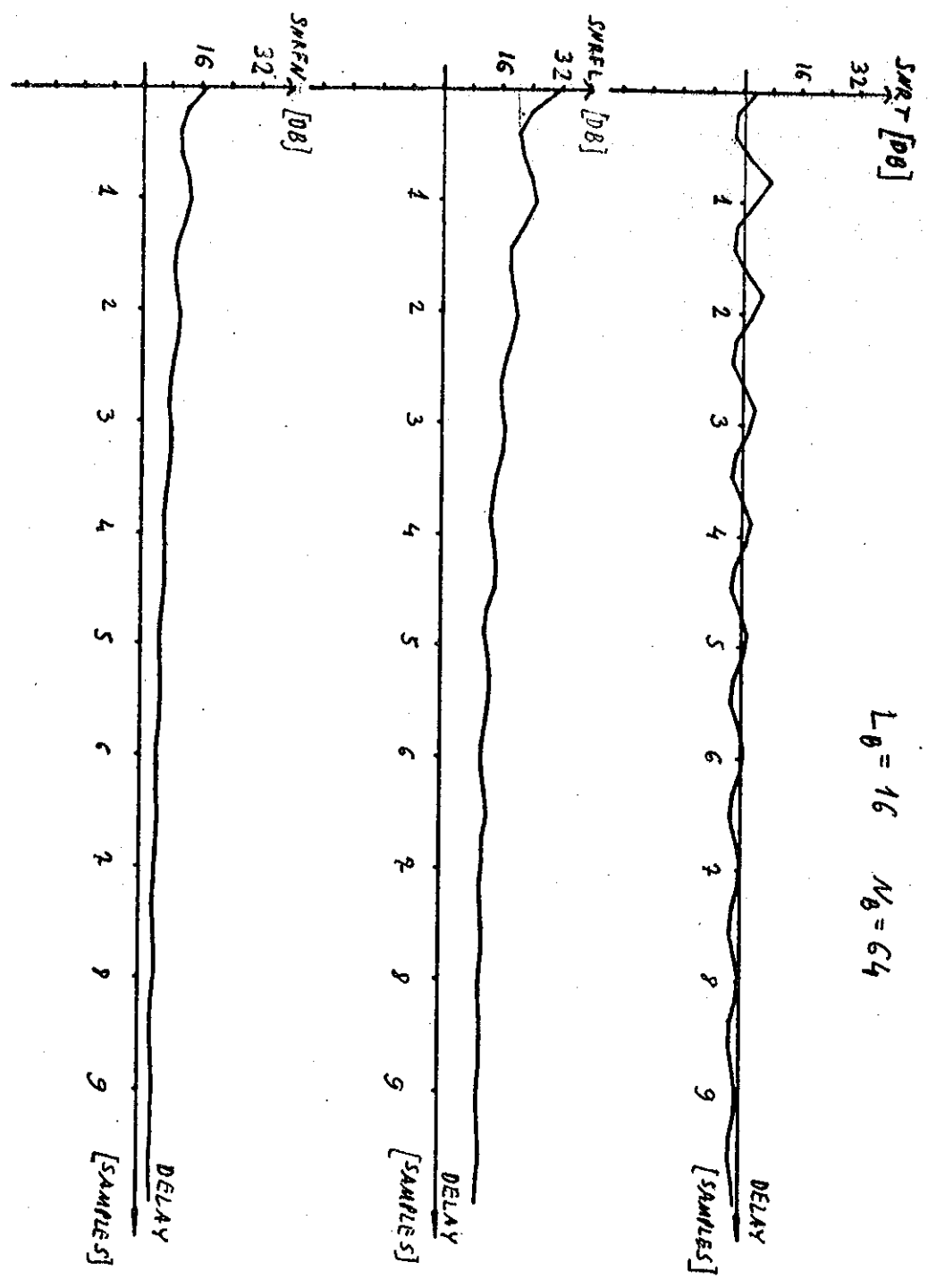


תרשים 2.14 - ערבול ושחזור באמצעות DFT.

FIG 2.14 - SCRAMBLING AND RECONSTRUCTION BY MEANS OF DFT.

נראה שעל המערכת להיות חסינה לשגיאות אלו. כאשר  $AB$  ו- $A'B'$  נעים בסנכרון אזי כל המערכת ( $p - q - p' - q'$ ) מהווה מערכת יחידה בעלת תגובה להלם של  $\delta$ . אם נניח ש- $B$  ו- $A'$  לא מסונכרנים וקיימת ביניהם השהייה קבועה אזי  $p - q$  כבר לא נותנים  $\delta$ , והמערכת כולה לא תהווה יותר מערכת יחידה, כדי להבטיח חסינות לשגיאות סינכרון יש לעבוד עם  $\text{DSTFT}$  שזוהי הרחבה של ה-DFT הרגיל המבטיחה שחזור מדויק של כל ערוץ בנפרד על ידי דגימת תפוקתו בתדר ניקוויסט על פי רוחב הסרט של המסנן. בפרק הבא יוצגו עקרונות התמרת פוריה לזמן קצר  $\text{DSTFT}$  ובפרק 4 מערבלים אנלוגיים באמצעות  $\text{DSTFT}$ .





• תוצאות סימולציה של SNR תלוי בהפרש זמן - 2.13 דוגמה  
 • FIG 2.13 - SNR DEPENDING ON LINEAR PHASE DISTORTION.

3. התמרת פוריה דסקרטית לזמן קצר

3.1 התמרת פוריה

בשטחים רבים הופך בעת האחרונה השימוש בהתמרת פוריה לכלי עבודה חשוב [30]. הצגה זו המבוססת על הצגת האות כסכום אקספוננטים קומפלקסיים מפשטת במקרים רבים פתרון בעיות ומאפשרת הבנה טובה יותר של תהליכים. יתרונה של התמרת פוריה בכך שהיא מאפשרת הצגה יחידה של האות עפ"י הפונקציות העצמיות של מערכות לינאריות וקבועות בזמן שאלו האקספוננטים הקומפלקסיים. יהי  $x(n)$  אות דגום שניתן לבטאו ע"י אינטגרל פוריה כלומר:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) \exp(j\omega n) d\omega \quad (3.1)$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \exp[-j\omega n] \quad (3.2)$$

בנוסף על כך פונקציות הבסיס של התמרת פוריה מהוות גם פונקציות עצמיות של מערכות לינאריות משתנות בזמן דבר המאפשר לפתור בעזרתן בעיות הכוללות גם מערכות בלתי קבועות בזמן. אולם התמרת פוריה, כפי שהוצגה, טובלת ממספר חסרונות, למשל לשם חישוב התמרת פוריה עבור  $\omega$  מסויים דרושה ידיעת האות מ- $-\infty$  עד  $+\infty$  דבר שאינו מעשי.

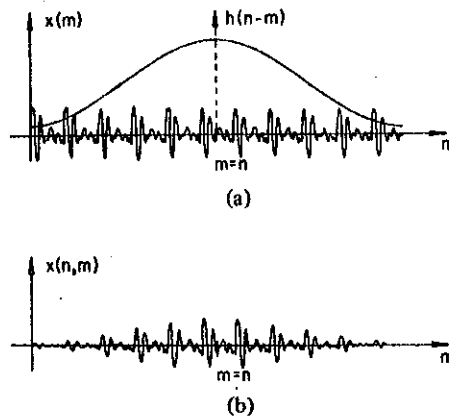
3.2 התמרת פוריה לזמן קצר

כדי להתגבר על חסרונות אלו הוגדרה הצגה בזמן ובתדר לאותות לא סטציונאריים כמו אותות דבור המאפינת את התנהגותם "המקומית" במונחים של אקספוננטים קומפלקסיים- התמרת פוריה לזמן קצר [31-34]. ניתן לבחון התמרה זו גם כהצגה פורמלית של פלט מערך מסננים לשם אנליזה ספקטראלית או כהתמרת פוריה רגילה של אות שעבר דרך חלון זמן מוזז (SLIDING TIME WINDOW). התמרת פוריה לזמן קצר של אות דגום בזמן מוגדרת ע"י זוג המשוואות הבאות:

$$X(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_2(n, \omega) \exp[j\omega n] d\omega \quad (3.3)$$

$$X_2(n, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m) x(m) \exp[-j\omega m] \quad (3.4)$$

כאשר  $X_2(n, \omega)$  זוהי התמרת פוריה לזמן קצר של  $x(n)$ . זהו חלון אנליזה שנבחר בדיכ כר שיהיה מוגבל בזמן, צר סרט או שני הדברים גם יחד, ומנוורמל כך ש-  $h(0)=1$ . נוסחת הסינטזה (3.3) דומה לנוסחת הסינטזה הרגילה (3.1) אלא שהפעם התמרת פוריה  $X_2(n, \omega)$  תלויה גם ב-  $n$  ומיצגת את ההתנהגות המקומית של  $x(m)$  כפי שניתנת לראיה דרך חלון הזמן המוזז  $h(n-m)$ .  
 תרשים 3.1 שלהלן (עפ"י [34]) מתאר גישה זו. בחלקו העליון של הציור מתואר אות  $x(m)$  ומעליו חלון אנליזה הפוך ומוזז  $h(n-m)$ . בחלקו התחתון מתוארת הסדרה לזמן קצר  $x(n, m) = h(n-m)x(m)$  עבור ערך מסוים של  $n$ .



תרשים 3.1 - (A) - חלון אנליזה הפוך ומוזז  $h(n-m)$ ,  
 (B) - הסדרה לזמן קצר  $x(n, m) = h(n-m)x(m)$  עבור מסוים של  $n$ .  
 FIG 3.1 - (A) TIME-REVERSED AND SHIFTED ANALYSIS WINDOW  $h(n-m)$   
 SUPERIMPOSED ON DATA  $x(m)$ . (B) SHORT-TIME SEQUENCE  $x(n, m) =$   
 $= h(n-m)x(m)$  FOR A PARTICULAR VALUE OF  $n$ .

עפ"י תרשים זה ניתן לבחון את  $X_2(n, \omega)$  עבור כל  $n$  כהתמרת פוריה חלקית לפי  $m$  ז"א

$$X_2(n, \omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n, m) \exp[-j\omega m] \quad (3.5)$$

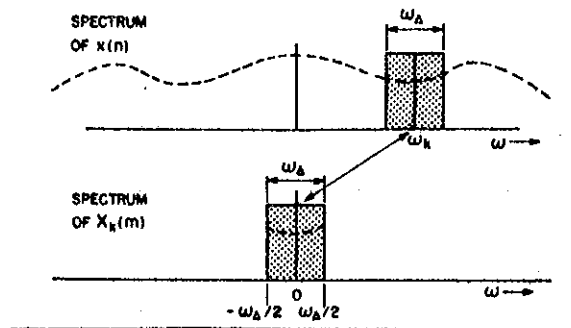
כאשר  $x(n, m)$  זו "הסדרה לזמן קצר" המוגדת לפי

$$x(n, m) = h(n-m) \cdot x(m) \quad (3.6)$$

ניתן לבחון את משוואה (3.4) גם בצורה אחרת - בקונבולוציה

$$X_2(n, \omega) = h(n) *_{n} x(n) \exp[-j\omega n] \quad (3.7)$$

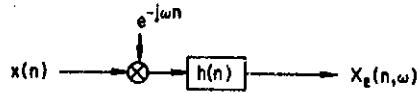
כאשר  $*_{n}$  מסמן אופרטור קונבולוציה ביחס ל- $n$ . בצורה זו ניתן לראות את  $X_2(n, \omega)$  כפלט של מסנן לינארי וקבוע בזמן בעל תגובה להלם  $h(n)$  המקבל כקלט את האות  $x(n) \exp[-j\omega n]$  שזהו למעשה  $x(n)$  שעבר דהמודולציה קומפלקסית. ניתן להמחיש את פעולת הדה-מודולציה הקומפלקסית בעזרת התרשים הבא (עפ"י [35])



תרשים 3.2 - דה-מודולציה קומפלקסית לשם קבלת מערך מסננים.

**FIG 3.2 - FILTER BANK MODULATION TECHNIQUES -  
COMPLEX (QUADRATURE) DEMODULATION.**

אינטרפרטציה זו, של מסנו לינארי, מתוארת בתרשים הבא:



תרשים 3.3 - התמרת פוריה לזמן קצר כפלט של דה-מודולטור שלאחריו מסנו אנליזה.

**FIG 3.3 - SHORT-TIME FOURIER TRANSFORM AS OUTPUT OF A DEMODULATOR FOLLOWED BY AN ANALYSIS FILTER.**

לכן נהוג להתייחס ל-  $h(n)$  גם כמסנו אנליזה, ולתהליך - כאנליזה התמרת פוריה לזמן קצר.

מכיון ש-  $X_2(n, \omega)$  זוהי פונקציה של המשתנה הרציף  $\omega$  לכל ערך של  $n$  ברור שהתמרת פוריה לזמן קצר מכילה אינפורמציה על האות (עפיי חלון האנליזה שנבחר) הרבה מעבר למינימום ההכרחי לשם יצוגו של האות. כמו כן נוסחה (3.4) מגדירה מבנה מסויים של הפונקציה  $X_2(n, \omega)$  כך שלא כל הפונקציות של  $n$  ו- $\omega$  הן התמרות לזמן קצר של אותות ממשיים.

כדי לבצע סינטיזה של אות מהתמרת פוריה לזמן קצר נגדיר בצורה אנלוגית ל-(3.4) חלון סינטיזה קבוע בזמן (ניתן להגדיר גם חלון לא קבוע בזמן או כזה התלוי במידע הכניסה, אולם הדיון במקרים אלו חורג ממסגרת עבודה זו) לקבלת נוסחת סינטיזה כללית:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(n-r) X_2(r, \omega) \exp(j\omega n) d\omega \quad (3.8)$$

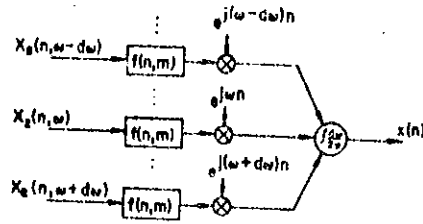
כדי לקבל מערכת יחידה, ז"א מערכת המבטיחה שיחזור מדויק של האות לאחר בצוע אנליזה וסינטיזה עלינו לדרוש [34]:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(m) h(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) H(\omega) d\omega = 1 \quad (3.9)$$

לנוסחת הסינטיזה (3.8) יש שתי אינטרפרטציות עפיי שתי האינטרפרטציות של נוסחת האנליזה. אם ניבחן את התמרת פוריה לזמן קצר  $X_2(n, \omega)$  כקבוצה של סדרות בעלות משתנה  $n$  שלכל סידרה  $\omega$  קבוע, אזי הסינטיזה היא מעבר כל אחת מהסדרות דרך מסנו לינארי וקבוע בזמן בעל תגובה להלם  $f(n)$  לשם קבלת קבוצת הסדרות  $X_2(n, \omega)$  ב- $n$  הנתונות עפיי:

$$\bar{X}_2(n, \omega) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} f(n-\tau) X_2(\tau, \omega) \quad (3.10)$$

לאחר מכן כל סידרה עוברת מודולציה קומפלקסית עי"י כפל ב-  $\exp [j\omega n]$ , ו- $x(n)$  משוחזר עי"י בצוץ אינטגרציה על  $\omega$  כמתואר בתרשים 3.4 (עפ"י [34]):



תרשים 3.4 - סינטיזה של הסדרה בזמן כקומבינציה של פלט מערך מסננים.

FIG 3.4 - SYNTHESIS OF A TIME SEQUENCE AS A COMBINATION OF FILTER BANK OUTPUTS.

לכן ניתן להתייחס ל-  $f(n)$  גם כאל מסנן סינטיזה. וזו שיטת ה-F.B.S. (FILTER BANK SUMMATION METHOD) [32].

האינטרפרטציה השנייה מתקבלת אם בוחרים את  $X_2(\tau, \omega)$  כקבוצה של התמרות פוריה לפי  $\tau$ , אזי ניתן לראות את (3.8) כבצוע התמרת פוריה הפוכה ל-  $X_2(\tau, \omega)$ .

$$x(\tau, n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_2(\tau, \omega) \exp[-j\omega n] d\omega \quad (3.11)$$

וקבלת הסדרות הבאות:

$$\zeta(\tau, n) = f(n-\tau) x(\tau, n) \quad (3.12)$$

כאשר  $\zeta(\tau, n)$  מתאר את הסידרה  $X(\tau, \omega)$  שעברה שקלול עי"י חלון הסינטיזה הפוך ומוזז  $f(n-\tau)$ . לכל ערך של  $n$ ,  $x(n)$  מתקבל עי"י סכום של  $\zeta(\tau, n)$  על  $\tau$  כלומר:

$$x(n) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} f(n-\tau) x(\tau, n) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \zeta(\tau, n) \quad (3.13)$$

3.3 התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר

$X_2(n, \omega)$  תאר את הסיידרה  $x(n)$  כפונקציה של המשתנה הרציף  $\omega$  עבור כל  $n$ , ולכן הכיל אינפורמציה מעבר להכרחית על האות וחלון האנליזה. נבחן עתה את יצוג האות ע"י התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר - DSTFT (FOURIER TRANSFORM DISCRETE SHORT TIME) כלומר דגימת התמרת פוריה לזמן קצר בזמן ובתדר לקבלת  $X_2(SR, k, \Omega_M)$  המוגדר ע"י:

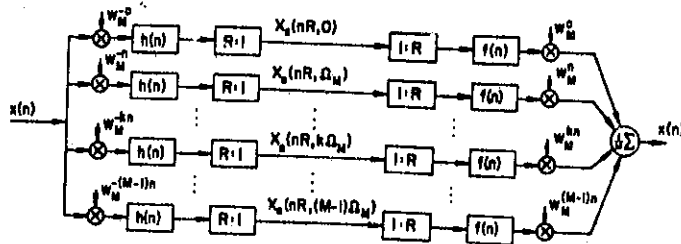
$$X_2(SR, k, \Omega_M) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(SR-m)x(m) \exp[-j\Omega_M km] \quad (3.14)$$

$k=0, 1, \dots, M-1$

כלומר דגימה בזמן כל  $R$  דגימות ובתדרים  $\Omega_M = \frac{2\pi}{M}$  RAD. עבור בחירה מסוימת של  $R, M, h(n)$  ניתן להוכיח שניתן לשחזר את האות  $x(n)$  מהתמרת פוריה דיסקרטית שלו עפ"י נוסחת הסינטיזה.

$$x(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=-\infty}^{\infty} f(n-sR) X_2(SR, k, \Omega_M) \exp[j\Omega_M kn] \quad (3.15)$$

זוג המשוואות (3.14) ו-(3.15) מגדיר מערכת אנליזה וסינטיזה במבנה של מערך מסננים בעל  $M$  ערוצים כמתואר בתרשים 3.5.



תרשים 3.5 - מערך מסננים לתאור אנליזה וסינטיזה של התמרת פוריה לזמן קצר.

FIG 3.5 - FILTER-BANK ANALOG FOR DISCRETE SHORT-TIME FOURIER ANALYSIS/SYNTHESIS.

היננו תפוקה מסנון האנליזה, בעל תגובה להלם  $h(n)$ , בערוץ  $X_2(SR, k\Omega_M)$  ה- $k$  הדגום במרחקים שווים כל  $R$  דגימות. האות המשוחזר מתקבל ע"י בצוע אינטרפולציה לכל אחד מ- $M$  הערוצים (ע"י הוספת  $R-1$  אפסים בין שתי דגימות סמוכות ומעבר האות דרך מסנון אינטרפולציה  $f(n)$ ; בצוע מודולציה קומפלקסית לתפוקת כל אחד מהמסננים ע"י כפל ב-  $\exp[j\Omega_M k n]$  ובצוע סכום על כל הערוצים. כדי להבטיח שחזור מדויק של האות צריך להתקיים בין הפרמטרים הקשר הבא [34]:

$$\sum_{S=-\infty}^{\infty} f(n-SR) h(SR-n+pM) = \delta(p) \quad (3.16) \text{ לכל } p$$

בצורה אנלוגית למקרה הרציף, נוסחה (3.14) מגדירה מבנה מסוים של הפונקציה  $X_2(SR, k\Omega_M)$  כך שלא כל פונקציה  $F(SR, k\Omega_M)$  יכולה להוות להוות DSTFT של אות ממשי  $x(n)$  כלומר פונקציה חוקית. הבעיה המתעוררת במקרה כזה הינה שאין בידינו קריטריונים לבחון האם  $F(SR, k\Omega_M)$  נתון יכול להוות DSTFT חוקי אם לאו. הדרך היחידה הידועה הינה בצוע סינטיזה ל-  $F(SR, k\Omega_M)$ , ואחר בצוע אנליזה לקבלת  $F(SR, k\Omega_M)$ , והשוואתו ל-  $F(SR, k\Omega_M)$ . אם הם שווים אזי  $F$  הינה סידרה חוקית, ולא  $F$  הינה סידרה בלתי חוקית.



במימוש התמרת פוריה לזמן קצר כמות החשובים הנדרשת היא רבה, ולכן נשתמש בכלי שפותח על מנת להקטין את כמות החישובים הדרושה למציאת התמרת פוריה דיסקרטית ה-FFT [31]. השמוש בכלי זה מגביל אותנו לבחירת M - מספר הערוצים או מספר הדגימות בתדר לחזקה שלמה של 2, ובחירת מערך הערוצים כך שיהווה מערך מסננים מלא - המכסה את כל תחום הספקטרום, ואחיד (רוחב הסרט של כל המסננים קבוע); אולם חסרונות אלו בדיכ אינם מגבילים את השימוש בשיטה. נסמן את  $n$  ב-  $\exp [j \frac{2\pi}{M} k n]$  וכך נוכל להגדיר את ה-DSTFT ע"י

$$X(SR, k, \Omega_M) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(SR-m) x(m) W_M^{-mk} \quad (3.17)$$

מעתה נסתפק ברישום ונוסחת הסינטיזה תהיה:

$$x(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{s=-\infty}^{\infty} f(n-sR) X_k(SR) W_M^{nk} \quad (3.18)$$

3.4 אנליזה התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר

נבחן מחדש את (3.17), נבצע החלפת משתנים  $n = m - SR$  ונקבל:

$$X_k(SR) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(-n) x(n+SR) W_M^{-(SR+n)k} = W_M^{-SRk} \tilde{X}_k(SR) \quad (3.19)$$

$\tilde{X}_k(SR)$  זהו ה-DSTFT המתייחס לנקודת התחלה  $m=s=0$  בעוד שה-  $X_k(SR)$  זהו DSTFT המתייחס לנקודת התחלה  $m=SR$  שזהו בסיס זמן עולה המתאים לראשית חלון האנליזה (או לנקודה אחרת קבועה בו). כדי להמחיש את ההבדל ניבחן את ה-DSTFT של אות סינוסי בתדר  $P \frac{2\pi}{M}$ . אזי  $X_p(SR)$  יהיה קבוע ללא תלות ב-SR בעוד שה-  $\tilde{X}_p(SR)$  יהיה לפי (3.19)  $\tilde{X}_p(SR) = W_M^{SR \cdot P}$  וזו פונקציה של SR. דוגמא זו ממחישה את העובדה שהגודל שבו אנו מעוניינים בדיכ הוא  $X_k(SR)$  ולא  $\tilde{X}_k(SR)$  ויש למצוא דרך לחשבו ביעילות. יש לשים לב ששני הגדלים הם בעלי אותו ערך מוחלט והיחס ביניהם הוא פאזה לינארית.

ניתן לבטא את  $\tilde{X}_k(SR)$  בצורה של DFT לפי:

$$\tilde{X}_k(SR) = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{X}_m(SR) W_M^{-mk} \quad (3.20)$$

כאשר  $\tilde{X}_m(SR)$  זהו האות הנתון ע"י:

$$\tilde{X}_m(SR) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} X(SR + \ell M + m) h(-\ell M - m) \quad (3.21)$$

נסמן ב-N את אורך מסנן האנליזה ( $N < \infty$ ) ויהי M מספר הדגימות בתדר של ה-DSTFT אזי נבחין בשלשה מקרים עבור  $\tilde{X}_m$ .

א.  $M=N$  אזי

$$\tilde{X}_m(SR) = X(SR + m) h(-m) \quad m=0, \dots, M-1 \quad (3.22)$$

ב.  $M > N$  אזי

$$\tilde{X}_m(SR) = \begin{cases} X(SR + m) h(-m) & m=0, 1, \dots, (N-1) \\ 0 & m=N, \dots, (M-1) \end{cases} \quad (3.23)$$

ג.  $N > M$  ונניח ש-  $N = P \cdot M$  (P שלם). זו דרישה שקל להשיגה (או שהיא קיימת אינהרנטית או שנגדיר שלב ביניים הכולל הגדרת סידרת ביניים  $\tilde{X}$  באורך P·M עפיי מקרה בי כאשר P הוא השלם המינימלי המקיים  $P \cdot M > N$ ) ובמקרה זה נקבל:

$$\tilde{X}_m(SR) = \sum_{\ell=0}^{P-1} X(SR + \ell M + m) h(-\ell M - m) \quad m=0, \dots, (M-1) \quad (3.24)$$

קבלת  $\tilde{X}_m(SR)$  עפיי שלב גי נקראת בצוע "קיפולים בזמן".

מכיון שהפאזה לינארית במישור התדר שקולה להזזה ציקלית במישור הזמן, ניתן להגדיר גם את  $X_k(SR)$  עיי הזזה ציקלית של  $\tilde{X}_m(SR)$  לפי:

$$X_k(SR) = \sum_{m=0}^{M-1} \tilde{X}_m(SR) W_M^{-mk} \quad (3.25)$$

כאשר

$$\tilde{X}_m(SR) = \tilde{X}((m-SR))_M(SR) \quad (3.26)$$

-1  $(( ))_M$  מסמן פעולת מודולו M.

עפ"י (3.18) ובצורה אנלוגית ל-(3.19) נוכל להגדיר את הסינטיזה

$$\hat{X}(n) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f(n-sR) \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{X}_k(sR) W_M^{nk} = \quad (3.27)$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{\infty} f(n-sR) \hat{X}_n(sR) \quad (3.28)$$

כאשר  $\hat{X}_k(sR)$  זוהי התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר ו- $f(n)$  מגדיר חלון סינטיזה. אם נגדיר את  $\hat{X}_n(sR)$  כהתמרת פוריה הפוכה של  $\hat{X}_k(sR)$  כלומר:

$$\hat{X}_n(sR) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{X}_k(sR) W_M^{nk} \quad (3.29)$$

נקבל את (3.28).

מכיון שבאנליזה בצענו התאמה של ראשית מערכת הצירים מתחילת החלון  $n=SR$  לראשית  $n=0$ , למעשה נתון לנו  $\hat{X}_k(sR)$  ויש להחזירו ל- $\hat{X}_k(sR)$  לפי

$$\hat{X}_k(sR) = W_M^{SRk} \hat{X}_k(sR) \quad (3.30)$$

ע"י הוספת פאזה לינארית בתחום התדר או ע"י סבוב ציקלי בתחום הזמן.

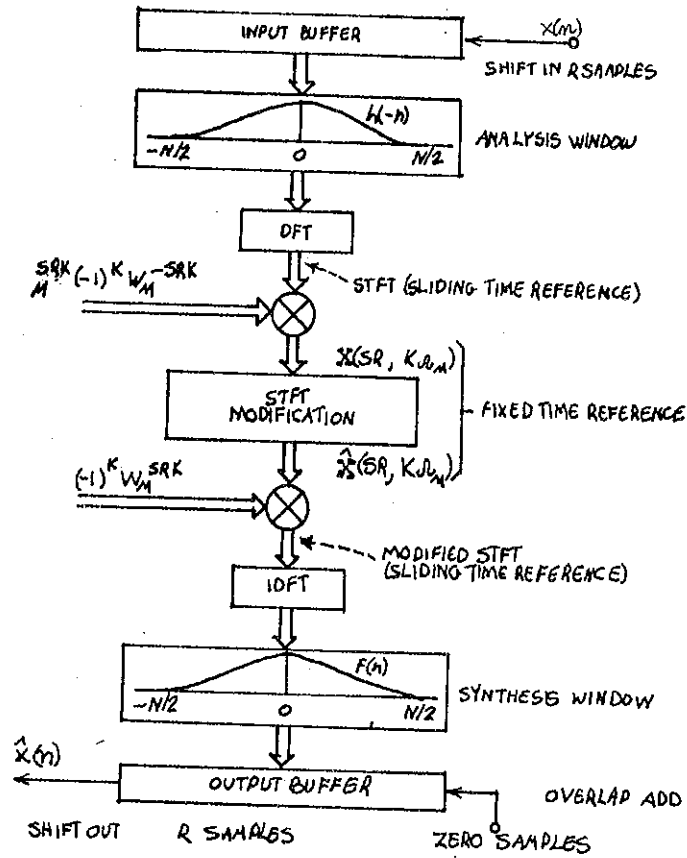
$$\hat{X}_n(sR) = \hat{X}_{\tilde{n}}((n-sR))_M(sR) \quad (3.31)$$

מהצבת נוסחה 3.31, לתוך (3.28) נקבל את נוסחת הסינטיזה הכללית:

$$\hat{X}(n) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f(n-sR) \hat{X}_{\tilde{n}}((n-sR))_M(sR) \quad (3.32)$$

שיטת - WEIGHTED OVERLAP ADD לאנליזה וסינטיזה של התמרת פוריה לזמן קצר

שיטת ה-WOLA WEIGHTED OVERLAP ADD (WOLA) הוצעה ע"י CROCHIER [14], ומציגה שיטה לממש אנליזה וסינטיזה של אותות מהתמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר. לצורך הדיון נפריד בין שני מקרים: חלון האנליזה שווה באורכו למספר הדגימות בתדר ( $n=M$ ) (אם  $n < M$  ניתן לבצע לחלון הרחבה עד  $n=M$  ע"י הוספת אפסים), וחלון אנליזה ארוך ממספר הדגימות בתדר  $n > M$ . המודל המקורי שהוצע ע"י CROCHIER טוב רק למקרה של  $n=M$ , ועבור המקרה השני נציג את הרחבת המודל כפי הוצעה ע"י מלאך [36]. המודל עבור  $n=M$  מתואר בתרשים 3.6 (עפ"י [14]).



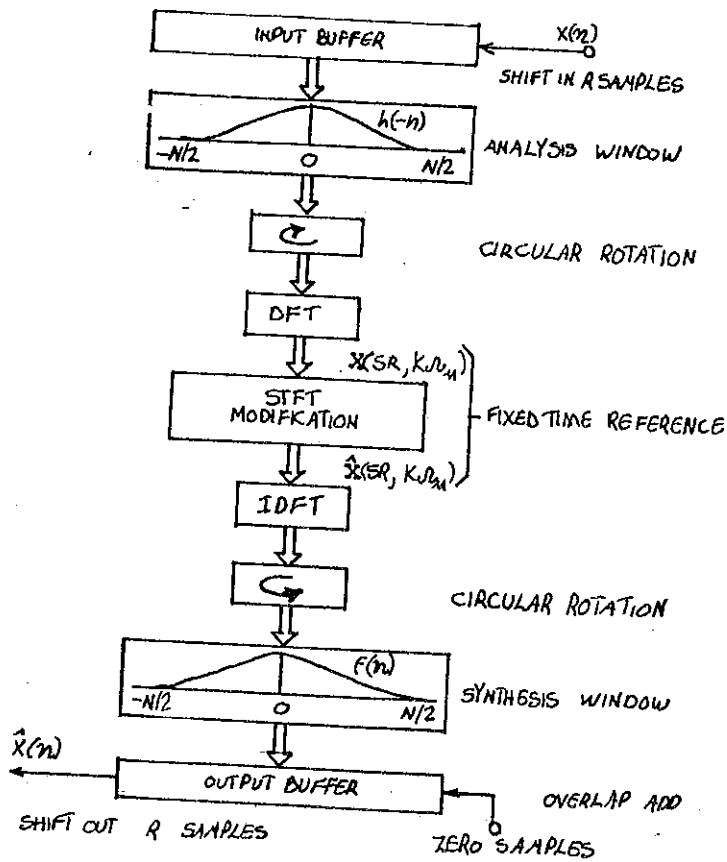
תרשים 3.6 - דיאגרמת בלוקים לתאור אנליזה, וסינטיזה של התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר עפ"י שיטת WOLA. תקון בסיס הזמן מבוצע ע"י תקון פאזה במישור התדר.

FIG 3.6 - A WOLA BLOCK IMPLEMENTATION SCHEME FOR DISCRETE SHORT-TIME FOURIER ANALYSIS, MODIFICATION AND SYNTHESIS. TIME BASE ALIGNMENT IS ACCOMPLISHED BY PHASE CORRECTION IN THE FREQUENCY DOMAIN.

בהתאם לתרשים R דגימות מאות הכניסה מוכנסות כל פעם לחוצץ הכניסה באורך N (עפ"י יחס הדצימציה R:1 בתרשים 3.5), המידע בחוצץ הכניסה מוכפל בחלון אנליזה  $h(-n)$  שמרכזו במרכז הבלוק, ועובר טרנספורמציה FFT. הסידרה שהתקבלה מתיחסת לתחילת הבלוק, לכן יש לבצע תיקון בסיס הזמן הממומש במקרה זה ע"י החסרת פאזה לינארית במישור התדר. כמו כן מכיון שראשית בסיס הזמן של החלון נמצאת במרכז הבלוק יש לבצע הזזה ציקלית של המידע המעובד לפני בצוע ההתמרה ב-N/2 נקודות - פעולה השקולה להזזת פאזה של  $\pi$  במישור התדר, ולכן ניתנת למימוש ע"י כפל ב-  $(-1)^k = \exp[-j \frac{2\pi k}{M} \frac{M}{2}]$  תיקון הפאזה הכולל הדרוש הינו לכן  $W_M^{-nRk} (-1)^k$ .

התוצאה שהתקבלה הינה התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר  $X_k(SR)$  עם בסיס זמן קבוע. לאחר בצוע מודיפיקציה להתמרה, האות משוחזר, תחילה ע"י כפל בגורם תקון פאזה משלים -  $W_M^{nRk} (-1)^k$ , אחר - בצוע התמרת פוריה הפוכה לסדרה שהתקבלה, כפל הסידרה בחלון סינטיזה  $f(n)$  וחבור הסידרה לתוכן חוצץ היציאה בצורה של OVERLAP-ADD. לאחר מכן החוצץ מוזז R דגימות שמאלה ו-R אפסים מוכנסים לתאים הימניים שהתפנו R הדגימות ש"נפלטו" משמאל אלה דגימות האות המשוחזר.

באופן דומה ניתן לממש את אותו מיבנה הפעם ע"י שמוש בהזזות ציקליות במקום כפל בגורם תקון פאזה. תרשים 3.7 מתאר גישה זו.



תרשים 3.7 - דיאגרמת בלוקים לתאור אנליזה, מודיפיקציה וסינתזה

של התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר עפ"י שיטת WOLA.

תקון בסיס הזמן מכוצע ע"י סיבוב ציקלי במישור הזמן.

FIG 3.7 - A WOLA BLOCK IMPLEMENTATION SCHEME FOR DISCRETE SHORT-TIME FOURIER ANALYSIS, MODIFICATION AND SYNTHESIS. TIME BASE ALIGNMENT IS ACCOMPLISHED BY CIRCULAR ROTATION IN THE TIME DOMAIN.

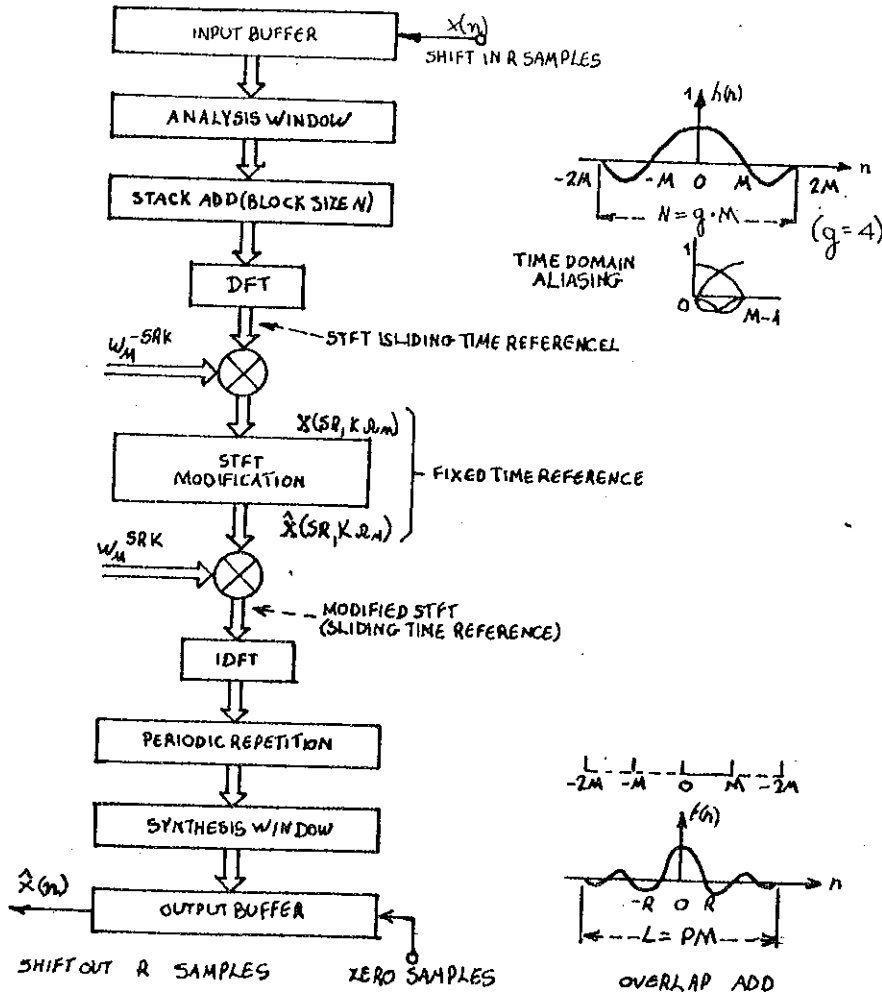
הערות לגבי המיבנה שתואר:

א. לא תמיד  $R$ -בהליך הסינטיזה שווה ל- $R$  בהליך האנליזה (כגון בעת כיווץ דבור [36]), אולם גם במקרה זה המבנה הכללי זהה אלא שבהליך הסינטיזה יוצב ה- $R$  המתאים  $R'$ .

ב. אם המודיפיקציה המבוצעת על פאזה ה-DSTFT היא קומוטטיבית עם המודיפיקציה המבוצעת על הערך המוחלט של ה-DSTFT אזי ניתן להחליף את גורם הכפל לתיקון הפאזה  $(-1)^K W_M^{-SRK}$  ושיחזור הפאזה  $(-1)^K W_M^{+SRK}$  עיני גורם כפל יחיד  $W_M^{S(R-R')K}$ . אם  $R=R'$  אזי ניתן להשמיט לחלוטין גורם תיקון זה ולבצע את המודיפיקציה ישירות על התמרת פוריה הדיסקרטית המתחסת לראשית הבלוק ולא לראשית הצירים.

ג. שיטה זו נקראת WOLA - WEIGHTED OVERLAP ADD - מכיון שהיא זריאציה של שיטת OVERLAP ADD המקורית כפי שהוצעה עיני ALLEN [32] - שיטה שאינה כוללת חלון סינטיזה. כאשר נבחר חלון סינטיזה מלבני שיטת ה-WOLA מתלכדת למעשה עם המודל המקורי של OVERLAP ADD.

עבור  $M > 1$  יש לבצע קיפול בזמן לסידרה לפני בצוע ה-DFT. בצוע פעולה זו שקול לפעולת STACK ADD על קטעי מידע באורך  $M$ . כתוצאה מפעולת ה-STACK ADD, בסיס הזמן של הסידרה שעוברת טרנספורמציה מכוון עפיי בסיס הזמן של חלון האנליזה והסינטיזה ולכן ניתן לחסוך את ההזזה הציקלית של  $M/2$  דגימות או את הכפל בגורם התיקון  $(-1)^K$ . (גורם התיקון  $W_M^{-nRK}$  עדיין דרוש לשם קבלת ה-DSTFT ביחס לראשית הצירים). תאור סכימתי של הליך זה, עפיי [36], מתואר בתרשים 3.8.



תרשים 3.8 - דיאגרמת בלוקים למימוש אנליזה, מודיפיקציה וסינטיזה של התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר כאשר חלונות האנליזה והסינטיזה ארוכים מאורך הטרנספורמציה ( $N > M$ ).

FIG 3.8 - MODIFIED IMPLEMENTATION SCHEME TO ACCOMMODATE ANALYSIS AND SYNTHESIS WINDOWS WHICH ARE LONGER THAN THE TRANSFORM BLOCK SIZE  $M$ .

לאחר בצוע המודיפיקציה מתבצע שיחזור פאזה ובצוע IDFT לסידרה באורך  $M$ . מכיון שעלינו לכפול סידרה זו בחלון סינטיזה באורך  $L = P \cdot M$  נבצע הרחבה מחזורית של  $M$  הדגימות שהתקבלו  $P$  פעמים ואחר נכפילן בחלון הסינטיזה לקבלת האות שפיי שיטת OVERLAP ADD.



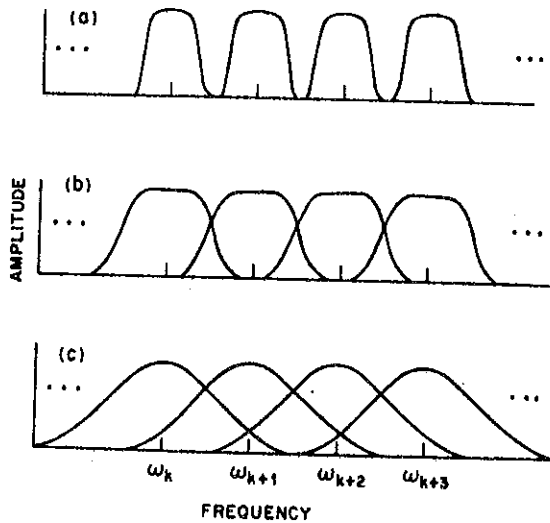
בעת תכנון מערכת המבוססת על DSTFT בידי המתכנן היכולת לקבוע מספר משתנים:

- M - מספר נקודות הדגימה בתדר.
- NA - אורך מסנן האנליזה.
- R - קצב הדגימה בזמן של האות בכל אחד מפסי התדר.
- NS - אורך מסנן הסינטיזה.
- $h(i) | i=0, \dots, NA-1$  - מסנן האנליזה.
- $f(i) | i=0, \dots, NS-1$  - מסנן הסינטיזה.

נבחן את השיקולים לקביעת כל אחד מפרמטרים אלו:

M - מספר נקודות הדגימה בתדר. זהו למעשה מספר המסננים ב-FILTER BANK כאשר עבור M זוגי רוחב הסרט של כל מסנן  $2 \frac{f_c}{M}$ . לכן הדרישה לרוחב הסרט מנתיבה את גודלו של M.

$h(i)$  - מסנן האנליזה הוא הפרמטר הקובע את התכונות הספקטרליות של האיבר  $\sum_k (SR)$  וכמו כן את אופי ה-FILTER BANK. באופן כללי ([35]), ניתן להבחין בשלושה סוגים של מערכי מסננים: ללא חפיפה, חפיפה קלה וחפיפה רבה, כמתואר בתרשים 3.9.



תרשים 3.9 - השוואה בין מערכי מסננים (A) ללא חפיפה; (B) חפיפה קלה; (C) חפיפה רבה.

FIG 3.9 - COMPARISON OF FILTER BANK DESIGNS; (A) NONOVERLAPPING; (B) SLIGHT AMOUNT OF OVERLAPPING; (C) SUBSTANTIAL AMOUNT OF OVERLAPPING.

מערך ללא חפיפה ניתן למימוש רק ע"י חלונות באורך  $M$ . חפיפה חלקית מתקבלת ע"י חלון HANNING או HAMMING ונבחר ביניהם ע"י התכונות הספקטרליות הדרושות ביציאת כל מסנו [37].

$R$  זהו קצב הדגימה בזמן של האות בכל אחד מפסי התדר המתקבלים כתוצאה מההתמרה או גודל הצעד בצצוע האנליזה. כדי לקיים את תנאי משפט הדגימה ובכך לאפשר שחזור האות בכל פס תדר בנפרד (שחזור אות בכל פסי התדר יחדיו ניתן לקבל גם בקצב דגימה הנמוך מקצב נייקוויסט - לדוגמא DFT המתאים למקרה  $R=N=M$ ), בהנחה שרוחב הסרט של מסנו האנליזה הוא  $B$ , אזי עלינו לדגום בקצב כזה כך שעבור כל אחד מפסי התדר יתקבלו  $2B$  דגימות ליחידת זמן. בהנחה ש  $M=l \cdot R$  ( $l$  - שלם חיובי) נקבל קצב דגימה בתדר של  $\frac{F_s}{R} = l \cdot \frac{F_s}{M}$  כלומר קצב הגדול פי  $l$  מהתמרת פוריה דיסקרטית דגילה (בה  $l=1$   $R=M$ ). אם נידאג ל-  $2B = l \cdot \frac{F_s}{M}$  מובטח לנו יצוג של האות ללא שגיאת קיפול.

לדוגמא ניבחן חלון HANNING  $0 \leq n \leq (M-1)$   $W(n) = 0.54 - 0.46 \cos\left(\frac{2\pi n}{M-1}\right)$   
 אזי ידוע ש -  $B = \frac{2F_s}{M}$  ולכן דרוש לקיים:  $l \cdot \frac{F_s}{M} = 2 \cdot \frac{2F_s}{M} \rightarrow l=4$   
 על כן  $R = \frac{1}{4} \cdot M$

$f(i)$ ,  $NS$  - מסנו הסינטיזה מטרתו לאפשר שחזור מדויק של אות שעבר DSTFTA. נפרד בין שני מקרים  $N_A > M$  ו-  $N_A \leq M$  (המקרה של  $N_A \leq M$  "אינו מעניין" כי תמיד ניתן להגדיר חלון  $h(i)$  באורך  $N_A = M$  ע"י תוספת אפסים).

עבור  $N_A = M$  - עד כה נהגו להשתמש רק בחלון סינטיזה מלבני עם  $N_B = N_A$  ובחרו מסנו אנליזה כזה שיבטיח שחזור מקורב של האות [30], במקרה זה הדרושות שעל מסנו האנליזה לקיים בתחום התדר היו:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} H(\ell^j(\omega - \omega_k)) = h(0) \quad \text{לכל } \omega: \quad (3.34)$$

עבור  $N_A > M$  הבעיה מסובכת יותר. מלאך [36] בחן מסנני סינטיזה שונים עבור מספר מסנני אנליזה כאשר המוטיבציה לבחירת המסננים היא היורדיסטית - על המסננים להיות מסנני אינטרפולציה הניתנים לבטוי מתמטי בצורה מפורשת, סימטריים והמקיימים

$$f(nR) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

כדי להעריך את "טיב" המסננים הוא בחן את הפונקציה:

$$\sum_{s=-\infty}^{\infty} f(n-sR) h(sR-n+PM) = V_n(P) \quad \text{לכל } n \quad (3.36)$$

והגדיר קריטריון טיב המבוסס על המרחק בין  $V_n(P)$  לבין  $\delta(P)$  שזהו התנאי (3.16) שעל המסננים לקיים על מנת להבטיח שחזור מדויק של האות.

בפיתוח שיטת ה-DSTFT נותרו עדיין מספר בעיות פתוחות כגון כיצד לתכנן מסנני סינטיזה נתונים כך שיקימו את משוואה (3.16), או כיצד יש לבצע סינטיזה אופטימלית במובן של מינימום שגיאה ריבועית לסידרת התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר שאינה סידרה חוקית? או כיצד יש לתכנן מערכת משולבת של אנליזה סינטיזה המבטיחה מערכת יחידה.

הבעיה השניה שהוצגה סינטיזה "אופטימלית" עלולה להראות כבעלת ענין תאורטי בלבד אולם לא כך הדבר, ה-DSTFT משמש בדיכ ככלי לשם ביצוע מודיפיקציה על האות (סינון לינארי/לא לינארי, כיווץ הרחבה, ערבול וכו') שנוח לממשה במישור התדר. במקרים אלו האות עובר התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר, ההתמרה שהתקבלה  $X_k(sR)$  עוברת מודיפיקציה ומתקבלת סידרה חדשה  $Y_k(sR)$  שעליה יש לבצע סינטיזה לקבלת  $\hat{x}(n)$ . בדיכ הסידרה החדשה  $Y_k(sR)$  אינה התמרת פוריה דיסקרטית חוקית ז"א כזו שניתן לבטאה ע"י (3.14), והבעיה כיצד לממש את הליך הסינטיזה בצורה אופטימלית. לשם כך, עלינו תחילה להגדיר קריטריון לאופטימליות ובחבר הקריטריון "מינימום שגיאה רבועית". כלומר ברצוננו לבצע הליך סינטיזה שיבטיח מינימום על רבוע המרחק בין התמרת פוריה הדיסקרטית לאחר בצוע המודיפיקציה (MODSTFT - MODIFIED DSTFT)  $Y_k(sR)$  לבין התמרת פוריה הדיסקרטית לזמן קצר של האות המשוחזר לאחר בצוע המודיפיקציה  $\{\hat{x}[n]\} = \hat{x}_k(sR)$ , DSTFT, ואם נסמו זאת בצורה מתמטית נקבל שברצוננו לקבל מינימום על  $D$  המוגדר באופן הבא:

$$D[\hat{x}(n), Y_k(sR)] = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{M-1} |\hat{x}_k(sR) - Y_k(sR)|^2 \quad (3.37)$$

לבעיה הראשונה לא נמצא עדיין פתרון כללי ז"א עבור מסנן אנליזה,  $M$  ו- $R$  נתונים עדיין אין שיטה שמצד אחד תגדיר מתי אין דרך לבצע סינטיזה כלשהי (לאו דווקא עפ"י שיטת WOLA) ומצד שני כאשר ניתן לבצע סינטיזה תיבנה מסנן סינטיזה בשיטת WOLA המבטיח את קיום (3.16) או לחילופין תציג דרך סינטיזה אחרת.

הבעיה השניה - סינטיזה אופטימלית נידונה עד כה רק ע"י GRIFFIN & LIM [38] עבור התמרת פוריה לזמן קצר רציפה STFT. הם הגדירו קריטריון שגיאה רבועית האנלוגי ל- (3.37) עבור התמרה רציפה בתדר:

$$D[x(n), Y_{\lambda}(SR, w)] = \sum_{S=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\hat{X}_{\lambda}(SR, w) - Y_{\lambda}(SR, w)|^2 dw \quad (3.38)$$

מתוך דרישה לקבלת מינימום של  $\sigma$ , והנחה שמסנו האנליזה  $h(i)$  הוא באורך  $L$  ואינו מתאפס בתחום  $0 \leq i \leq L-1$  הם קיבלנו שניתן לשחזר את  $x(n)$  עפ"י:

$$X(n) = \frac{\sum_{S=-\infty}^{\infty} h(SR-n) Y_{\lambda}(SR, n)}{\sum_{S=-\infty}^{\infty} h^2(SR-n)} \quad (3.39)$$

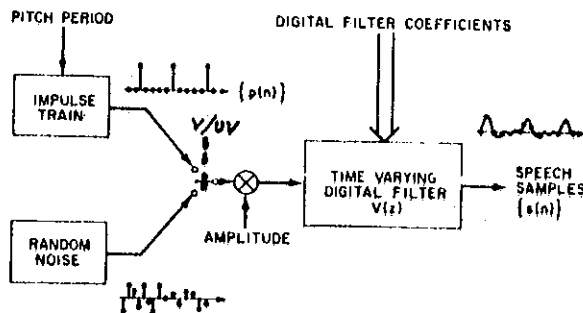
פרק זה סקר בקצרה את הבסיס התאורטי להצגת אות ע"י DSTFT, תאור שיטות למימוש אנליזה וסינטיזה ובחן בעיות פתוחות בתחום. בפרק הבא מתוארים מערבליים אנלוגיים המבוססים על DSTFT תוך פירוט האילוצים על דרגות החופש בתיכנון מערכת אנליזה וסינטיזה לשם קבלת מערבלי המבטיח סודיות, חסינות לפרמטרי ערוץ תקשורת ומימוש זול ופשוט.

4. ערבול אנלוגי באמצעות התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר

מעבלים אנלוגיים 4.1

מעבלים אנלוגיים בעזרת DSTFT הוצעו לראשונה ע"י ווינשטיין [10].  
בנסיונותיו הוא בצע אנליזת פוריה לזמן קצר (ללא תקון פאזת המקדמים - פעולה שלא היו מודעים לה בזמנו) עם חלון HANNING באורך  $N=128$  וגודל צעד של 32 דגימות, ערבל את מקדמי ההתמרה עפ"י מפתח אקראי ושחזר את האות. בנוסף לכך בהנחה שהאוזן אינה רגישה לפאזה הוא ערבל רק את הערכים המוחלטים של מקדמי ההתמרה, השמיט את הפאזה המקורית וכנה פאזה חדשה סינטטית המאפשרת את שידור אמפליטודות האות המעורבל; בכך היה נדמה לו שהוא הצליח גם להתגבר על בעית הסחת הפאזה של ערוץ הטלפון. כך במשחזר אין צורך לגלות את פאזת האות (מכיוון שזו פאזה מלאכותית) וניתן להסתפק בעוטפת הספקטראלית ואחר לבנות שוב את הפאזה המלאכותית. בניסויים שערך התקבל דבור בעל מובנות שלווה ברעש מחזורי ככד. במסקנות עבודתו הוא המליץ להמשיך ולחקור את הבעיה לצורך קביעת פרמטרי האנליזה ובחירת פאזה מלאכותית המנצלים את אי רגישותה של האוזן להפרעות פאזה לשם קבלת אות משחזר באיכות טובה יותר.

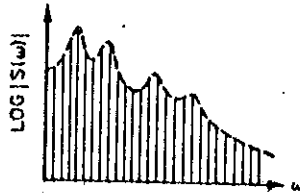
נבחן נקודות אלו על פי ההתפתחויות שחלו במחקר התמרת פוריה לזמן קצר והמבנה ההרמוני של הדבור הקולי. ניתן להציג את מערכת יצור הדבור בצורה סכמטית כמתואר בתרשים 4.1.



תרשים 4.1 - מודל יצור הדבור.

FIG 4.1 - A SPEECH PRODUCTION MODEL.

שני מקורות האחד מקור רעש לבן, והשני מקור הלמים כאשר מתג בורר ביניהם. האות עובר דרך מגבר ומסנן משתנה בזמן המתארים את מערכת מעבר הקול. קטעי הדבור שבהם מחובר מקור הרעש בכניסה נקראים דבור לא-קולי (UNVOICED SPEECH) וקטעי הדבור שבהם מחובר מחולל ההלמים נקראים דבור קולי (VOICED SPEECH). בקטעי הדבור הלא קולי אין חשיבות יתירה לבחירת פרמטרי האנליזה בעוד שבדיבור קולי לא כך הדבר. ציור 4.2 שלהלן מראה ספקטרום של קטע אות דבור קולי.



תרשים 4.2 - ערך מוחלט של ספקטרום של קטע דבור.  
FIG 4.2 - MAGNITUDE SPECTRUM OF A SPEECH SOUND.

ניתן לראות בברור שהדבור הקולי מורכב מהרמוניות כאשר ההרמוניה היסודית נקראת PITCH. לכן מעתה נתייחס לדבור הקולי כאל סידרת טונים בתדר הרמוניות ה-PITCH.

#### 4.2 חשיבות גורם הפאזה בערבול

לשם בחינת חשיבות הפאזה בהתמרת פוריה לזמן קצר (גורם שהושמט עיי ווינשטיין) ניבחנו את מקדמי התמרת פוריה לזמן קצר של טון בודד. המקדמים המתקבלים הם קומפלקסיים ונניצגם עיי ערך מוחלט ופאזה. פאזה המקדמים מורכבת מסכום שני איברים האחד מלמד על מקומו היחסי של חלון האנליזה ביחס לראשית הצירים והשני על מקומו של הטון ביחס למרכז התא. להמחשה נבחנו את המקדם ה- $k$  של התמרת פוריה של טון במרכז פס התדר ה- $k$  כלומר בתדר ספרתי של  $\Omega_k = \frac{2\pi}{M} \cdot k$  בתלות בזמן  $(A_k(SR) \quad S=0,1,\dots)$  כאשר האנליזה נעשתה עם חלון HAMMING באורך  $M=128$   $R=32-1$ . התוצאות המובאות להלן מתארות את הנסוי שבצע ווינשטיין ולכן אינן כוללות תקון פאזה עפיי CROCHIER [14].

$$A_k(0.32) = 1 \mid 0$$

$$A_k(1.32) = 1 \mid \frac{1.32}{128} \times 2\pi = 1 \mid \frac{\pi}{2}$$

$$A_k(2.32) = 1 \mid \frac{2.32}{128} \times 2\pi = 1 \mid \pi$$

$$A_k(3.32) = 1 \mid \frac{3.32}{128} \times 2\pi = 1 \mid \frac{3}{2}\pi$$

$$A_k(4.32) = 1 \mid \frac{4.32}{128} \times 2\pi = 1 \mid 0$$

וחוזר חלילה.

אם נניח שטון בתדר  $\omega$  לא נמצא במרכז התא היא אלא נמזר ממנו -  $\omega = \frac{2\pi}{M} (k - \Delta)$   
 ונניח שהגבר חלון האנליזה בתדר זה הוא  $\omega$  נקבל:

$$A_k(0.32) = \omega \mid 0$$

$$A_k(1.32) = \omega \mid \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{k - \Delta}{K}\right)$$

$$A_k(2.32) = \omega \mid \pi \cdot \left(\frac{k - \Delta}{K}\right)$$

$$A_k(3.32) = \omega \mid \frac{3}{2}\pi \cdot \left(\frac{k - \Delta}{K}\right)$$

$$A_k(4.32) = \omega \mid 2\pi \cdot \left(\frac{k - \Delta}{K}\right)$$

לכן טעותו הראשונה של ווינשטיין היתה בכך שהוא התעלם מגורם הפאזה. הוא בנה פאזה מלאכותית שהבטיחה מיבנה של OSTFT לאות המעורבל ובכך איפשרה את שידורו על הערוץ באמצעים אנלוגיים, אולם ההתעלמות מהפאזה האמיתית גרמה לאיבוד גורם הפאזה המלמד על מקומו היחסי של הטון ביחס למרכז התא, ועפ"י הפאזה המלאכותית כל הטונים שוחזרו למרכז התאים. פעולה זו שהיא לכאורה רק על פאזה שהאוזן אינה רגישה לה שינתה למעשה את תדרי הטונים הבונים את הדבור ובכך הרסה את המיבנה ההרמוני שלו וזה עיוות שהאוזן רגישה לו.

הבעיה השניה בהתיחסות לגורם הפאזה היא ההכרה שיש לבצע ערבול על מקדמי ה-OSTFT שעברו תקון פאזה על פי CROCHIER כלומר דגמים המתייחסים לראשית מערכת הצירים ולא לתחילת חלון האנליזה. נוכיח טענה זו בדוגמא הבאה: נבחן ערבול של טון בתדר  $\omega$  הנמצא בפס התדר ה- $k$  כאשר הערבול כולל רק החלפה בין מקדמי הפס ה- $k$  וה- $J$ .

נסמן:

- $\underline{PH}_K(n)$  - פאזה הדגימה ה- $n$  של המקדם ה- $K$  ב-DSTFT.
- $\overline{PH}_K(n)$  - פאזה הדגימה ה- $n$  של המקדם ה- $K$  ב-DSTFT לאחר שנוי נקודת היחוס לראשית הצירים לפי CROCHIER.
- $\underline{\Delta}_K(n)$  - הפרש הפאזות של המקדם ה- $K$  בין הזמנים  $n$  ו- $n+1$ .
- $\overline{\Delta}_K(n)$  - הפרש הפאזות המיוחסות לראשית הצירים לפי CROCHIER של המקדם ה- $K$  בין הזמנים  $n$  ו- $n+1$ .
- $L_K$  - הסטיה של התדר  $\omega$  (תדר אנלוגי) ממרכז התא ה- $K$  מנוזרמלת לרוחב פס התדר.  

$$L_K = \frac{\omega - \frac{F_s}{N} \cdot K}{\frac{F_s}{N}}$$

מכיון שהטון  $\omega$  נמצא בפס התדר ה- $K$  נקבל  $-1/2 < L_K < 1/2$

נבחר את פעולת הערבול  $A_K \Leftrightarrow A_J$  כאשר הטון ב- $A_K$  עם סטיה  $L_K$  ונבחר את הסטיה המתקבלת  $L_J$  כאשר הערבול מתבצע עם תקון פאזה ובלעדיו.

$$\underline{PH}_K(n) = \left( \left( \overline{PH}_K(n) - 2\pi \cdot K \cdot n \cdot \frac{R}{N} \right) \right)_{2\pi} = \left( \left( \overline{PH}_K(n) - \left( 2\pi \cdot K \cdot n \cdot \frac{R}{N} \right) \right) \right)_{2\pi} \quad (4.1)$$

$$\underline{PH}_K(n+1) = \left( \left( \overline{PH}_K(n+1) - 2\pi \cdot K \cdot (n+1) \cdot \frac{R}{N} \right) \right)_{2\pi} = \left( \left( \overline{PH}_K(n+1) - \left( 2\pi \cdot K \cdot (n+1) \cdot \frac{R}{N} \right) \right) \right)_{2\pi} \quad (4.2)$$

$$\underline{\Delta}_K(n) = \left( \left( \overline{PH}_K(n+1) - \overline{PH}_K(n) \right) \right)_{2\pi} = 2\pi \cdot L_K \cdot \frac{R}{N} \quad (4.3)$$

תוצאת (4.3) נובעת מתזוזת הוקטורים  $\omega$  ווקטור מרכז התא במהירויות שונות ובדיקת הפרש הפאזה ביניהן כל  $R/N$  סיבוב. נציב את (4.1) ו- (4.2) לתוך (4.3)

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot L_K \cdot \frac{R}{N} &= \left( \left( \overline{PH}_K(n+1) - \overline{PH}_K(n) \right) \right)_{2\pi} = \\ &= \left( \left( \overline{PH}_K(n+1) - \left( 2\pi \cdot K \cdot (n+1) \cdot \frac{R}{N} \right) \right)_{2\pi} - \overline{PH}_K(n) + \right. \\ &+ \left. \left( 2\pi \cdot K \cdot n \cdot \frac{R}{N} \right) \right)_{2\pi} = \left( \left( \left( \overline{PH}_K(n+1) - \overline{PH}_K(n) \right) \right)_{2\pi} - \right. \\ &\left. - \left( 2\pi \cdot K \cdot \frac{R}{N} \cdot (n+1-n) \right) \right)_{2\pi} = \end{aligned}$$

$$2\pi \cdot L_K \cdot \frac{R}{N} = \left( \left( \left( \overline{PH}_K(n+1) - \overline{PH}_K(n) \right) \right)_{2\pi} - \left( 2\pi \cdot K \cdot \frac{R}{N} \right) \right)_{2\pi} \quad (4.4)$$

עפ"י (4.4) נקבל:

$$\underline{\Delta}_K(n) = \left( \left( \overline{PH}_K(n+1) - \overline{PH}_K(n) \right) \right)_{2\pi} = \left( \left( 2\pi \cdot \frac{R}{N} \cdot (K + L_K) \right) \right)_{2\pi} \quad (4.5)$$

באופן דומה ניתן לפתח עבור התא ה- $J$  וסטיית תדר של  $L_J$  ולקבל:

$$\underline{\Delta}_J(n) = \left( \left( 2\pi \cdot \frac{R}{N} \cdot (J + L_J) \right) \right)_{2\pi}$$



בערבול לאחר תקון פאזה הדרישה היא למעשה  $\Delta_J(n) = \Delta_K(n)$  וברור שעל פי (4.3) נקבל  $L_K = L_J$  כלומר המקום היחסי של הטון בתא ה- $k$  עבר לתא ה- $j$  ללא שנוי. בערבול ללא תקון פאזה אנו דורשים למעשה  $\Delta_J(n) = \Delta_K(n)$  ולכן נקבל:

$$((2\pi \cdot R/N \cdot (j + L_J))) = ((2\pi \cdot R/N \cdot (k + L_K))) \quad (4.6)$$

אם נפתח, נקבל שדרישה זו שקולה לדרישה  $((R/N \cdot (j + L_J)))_1 = ((R/N \cdot (k + L_K)))_1$

$$((R/N \cdot (k - j + L_K - L_J)))_1 = 0$$

$$R/N \cdot (k - j + L_K - L_J) = m$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

$$L_J = -k - j + L_K + m \cdot N/R$$

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

כלומר התקבלו טונים בכל הספקטרום במרחקים של  $N/R$  האחד מהשני כאשר הקרוב ביותר למרכז התא ה- $j$  הוא ב- $L_J$ .

$$\hat{L}_J = ((k - j))_{N/R} + L_K \quad (4.7)$$

עוצמתם של הטונים נקבעת על פי מסנו ה-L.P. בסינטיזת האות.

נבחן שני מקרים פרטיים של ערבול ללא תקון פאזה.

א.  $k=10$ ,  $j=40$ ,  $R/N=1/4$ ,  $L_K=0$  ולכן  $((k-j))_{N/R} = 2$ . במקרה זה ה- $L_J$

המתקבלים הם:  $L_J = \pm 2, \pm 6, \pm 10, \dots$

ולכן הטון לאחר הערבול יופיע בתאים  $B_J$ :

$$B_J = \dots, 30, 34, 38, 42, 46, 50, \dots$$

כלומר קיבלנו שהטון שהיה בתא 10 כלל לא עבר לתא 40 ולכן ברור ששיחזור המחזיר תוכן תא מטי 40 לתא מטי 10 לא יוכל לשחזר את הטון.

ב.  $k=10$ ,  $j=30$ ,  $R/N=1/4$  ונתון  $L$  ולכן  $((k-j))_{N/R} = 0$  במקרה זה

ה- $L_J$  המתקבלים הם:  $L_K \pm 4, L_K \pm 8, L_K$

ולכן הטון לאחר הערבול יופיע בתאים  $B_J$ :

$$B_J = \dots, 22 + L_K, 26 + L_K, 30 + L_K, 34 + L_K, 38 + L_K, \dots$$

מסנו הסינטיזה ישאיר רק את הטון ב- $30 + L_K$  וכך למעשה השגנו ערבול "נכון" ללא "יתרון הפאזה".

המחיר שיש לשלם בעבור החסכון המושג עקב אי תיקון הפאזה הוא בהקטנת מספר מפתחות הערבול האפשריים. נניח שהתמרת פוריה מתבצעת עם  $M=128$  ו- $R/N=1/4$  אזי במקרה של ערבול לאחר תיקון פאזה מתקבלים 64 מפתחות ערבול שונים, ואילו ללא תיקון פאזה רק 4x16 מפתחות שונים. נזכיר זאת:

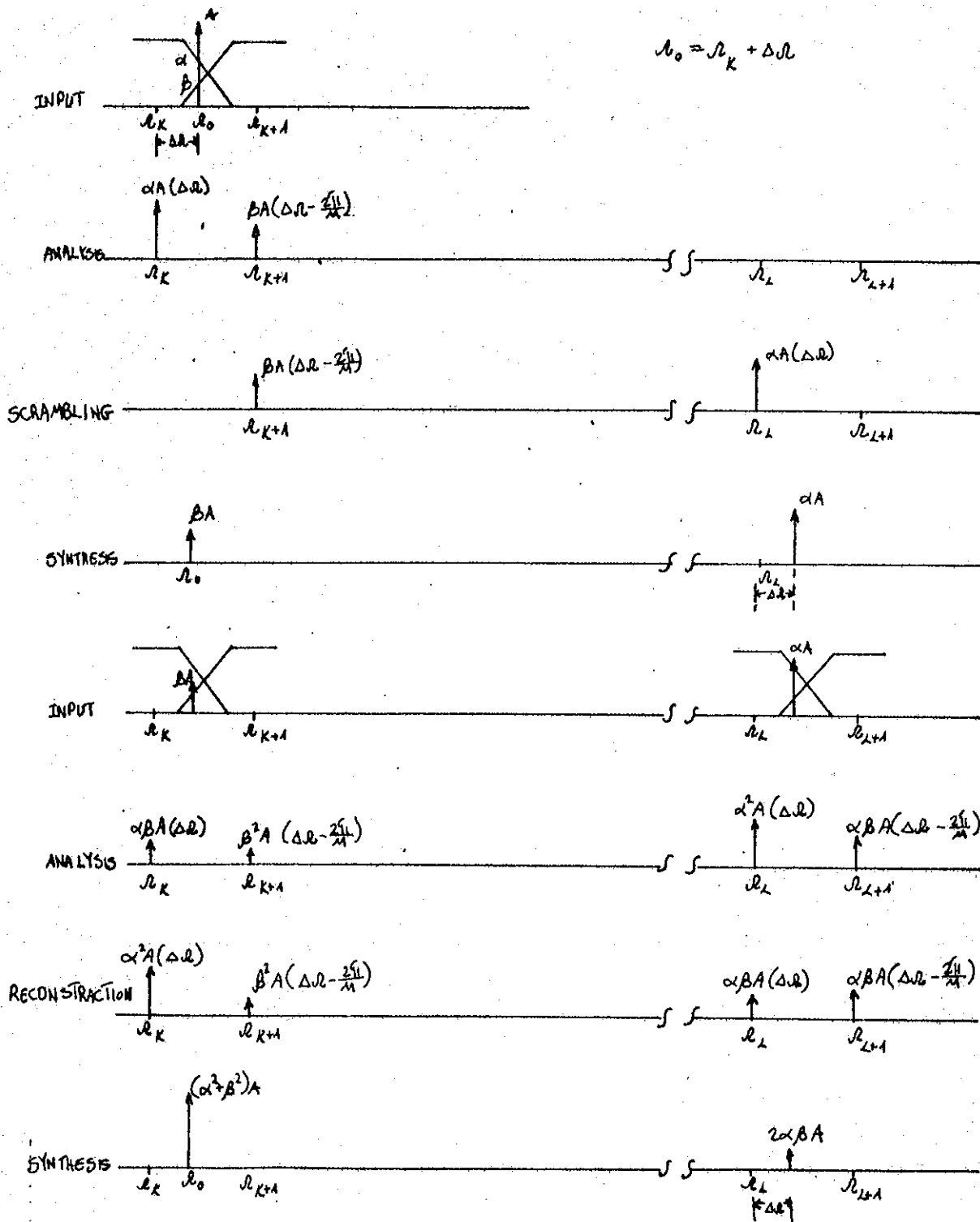
הבעיה שקולה לסדור 64 איברים. במקרה הראשון זהו סידור 64 איברים ללא הגבלות ואז לראשון - 64 אפשרויות, לשני - 63, לשלישי - 62 וכי סה"כ 64 אפשרויות. במקרה השני לראשון יש - 16 אפשרויות (רק מרחקים שהם כפולות של  $N/R$  אפשריים) לשני - 16 אפשרויות לשלישי ולרביעי גם 16 אפשרויות, לחמישי 15 אפשרויות לשישי 15 אפשרויות וכי סה"כ 4x16 אפשרויות.

רוחב הסרט של מסנון האנליזה

4.3

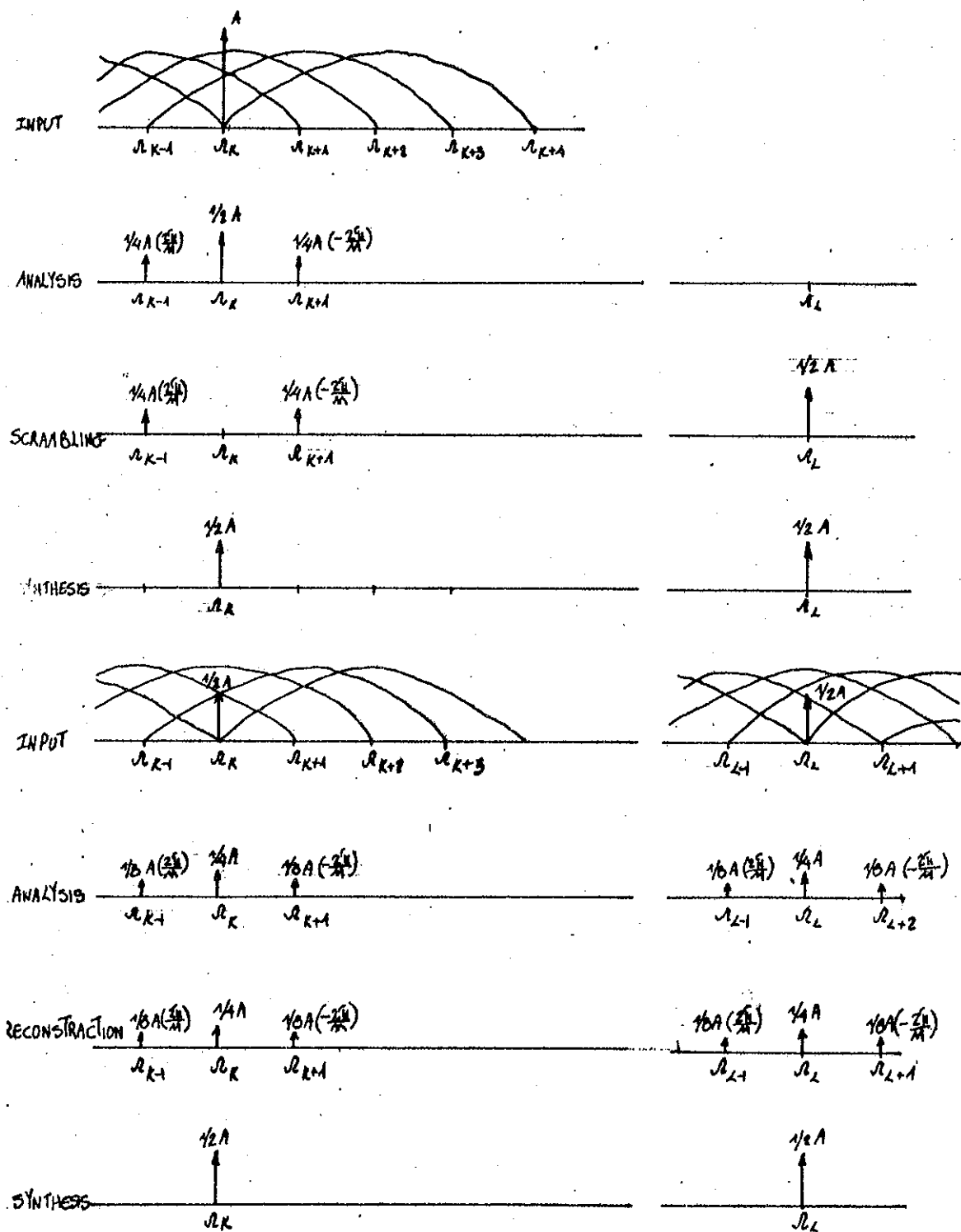
גורם נוסף שיש לשים עליו דגש הוא רוחב הסרט של חלון האנליזה בהתמרת פוריה לזמן קצר. ניתן להמחיש את חשיבות גורם זה בשתי דרכים. הראשונה כוחנת את המושג ערבול. מבחינה פיסיקלית ברצוננו לערבול טונים שונים של דבור, כלומר אם קיימת הרמוניה ב- $f_1$  ברצוננו להעבירה ל- $f_2$  (כדי להקטין את מובנות הדבור המעורבל רצוי ש- $f_2$  לא יהווה הרמוניה של תדר ה-PITCH) מבצעים זאת ע"י העברת מקדם פס התדר ש- $f_1$  נמצא בו למקום של מקדם פס התדר ש- $f_2$  נמצא בו. כאשר מסנון האנליזה הוא בעל רוחב ספקטרלי הגדול מ- $\frac{2f_c}{M}$  (למשל חלון HAMMING) אזי  $f_1$  מיוצג ע"י יותר ממקדם אחד של התמרת פוריה ולכן ערבול שיעביר רק אחד המקדמים לא יהיה שקול להעברת הטון - וכך לא התקבלה הפעולה המבוקשת.

גישה אחרת. היוריסטית, לתאור הערבול מובאת להלן. שני התרשימים הבאים מתארים תהליך ערבול של טון בתדר  $\Omega_0$  הנמצא בפס התדר ה- $k$  א והערבול כולל רק החלפה בין התאים א ו- $L$ . בתרשים 4.3 מתואר ערבול כאשר האנליזה מתבצעת עם מסנון מעשי בעל רוחב פס של  $\frac{2f_c}{M}$  (מעשי פרושו שזהו לא L.P.F אידיאלי עם הגבר 1 בתחום המעבר, ס - בתחום החסימה ותחום מעבר בעל רוחב זניח), ובתרשים 4.4 אנליזה עם מסנון HAMMING בעלת רוחב פס הגדול מ- $\frac{2f_c}{M}$ . בדוגמה הראשונה מוצג טון הנמצא קרוב לתחום המעבר ובשניה הטון במרכז התא. (המספרים בסוגריים אלו המרחקים בין התדר הספרתי של הטון והתדר הספרתי של מרכז הערוץ).



תרשים 4.3 - טרכול טון עם חלון אנליזה צר טרט.

FIG 4.3 - TONE SCRAMBLING WITH NARROW BAND ANALYSIS WINDOW.



תרשים 4.4 - ערבול טון עם חלון אנליזה רחב סרט.

FIG 4.4 - TONE SCRAMBLING WITH WIDE BAND ANALYSIS WINDOW.

מהדוגמאות ברורה הדרישה למסנו אנליזה בעל רוחב סרט של  $\frac{2\pi}{M}$ , תחום מעבר צר ככל האפשר, וניחות מירכי מחוץ לתחום המעבר. בדוגמא הראשונה מסנו האנליזה מבטיח  $\alpha + \beta = 1$  ולכן נקבל:

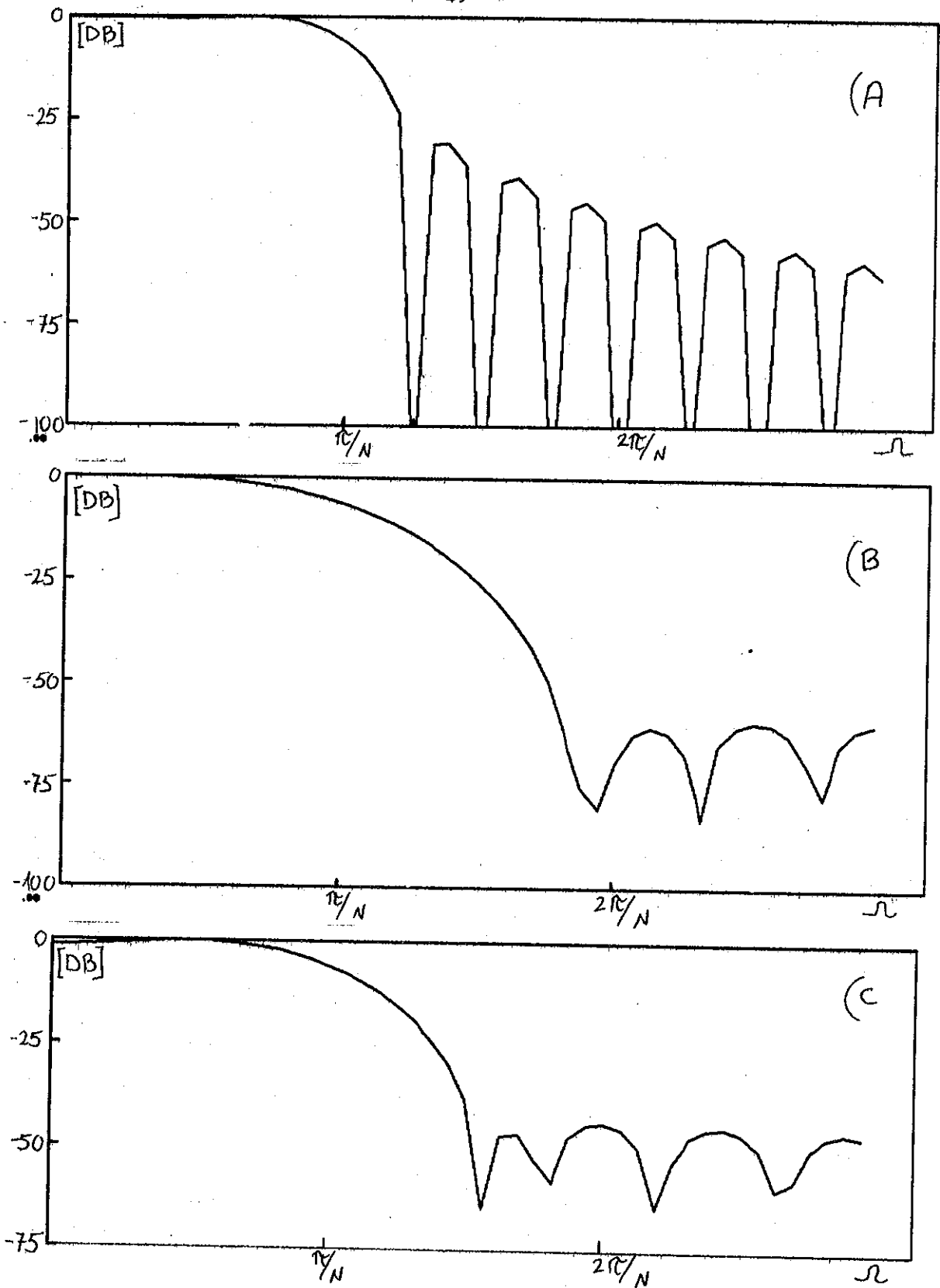
$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \quad (4.8)$$

באות המשוחזר שני טונים האחד בתדר האות המקורי באמפליטודה של  $\alpha^2 + \beta^2$  והשני בתדר  $\omega_L + \Delta\omega$  באמפליטודה  $2\alpha\beta$ . (במסנו L.P.F אידיאלי נקבל  $\alpha = 1 - \beta$ ). בדוגמא הוצג טון קרוב לתחום המעבר מכיון שזהו המקרה הגבולי, בחוד שטון במרכז התא ניתן להציגה באותה שיטה אלא שהפעם ברור שנקבל  $\alpha \rightarrow 1$  ו-  $\beta \rightarrow 0$  ולכן זהו מקרה פשוט. בדוגמא השניה למרות שנבחר טון במרכז התא, לאחר הערבול עוצמתו קטנה בחצי וכמו כן נוסף טון בתדר  $\omega_L$  באותה עוצמה.

בניסויים שערכתי השוויתי בין מספר חלונות (ידועים וכאלו שתכננתי בעזרת שיטת "REMEZ EXCHANGE" [39] לתכנון מסננים אופטימליים). תרשים 4.5 כולל תאור שלוש תגובות חדר של חלונות שנבחנו כאשר הראשון זהו חלון מ\* המוגדר ב-[36] ונתון ע"י:

$$h_m(n) = \begin{cases} \frac{M}{N} \sin(\pi \cdot n/M) \cot(\pi \cdot n/N) & |n| \leq N/2 \\ 0 & |n| > N/2 \end{cases} \quad (4.9)$$

והשני והשלישי אלו חלונות שלא ניתנים לכטוי בצורה אנליטית.



תרשים 4.5 - חגובת חדר של מסנני אנליזה; (A) מסנן מ,

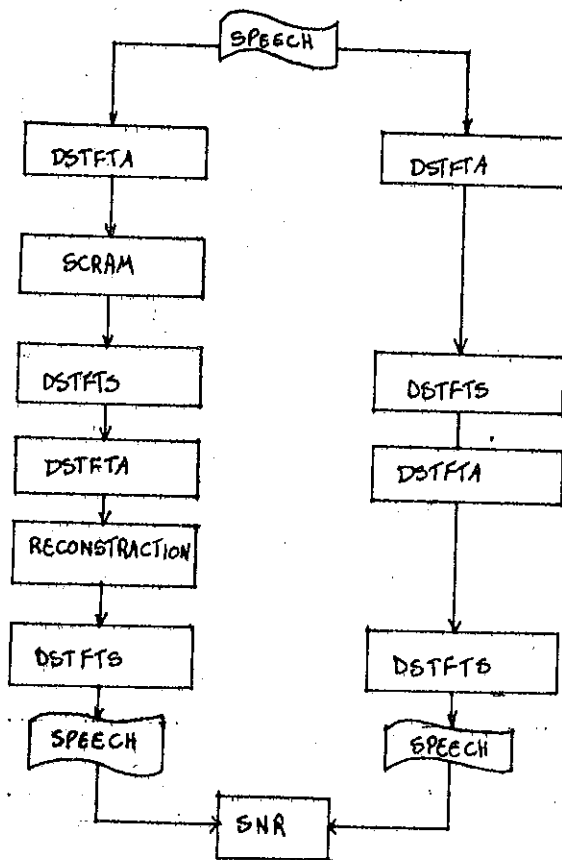
(B) מסנן II, (C) מסנן III.

FIG 4-5 - FREQUENCY RESPONSE OF ANALYSIS FILTERS;  
 (A) M FILTER, (B) FILTER NO. II, (C) FILTER NO. III.

כדי לבחון את השפעת חלון האנליזה הושוו קבצי דבור שעברו עירבול לקובץ המקורי כאשר האנליזה כל פעם מתבצעת בעזרת חלון אחר והסינטיזה בעזרת מסנו סינטיזה.  $x/m$  הנחון ע"י:

$$f(n) = \begin{cases} \sin(\pi \cdot n/m) / (\pi \cdot n/m) & |n| \leq m/2 \\ 0 & |n| > m/2 \end{cases} \quad (4.10)$$

מכיון שמערכת אנליזה סינטיזה כאשר מסנו האנליזה ארוך ממספר הדגימות בתדר אינה מערכת יחידה ותלויה במסננים, הדבור המשוחזר הושווה לדבור שעבר פעמיים אנליזה וסינטיזה וכך נבנתה רק השפעת הערבול כפי שניתן לראות בתרשים 4.6.



תרשים 4.6 - תרשים זרימה של מערכת לחישוב SNR עבור דבור משוחזר (לאחר ערבול באמצעות DSTFT).

FIG 4.6 - FLOWCHART OF A SYSTEM CALCULATING SNR FOR RECONSTRUCTED SPEED (AFTER SCRAMBLING BY MEANS OF DSTFT).

תוצאות ההרצות מרוכזות בטבלה הבאה:

SNRFL	SNRFL	SNRT	חלון אנליזה
21.46 DB	29.17 DB	12.25 DB	חלון מ
17.92 DB	26.49 DB	10.27 DB	חלון מסי II
17.92 DB	26.39 DB	10.11 DB	חלון מסי III

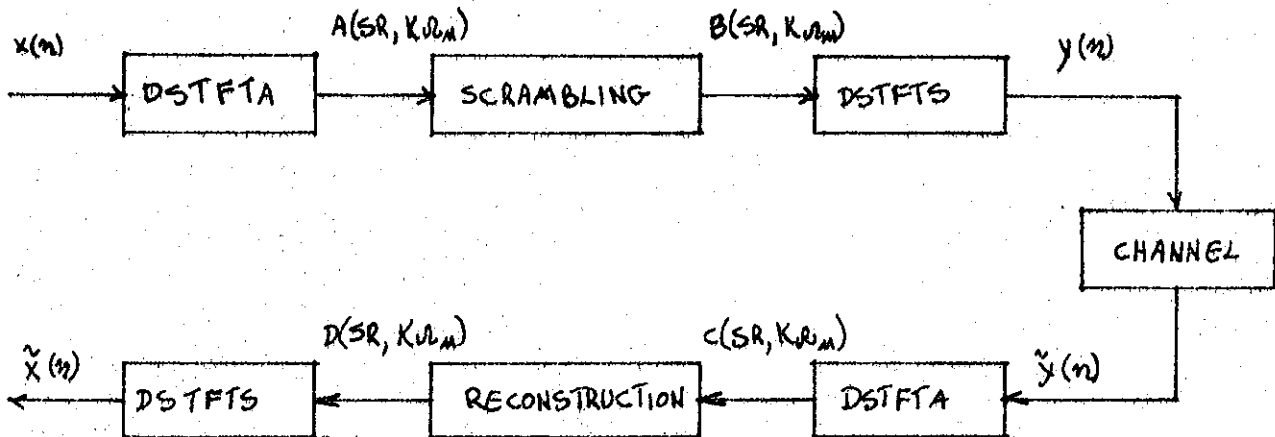
טבלה 4.1 - SNR עבור דבור משוחזר בתלות בחלון האנליזה.

TABLE 4.1 - SNR FOR RECONSTRUCTED SPEECH DEPENDENT ON ANALYSIS WINDOW

חלון מ הוא החלון הטוב ביותר אולם הוא אינו טוב בהרבה מהחלונות האחרים מצד אחד, ומצד שני גם בו איכות הדבור המשוחזר אינה טובה (נהוג להגדיר איכות טובה כאשר  $(SNR[DB] > 27)$ ). מסקנות אילו חיבו את המשך המחקר בנסיון לגלות מדוע נפגמת איכות הדבור.

4.4 סיטיזה ואנליזה של DSTFT כמערכת יחידה

תאור סכמתי של הליך הערבול והשחזור מופיע בתרשים 4.7.

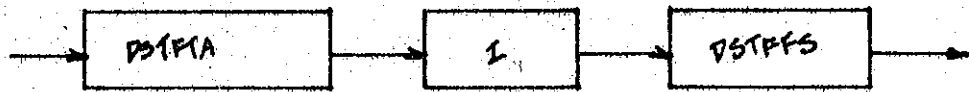


תרשים 4.7 - דיאגרמת בלוקים לערבול באמצעות DSTFT.

FIG 4.7 - BLOCK DIAGRAM OF SCRAMBLING BY MEANS OF DSTFT.

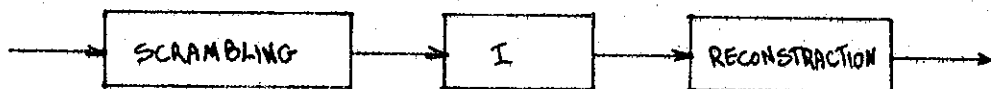


ברצוננו לקבל עבור ערוץ שקוף (ערוץ המהווה מערכת יחידה - I) שחזור מדוייק של האות  $x(n) = \hat{x}(n)$ . מכיון שידועים תנאים שעל מערכת אנליזה וסינטיזה של התמרת פורייה לזמן קצר, המוצגת בתרשים 4.8, לקיים על מנת שתהווה מערכת יחידה [34],



תרשים 4.8 מערכת אנליזה וסינטיזה של DSTFT.  
FIG 4.8 - DSTFT ANALYSIS AND SYNTHESIS SYSTEM.

וכמו כן מערכת הערבול והשחזור - המוצגת בתרשים 4.9



תרשים 4.9 - מערכת ערבול ושחזור.  
FIG 4.9 - SCRAMBLING AND RECONSTRUCTION SYSTEM.

נבנת כך שתהווה מערכת יחידה, די לדרוש שהמערכת סינטיזה אנליזה המופיעה בתרשים 4.10



תרשים 4.10 - מערכת סינטיזה ואנליזה של DSTFT.  
FIG 10 - DSTFT SYNTHESIS AND ANALYSIS SYSTEM.

תהווה מערכת יחידה לכל אות בכניסתה. מכיון שהסינטיזה מתבצעת על אות שהתמרתו עברה מודיפיקציה בעיה זו כבר אינה בעיה סינטיזה רגילה אלא סינטיזה של MDSTFT, בעיה שעד כה לא נמצא לה פתרון סגור.

בנסיון לשפר את בצועי המעגל האנלוגי הופעל אלגוריתם איטרטיבי לקבלת סינטיזה אופטימלית עבור MDSTFT, כאשר קריטריון הטיב הוא מינימום שגיאה ריבועית על ערך מוחלט של המקדמים [40]. האלגוריתם שנבחו הוצע ע"י GRIFFIN & LIM [38] והוא מבטיח קבלת מינימום על ס המוגדר:

$$D = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (|\hat{X}_\lambda(SR, \omega)| - |Y_\lambda(SR, \omega)|)^2 d\omega \quad (4.11)$$

$\hat{X}_\lambda(SR, \omega)$  זוהי התמרת פוריה לזמן קצר של האות שהתקבל בסינטיזה.  
 $Y_\lambda(SR, \omega)$  זהו אות הכניסה - התמרת פוריה לזמן קצר לאחר מודיפיקציה.

הפעלת האלגוריתם על שתי הסינטיזות במעגל, אחת לאחר הערבול והשניה לאחר השחזור לא הביאה לשפור המקווה ואיכות הדבור נשארה נמוכה. בכל אחת מהסינטיזות האלגוריתם הופעל כ-50 פעם, עד שהשפור ב- $\sigma$  עקב הרצה נוספת היה קטן מ- $10^{-3}$   $\sigma$ . בהצעת האלגוריתם ב- [38] מתוארת גם כן התכנסות מהירה בחמישים ההרצות הראשונות ולאחר מכן  $\sigma$  מגיע כמעט למינימום. האלגוריתם לא התאים מכיון שהוא התעלם לחלוטין מגורם הפאזה שזהו גורם שיש להתחשב בו בבעיה הנדונה.

#### 4.5 השפעת פרמטרי ערוץ תקשורת

נבחן את חסינותם של מערבליים המבוססים על DSTFT לשלושה פרמטרים המאפיינים ערוץ: שגיאת סינכרון - השקולה לערוץ עם פאזה לינארית, עקום ניחות, והסחת פאזה לא לינארית.

הערבול ע"י DSTFT אמור להיות חסין לשגיאות פאזה לינאריות. ניתן לראות זאת ע"י בחינת התמרת פוריה כמעריך מסננים שתפוקת כל אחד מהם דגומה בקצב ניקווויסט המתאים לו, כך שכל זוג מסנני אנליזה סינטיזה מהווה מערכת "עצמאית". מכיון שפעולת הערבול היא פרמוטציה של תפוקת המסננים נראה ששגיאות סנכרון לא ישפיעו על איכות הדבור המשוחזר. ניתן להוכיח טענה זו מבחינה מתמטית בצורה מדוייקת והדבר מופיע במאמרו של LEE [13]. נסויים שערכתי מאשרים שהשיטה אכן חסינה לפאזה לינארית יחסית למערבליים בתחום הזמן אולם לא באופן מוחלט. הטבלה שלהלן מציגה את תוצאות אחד הנסויים:

SNRFN	SNRFL	SNRT	ערוץ
21.46DB	29.17DB	12.25DB	ללא השהייה
17.6DB	27.53DB	-1.8DB	השהייה של 15 דגמים

טבלה 4.2 - SNR עבור דבור משוחזר לאחר מעבר ערוץ עם השהייה קבועה.

TABLE 4.2 - SNR FOR RECONSTRUCTED SPEECH AFTER PASSING THROUGH A CHANNEL WITH CONSTANT DELAY.

בשני המקרים האנליזה התבצעה בעזרת חלון  $\mu$  והסינטיזה עם חלון  $\sin(x)/x$ . יש להדגיש שבמקרה השני ה SNR חושב ביחס לאות הדבור המקורי שעבר אותה השהייה.

ניתן להתגבר על הניחות בקצוות התחום ע"י ערבול מקדמי התמרה המיצגים את פסי התדר שבתחום המעבר בלבד. עקב פעולה זו קטן אומנם מרחב מפתחות הערבול האפשריים, אולם קטן גם הסכוי שמידע יואבד עקב ניחות הערוץ.

בנסיון להתגבר על בעיות עקום הפאזה הלא לינארי של ערוץ נבחנה שיטה הכוללת ערבול רק של ערכים מוחלטים של מקדמי ההתמרה והשארת הפאזות ללא ערבול. שיטה זו שנשמנה ערבול M כפי שהתברר אכן רגישה פחות מהערבול הרגיל הכולל גודל ופאזה - M&PH, כפי שניתן לראות בטבלה הבאה המתארת איכות דבור משוחזר בשתי שיטות ערבול ללא או לאחר מעבר ערוץ עם G.S. נתון. הערוץ שנבחר הוא FGO1 - הערוץ עם השהיית החבורה הגרועה ביותר המותרת עפ"י תקן CCITT, ומחואר בתרשים 2.12.

SNRFN	SNRFL	SNRT	ערוץ	שיטת הערבול
21.46DB	29.17DB	12.25DB	אין	M&PH
14.63DB	23.60DB	-2.32DB	FG01	M&PH
11.12DB	18.84DB	0.94DB	אין	M
11.33DB	20.31DB	0.40DB	FG01	M

טבלה 4.3 - SNR עבור דבור משוחזר, עפ"י שתי שיטות ערבול ולאחר

מעבר ערוץ עם השהיית חבורה נתונה.

TABLE 4.3 - SNR FOR RECONSTRUCTED SPEECH, DEPENDING ON TWO SCRAMBLING METHODS AFTER PASSING THROUGH A CHANNEL WITH CERTAIN GROUP DELAY.

איכות הדבור המשוחזר המתקבלת בערבול M נמוכה מזו המתקבלת בערבול M&PH ולכן שכרה של השיטה יצא בהפסדה.

ההכרה שסינטיזת MDSTFT הינה היעקב אכילסי" בבניית מערכת ערבול המבוססת על התמרת פוריה לזמן קצר, הביאה להתעמקות נוספת בבעיה זו. נסיון לפתור את הבעיה על פי הדרכים המקובלות לתאור אנליזה וסינטיזה לא עלה יפה ולכן פותחה גישה חדשה - גישה אלגברית המאפשרת שמוש בכלים חדשים לשם פתרון הבעיה. בפרקים הבאים תפורט השיטה ובפרק 9 השלכותיה לגבי מערבלים אנלוגיים.

5. הגישה האלגברית לתאור שיטות מקובלות לאנליזה וסינטיזה של DSTFT

5.1 הקדמה

מכיון שהגישה שאציג לנתוח אנליזה וסינטיזה של התמרת פוריה לזמן קצר הינה אלגברית ומתבססת על מטריצות שעבור מסננים מעשיים ( $N=512$ ) עלולות להגיע למימדים של  $2048 \times 992$ , מירב הדוגמאות המובאות הן עבור מסננים קצרים ולא מעשיים כגון  $N=6$  ומטרתן רק המחשה של הבעיות. כמו כן מכיון שכתיבה מפורשת של פעולות בין ועל מטריצות (כגון כפל, חבור, היפוך וכ"ו) דורשות מספר  $\Sigma$  ואינדקסים, וסיבוכיות הכתיבה, ויחד עם זאת הקושי בהבנה, עולים ככל שמתפר המטריצות המשחתפות בפעולה גדול, העדפתי בדיכ להציג את הבעיות ואת דרך פתרונן - תחילה ע"י דוגמא ורק לאחר מכן ע"י הוכחה מתמטית.

5.2 אנליזת התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר - DSTFTA

ניתן לבחון את אנליזת אות לפי התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר כפעולה אלגברית של מכפלת מטריצת אנליזה [C] בוקטור אות הכניסה  $x$  לקבלת וקטור  $b$  - וקטור התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר של אות הכניסה  $x$  כלומר:

$$[C] \cdot x = b \tag{5.1}$$

מידעת אופיה של אנליזת ה-DSTFT ברור שנצפה לקבלת [C] מטריצה מלבנית  $M \times M$ : כאשר  $M$  כמו כן ניתן לפרק את C למכפלת שלוש מטריצות. עפ"י (5.2) או (5.3),

$$[C] = [F][P][A] \tag{5.2}$$

$$[C] = [Q][F][A] \tag{5.3}$$

בהתאם לאופן התאמת בסיס הזמן של סידרת ה-DSTFT המקבלת.  $[C]=[F][P][A]$  מתאר ביצוע סיבוב ציקלי לכל סידרה לפני ביצוע ה-DFT, ו- $[C]=[Q][F][A]$  מתאר החטת פאזה לינארית מסידרת ה-DFT שהתקבלה.

[F] - זו מטריצת התמרת פוריה, מטריצה BLOCK DIAGONAL, כאשר כל בלוק [W] הוא בגודל  $M \times M$  ( $M$  = מספר נקודות הדגימה בתדר של האות) והוא מטריצת התמרת DFT כלומר:

$$w_{ik} = \exp[-j \frac{2\pi}{M} i k] \quad \begin{matrix} i=0, 1, \dots, M-1 \\ k=0, 1, \dots, M-1 \end{matrix} \quad (5.4)$$

[A] זו מטריצת כפל בחלון אנליזה ופרישת האות. היא לוקחת N נקודות מתוך  $\underline{x}$  וכופלת אותן בחלון אנליזה; אם  $M=N$  אזי הסידרה המתקבלת "מוכנה" לבצוע התמרת פורייה, אולם במקרה ש-  $M < N$  כלומר מספר נקודות הדגימה בתדר קטן מאורך המסנו, מטריצה [A] "מכינה" גם סידרה באורך M ע"י בצוע קיפולים בזמן (STACK ADD). כעבור R נקודות נילקחת שוב סידרה באורך N מוכפלת בחלון וממנה מוכנה סידרה באורך M וחוזר חלילה. [P] - זו מטריצת סיבוב, מטריצה BLOCK DIAGONAL כאשר כל בלוק  $[P^S]$  הוא בגודל  $M \times M$  וזוהי מטריצת סיבוב ציקלי של כל אחת מהסדרות לשם קבלת ה-DSTFT המותאם לראשית מערכת הצירים. כלומר:

$$P_{i,k}^S = \begin{cases} 1 & ((k-i))_M = ((-SR))_M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\begin{matrix} i = 0, 1, \dots, (M-1) \\ k = 0, 1, \dots, (M-1) \end{matrix}$$

[Q] - זו מטריצת פאזה לינארית, מטריצה אלכסונית כאשר וקטור האלכסון מורכב מוקטורים  $q^S$  באורך M המשורשרים ליצירת האלכסון. כל וקטור כזה יהיה:

$$q_k^S = W_M^{-SRk} \quad (5.6)$$

לעיתים אנו נדרשים לבצע גם החממת בסיס הזמן של חלון האנליזה. גם במקרה זה ניתן לבצע את התיקון ע"י הזזה ציקלית בזמן, ותהליך האנליזה יראה כמו ב-(5.1) כאשר מטריצת האנליזה [C] נתונה ע"י:

$$[C] = [F][U][P][A] \quad (5.7)$$

או ע"י תקון פאזה במישור התדר:

$$[C] = [V][Q][F][A] \quad (5.8)$$

[U] - הינה מטריצת סיבוב ציקלי ב- $M/2$  נקודות, מטריצה BLOCK DIAGONAL כאשר כל בלוק  $[U^S]$  הוא בגודל  $M \times M$  זנתון ע"י:

$$u_{ik}^S = \begin{cases} 1 & ((k-i))_M = M/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.9)$$

מכיון ש- [U] ו-[P] אלו מטריצות פרמוטציות אזי

$$[U][P] = [P][U] \quad (5.10)$$

$$[C] = [F][P][U][A] \quad (5.11)$$

[V] הינה מטריצת הזזת פאזה של  $\omega$  ולכן הינה מטריצה אלכסונית שהאבר ה- $i$  באלכסון (עבור M זוגי) נתון ע"י

$$v_i = \exp[-j \frac{2\pi}{M} \frac{M}{2} i] = (-1)^i \quad (5.12)$$

עבור M אי זוגי האלכסון מורכב מוקטורים  $v^s$  באורך M המשורשרים ליצירת האלכסון. כל וקטור כזה יהיה:

$$v_k^s = (-1)^k \quad (5.13)$$

באופן מעשי תקון הפאזה מתבצע פעם אחת ע"י גורם המכיל בתוכו את העתקת ראשית מערכת הצירים ואת הזזת ראשית החלון. לכן נגדיר [P'] ו-[Q'] כדלהלן:

$$[P'] = [U][P] \quad (5.14)$$

$$[Q'] = [V][Q] \quad (5.15)$$

ומטריצת האנליזה תהיה:

$$[C] = [F][P'][A] \quad (5.16)$$

או

$$[C] = [Q'][F][A] \quad (5.17)$$

בהמשך אעדיף את היצוג עפ"י (5.7) או (5.8) על פני (5.16) או (5.17) לשם פשוט ההסברים.

להמחשת הדברים שתוארו לעיל ניבחנו דוגמא עבור אות  $x(n)$  סופי, חלון אנליזה באורך 8 ( $N=8$ ), מספר נקודות הדגימה בתדר שווה לאורך החלון ( $M=N$ ) (ז"א ללא בצוע קיפולים בזמן) וגודל הצעד שווה ל-2 ( $R=2$ ).

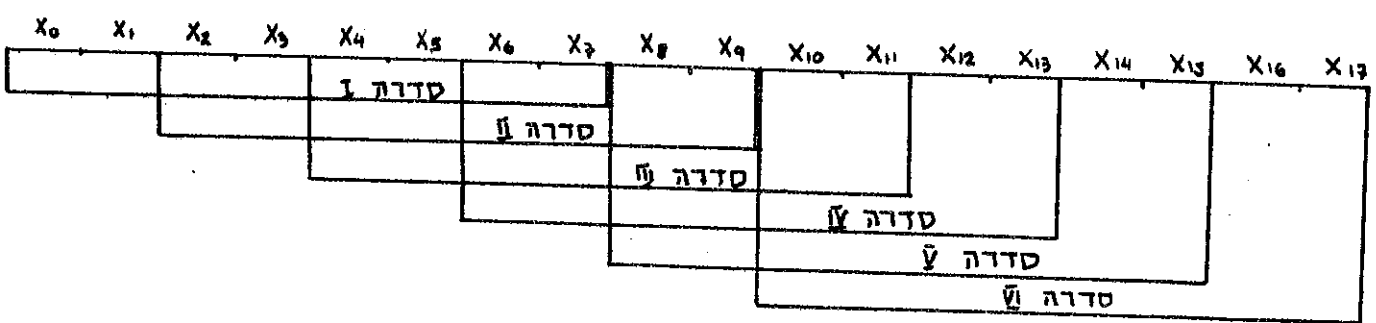
יהי  $\underline{x} = \{x(i) | i=0,1,\dots,17\}$   $P=18$  וקטור דגימות אות הכניסה באורך ויהי  $\underline{\alpha} = \{\alpha_i | i=0,1,\dots,7\}$   $N=8$  וקטור חלון האנליזה באורך 8 אוי ניתן לקבל את וקטור ה-DSTFT ע"י:

א. הגדרת  $(\frac{P-M}{R} + 1)$  סדרות באורך M, כפל כל סידרה בוקטור חלון האנליזה  $\underline{\alpha}$  ושרשרון אחת אחרי השניה.

- ב. בצוע הזזה ציקלית לכל סידרה בנפרד לשם התאמת ראשית הצירים.
- ג. בצוע הזזה ציקלית לשם התאמת ראשית הצירים של חלון האנליזה.
- ד. בצוע DFT לכל סידרה בנפרד.

או על ידי:

- א. הגדרת  $(\frac{P-M}{R} + 1)$  סדרות באורך M, כפל כל סידרה בוקטור חלון האנליזה  $\alpha$  ושרשרון אחת אחרי השניה.
- ב. בצוע DFT לכל סידרה בנפרד.
- ג. תקון פאזת הסדרות המתקבלות לשם התאמת ראשית הצירים.
- ד. בצוע תיקון פאזה לשם התאמת ראשית הצירים של חלון האנליזה.



תרשים 5.1 - הגדרת סדרות באורך M.

FIG 5.1 - DEFINITION OF SEQUENCES WITH LENGTH M.

בתרשימים הבאים מתואר ההליך בצורה מטריצית בתרשים 5.2:

$$[F][U][P][A]x = \underline{b} \quad (5.18)$$

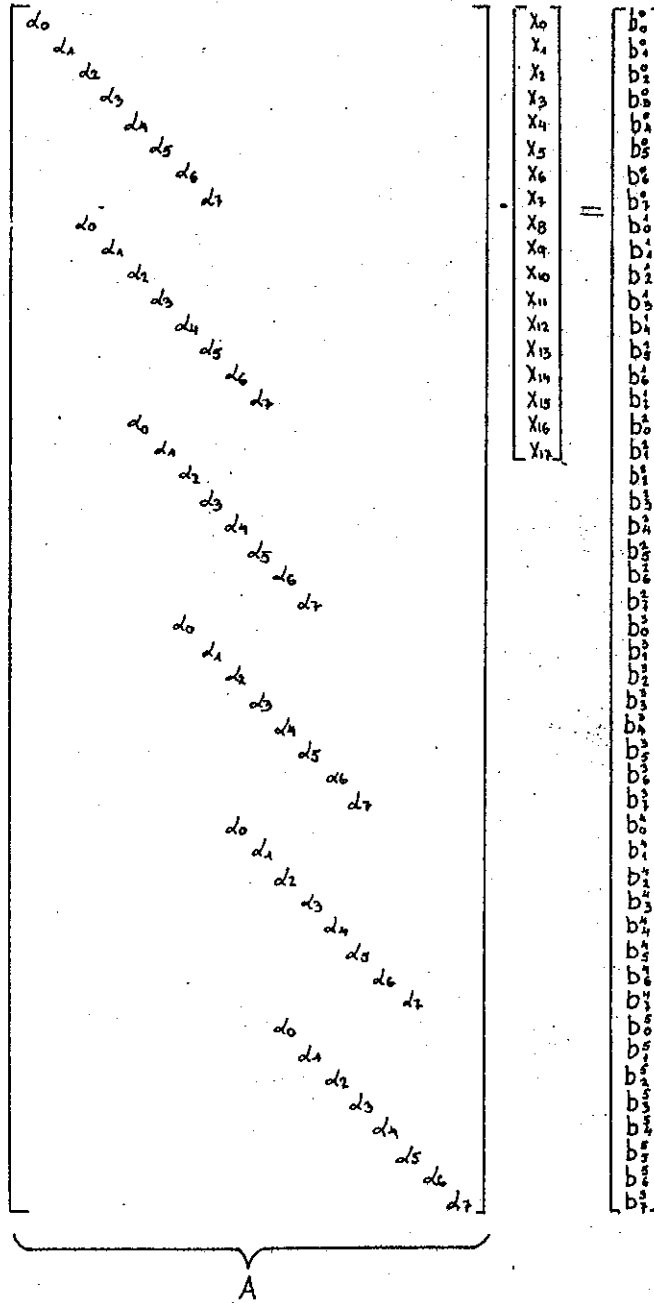
ובתרשים 5.3:

$$[V][Q][F][A]x = \underline{b} \quad (5.19)$$

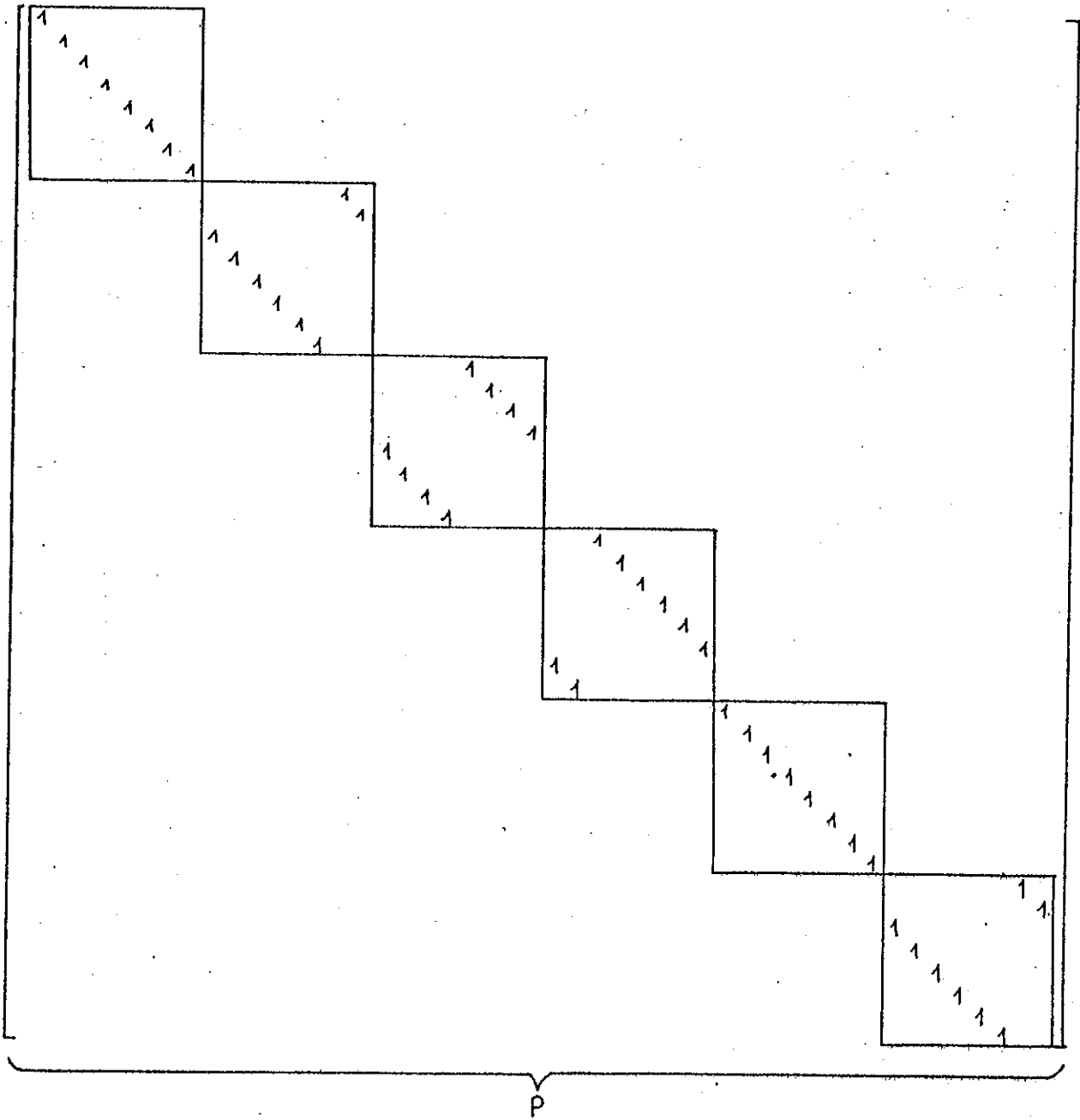
כאשר  $[F], [U], [P], [A]$  ו-  $[V]$  מטריצות ריבועיות  $[(\frac{P-M}{R} + 1) \cdot M] \times [(\frac{P-M}{R} + 1) \cdot M]$  BLOCK DIAGONAL המורכבות מ-  $(\frac{P-M}{R} + 1)$  מטריצות כל אחת בגודל  $M \times M$ .  $[A]$  היא מטריצה מלבנית  $[(\frac{P-M}{R} + 1) \cdot M] \times [P]$  המורכבת מאברי וקטור החלון  $\alpha$  כפי שניתן לראות בעמודים הבאים.



$$[F] \cdot [U] \cdot [P] \cdot$$

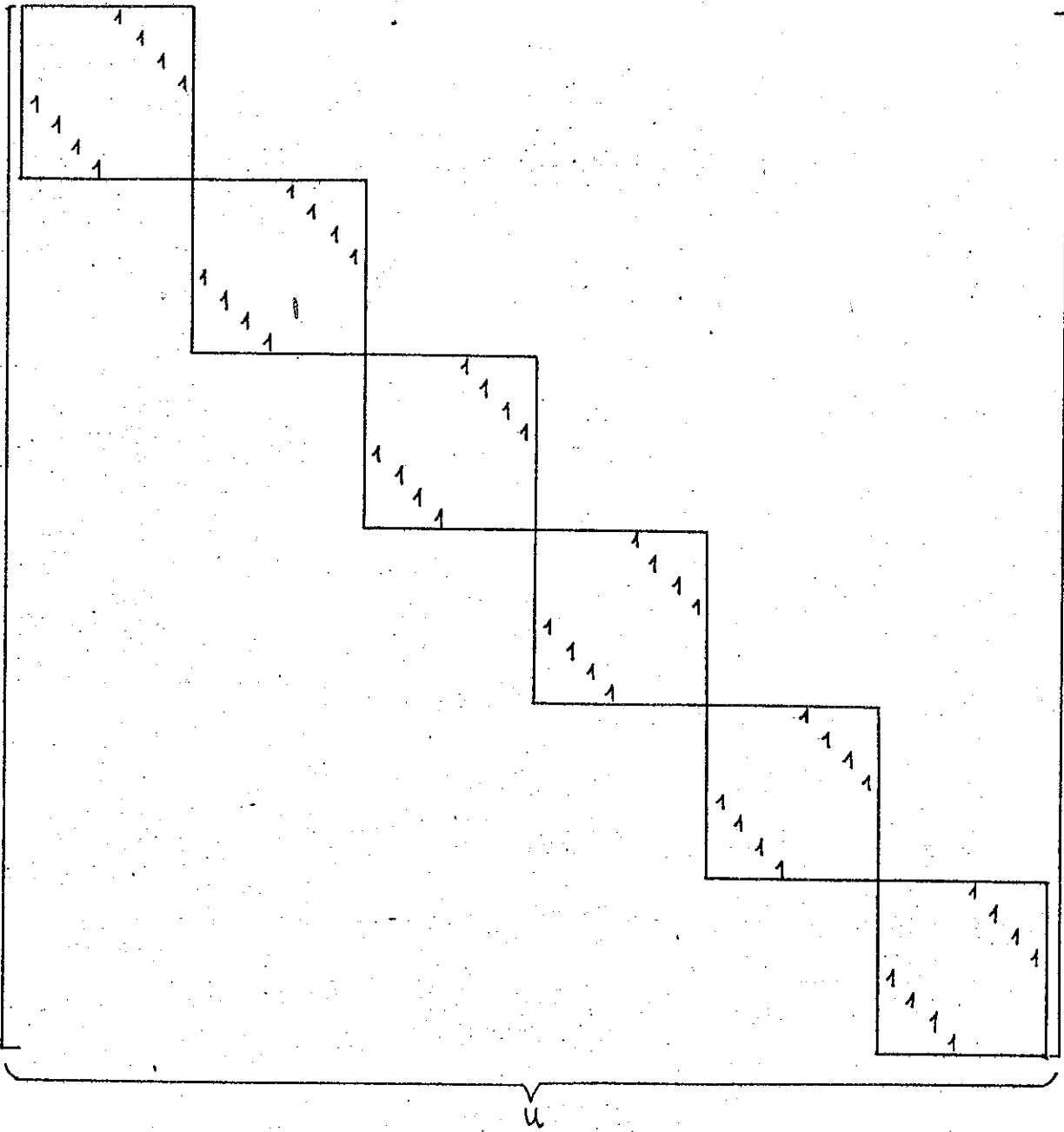


תרשים 5.2 - (A) - תאור הכפל  $[F][U][P][A] x = b$   
 FIG 5.2 - (A) - PRODUCT OF  $[F][U][P][A] x = b$ .



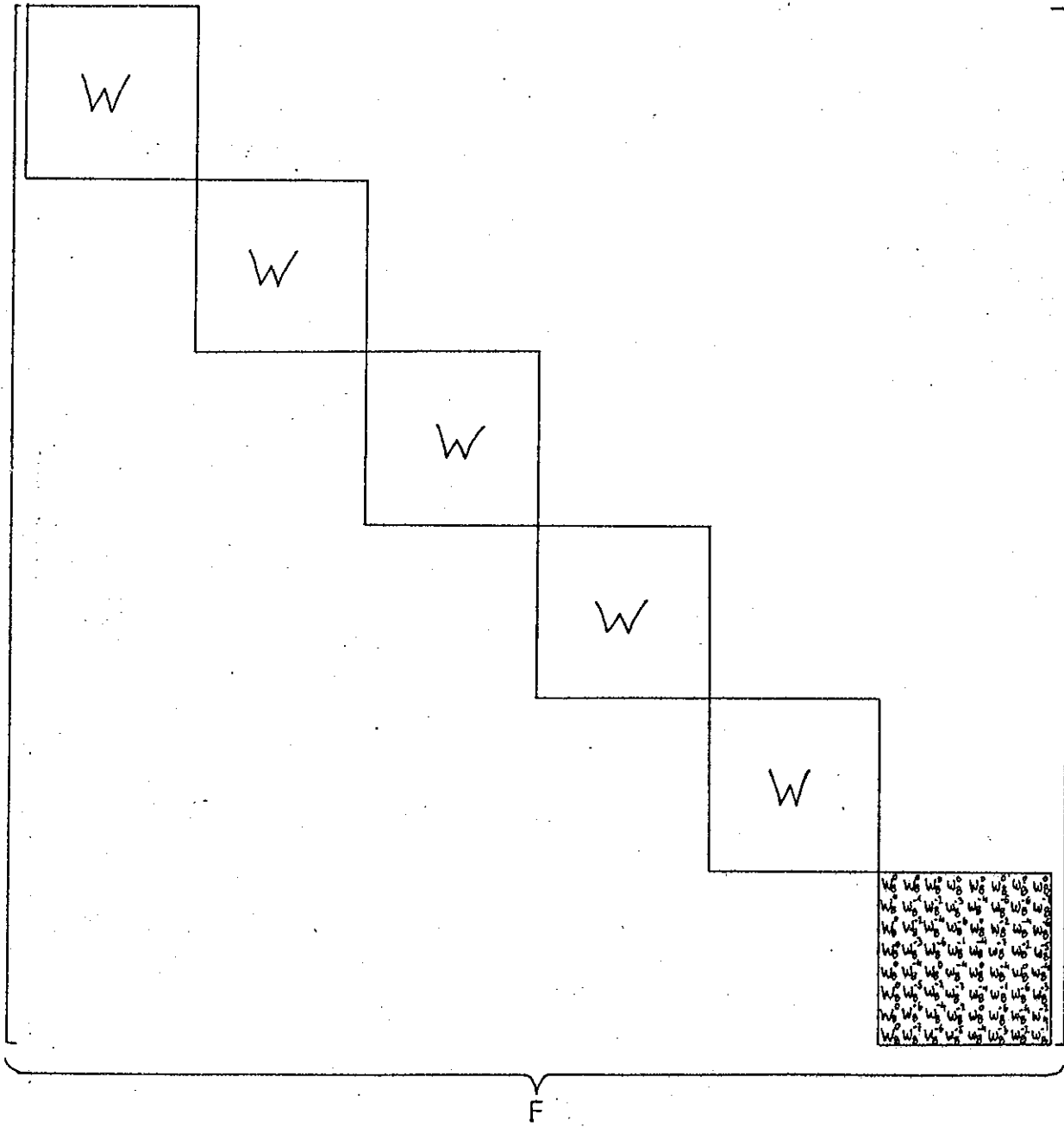
תרשים 5.2 - (ב) מטריצה  $[P]$ .

FIG 5.12 - (b)  $[P]$  MATRIX.



תרשים 5.2 - (C) מטריצה  $[U]$ .

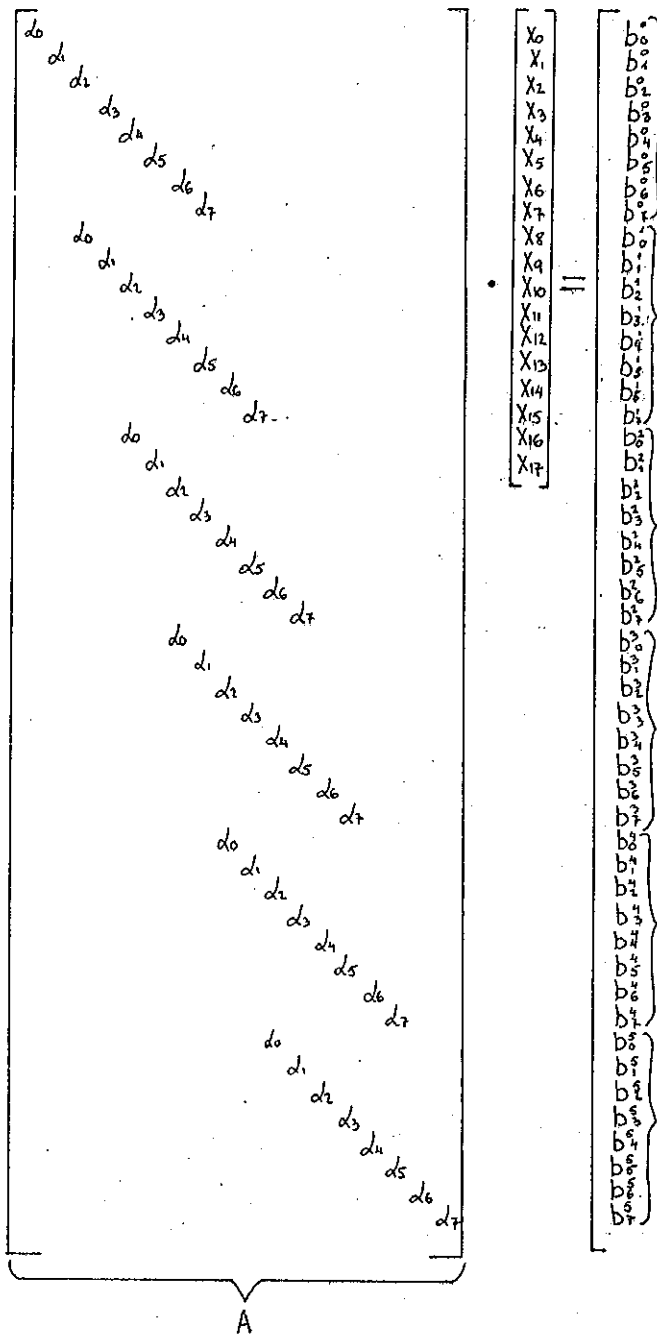
FIG 5.12 - (C)  $[U]$  MATRIX.



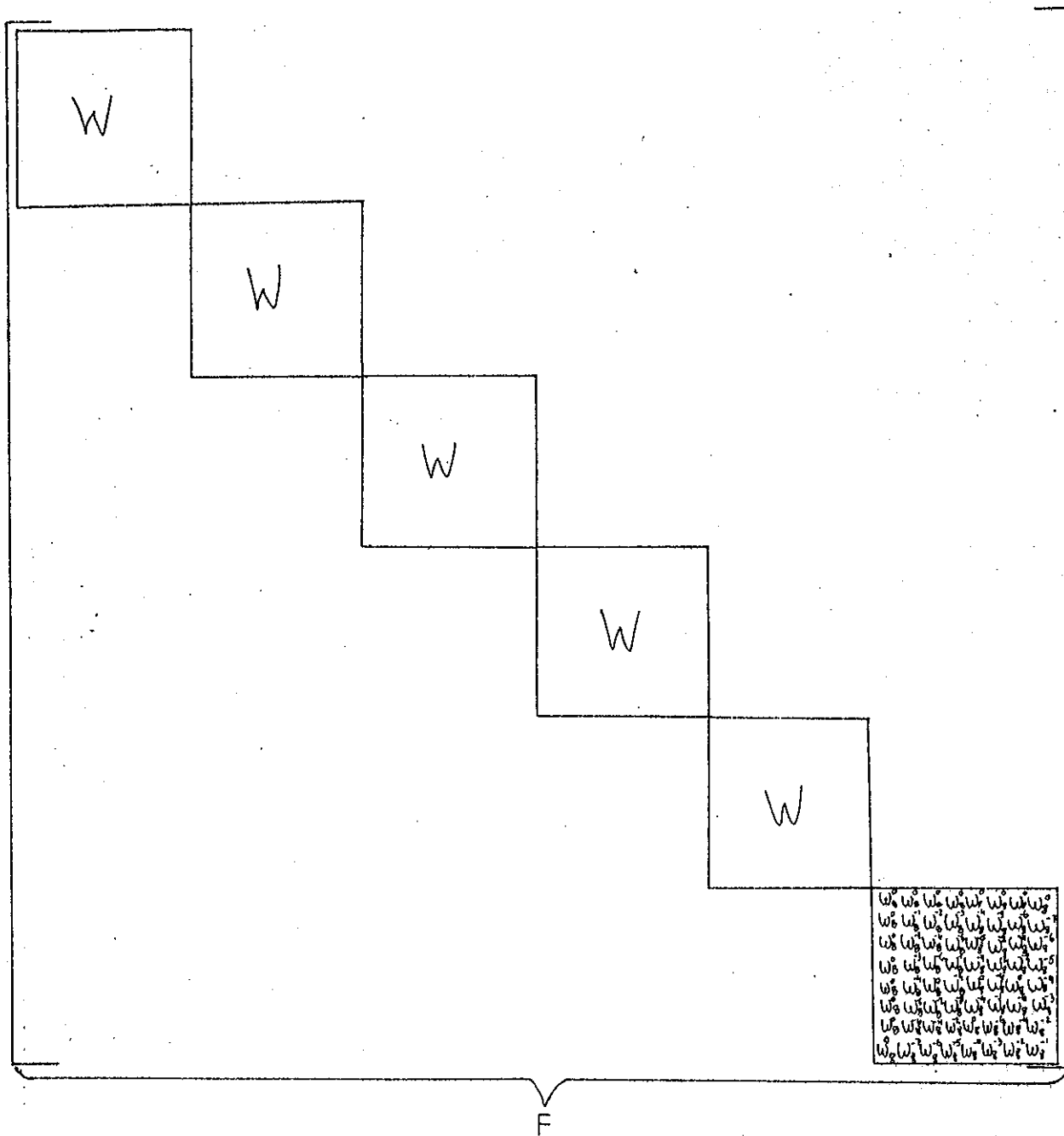
תורשים 5.2 - (D) מטריצה [F].

FIG 5.2 - (D) [F] MATRIX.

$$[V] \cdot [Q] \cdot [F] \cdot$$

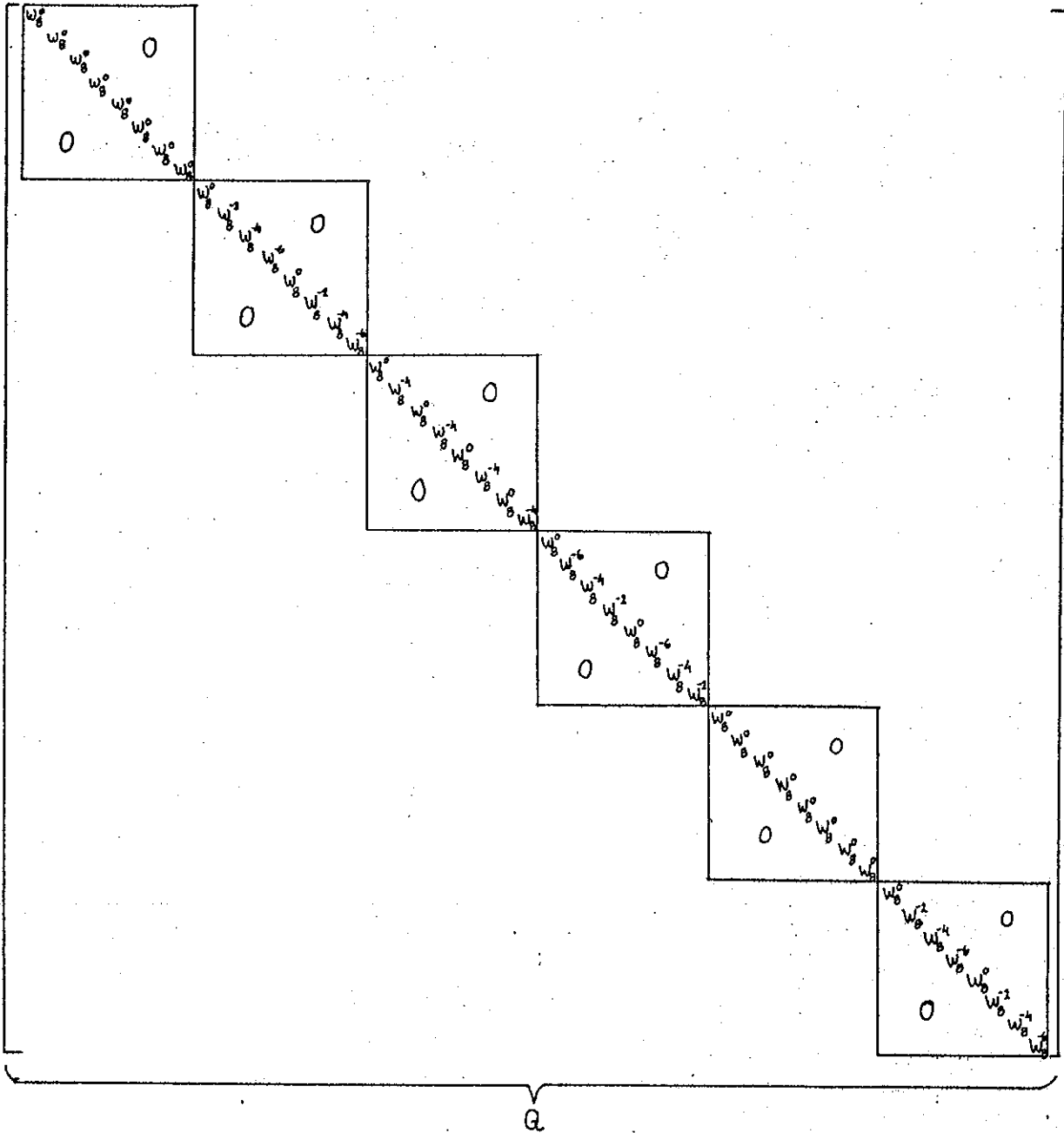


תרשים 5.3 - (A) - חאור הנפל = [V][Q][F][A] = .  
 FIG 5.3 - (A) - PRODUCT OF [V][Q][F][A] = .



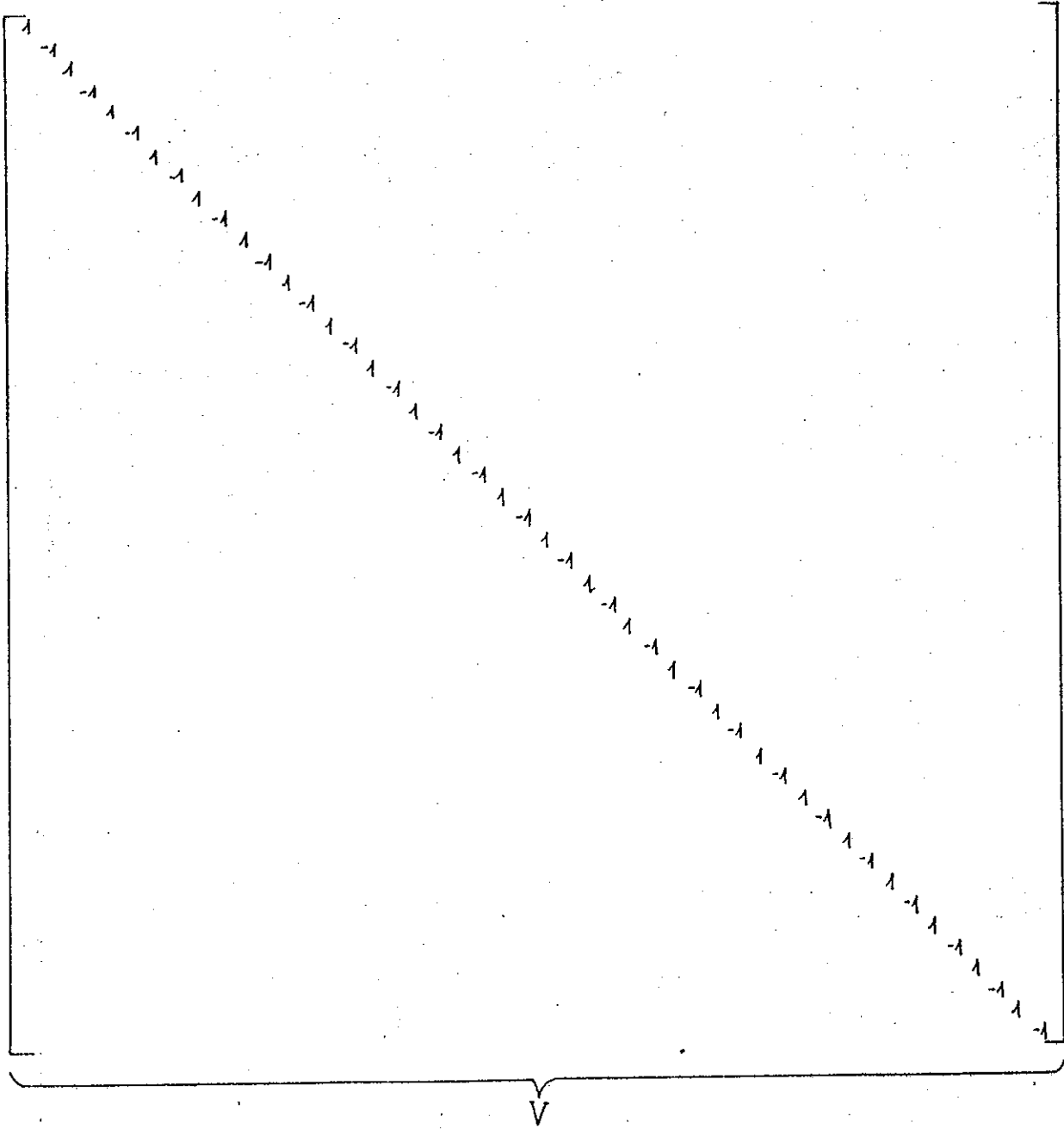
תרשים 5.3 - (ב) מטריצה [F].

FIG 5.3 - (B) [F] MATRIX.



תרשים 5.3 - (C) מטריצה  $[Q]$ .

FIG 5.3 - (C)  $[Q]$  MATRIX.



תרשים 5.3 - (D) מטריצה [V].

FIG 5.3 - (D) [V] MATRIX.



5.3 סינטיזת התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר DSTFTS

ניתן לתאר באופן דומה גם את הליך הסינטיזה עפ"י WOLA כלומר הצגתו כפעולה מטריצית בין  $\underline{b}$  וקטור ה-DSTFT  $\hat{\underline{x}}$  וקטור את היציאה כך ש-

$$[\underline{b}] = \hat{\underline{x}} \quad (5.20)$$

מידיעת אופי ה-DSTFT נצפה לקבלת  $[\underline{b}]$  - מטריצה מלבנית  $M \times M$ :  
 כך ש- $M \times M$ . גם במקרה זה (כמו באנליזה) ניתן לפרק את  $\underline{b}$  למכפלת שלוש מטריצות.

$$[\underline{b}] = [\underline{s}][\hat{P}][\hat{F}] \quad (5.21)$$

$$[\underline{b}] = [\underline{s}][\hat{F}][\hat{Q}] \quad (5.22)$$

בהתאם לאופן שחזור בסיס הזמן של סידרת ה-DSTFT הנתונה. חשוב  $[\underline{b}]$  על פי  $[\underline{b}] = [\underline{s}][\hat{P}][\hat{F}]$  מתאר בצוע סיבוב ציקלי של כל סידרה לאחר בצוע IDFT, וחשוב  $[\underline{b}]$  על פי  $[\underline{b}] = [\underline{s}][\hat{F}][\hat{Q}]$  מתאר תיקון פאזה לינארית לפני בצוע IDFT.

$[\hat{F}]$  זו מטריצת התמרת פוריה הפוכה, מטריצה BLOCK DIAGONAL כאשר כל בלוק שנשמנו ב- $\hat{W}$  הוא בגודל  $M \times M$  ומהווה מטריצת IDFT ז"א

$$\hat{W}_{ik} = \frac{1}{M} \exp \left[ j \frac{2\pi}{M} i k \right] \quad \begin{matrix} i = 0, 1, \dots, (M-1) \\ k = 0, 1, \dots, (M-1) \end{matrix} \quad (5.23)$$

מכיוון ש  $[\hat{F}]$  זו מטריצת התמרת פוריה הפוכה גם מתקיים:

$$[\hat{F}] = [F]^{-1} \quad (5.24)$$

$[\underline{s}]$  - זו מטריצת "כפל בחלון סינטיזה וכיווץ האות" היא כופלת כל  $M$  נקודות המהוות סידרה בחלון סינטיזה ומחברת אותו בשיטת "OVERLAP ADD" לקבלת האות  $\hat{\underline{x}}$ . מענין לציין ש- $[\underline{s}]$  דומה למטריצת האנליזה שעבר TRANSPOSE כאשר אברי חלון האנליזה מוחלפים באברי חלון הסינטיזה.

$[\hat{P}]$  - זו מטריצת סיבוב, מטריצה BLOCK DIAGONAL כאשר כל בלוק  $(P^S)$  הוא בגודל  $M \times M$  וזוהי מטריצת סיבוב של כל אחת מהסדרות לשם קבלת האות המתאים לראשית הבלוק, כלומר

$$\hat{\rho}_{\lambda k}^s = \begin{cases} 1 & ((j-i))_M = ((SR))_M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5.25)$$

$i = .0.1, \dots, (M-1)$   
 $k = .0.1, \dots, (M-1)$

$[\hat{Q}]$  זו מטריצת פאזה לינארית. מטריצה אלכסונית כאשר וקטור האלכסון מורכב מוקטורים  $\hat{Q}^s$  באורך M המשורשים ליצירת האלכסון. כל וקטור כזה יהיה:

$$\hat{Q}_k^s = W_M^{SRK} \quad (5.26)$$

כאשר יש לבצע גם תיקון הנובע מהתאמת בסיס הזמן של חלון האנליזה, תיקון זה ניתן לבצוע ע"י הזזה ציקלית בזמן ואז הליך הסינטיזה יראה:

$$[D] = [S][\hat{P}][\hat{U}][\hat{F}] \quad (5.27)$$

או ע"י תיקון הפאזה במישור התדר:

$$[D] = [S][\hat{F}][\hat{Q}][\hat{V}] \quad (5.28)$$

כאשר  $[\hat{U}]$  הינה מטריצת סיבוב ציקלי ב-M/2 נקודות ולכן  $[\hat{U}] = [U]$  שתוארה כבר בהליך האנליזה (5.9).

$[\hat{V}]$  הינה מטריצת הזזת פאזה של  $\alpha$  ולכן זהה למטריצת  $[V]$ ,  $[\hat{V}] = [V]$  שהוגדרה כבר בהליך האנליזה (5.12) ו-(5.13).

להמחשת הדברים ניבחנו את המשך הדוגמא הקודמת - סינטיזה של וקטור  $\underline{b}$  לקבלת  $\hat{x}$ . יהי  $\underline{b}$  וקטור DSTFT המורכב מ-6 סדרות באורך M כל אחת (M=8), ויהי  $\beta$  וקטור חלון הסינטיזה באורך N=M כלומר  $\beta = \{ \beta_i | i=0, \dots, 7 \}$  תרשים 5.4 מתאר את התהליך עפ"י:

$$[S][\hat{P}][\hat{U}][\hat{F}]\underline{b} = \hat{x} \quad (5.29)$$

ותרשים 5.5 עפ"י:

$$[S][\hat{F}][\hat{Q}][\hat{V}]\underline{b} = \hat{x} \quad (5.30)$$

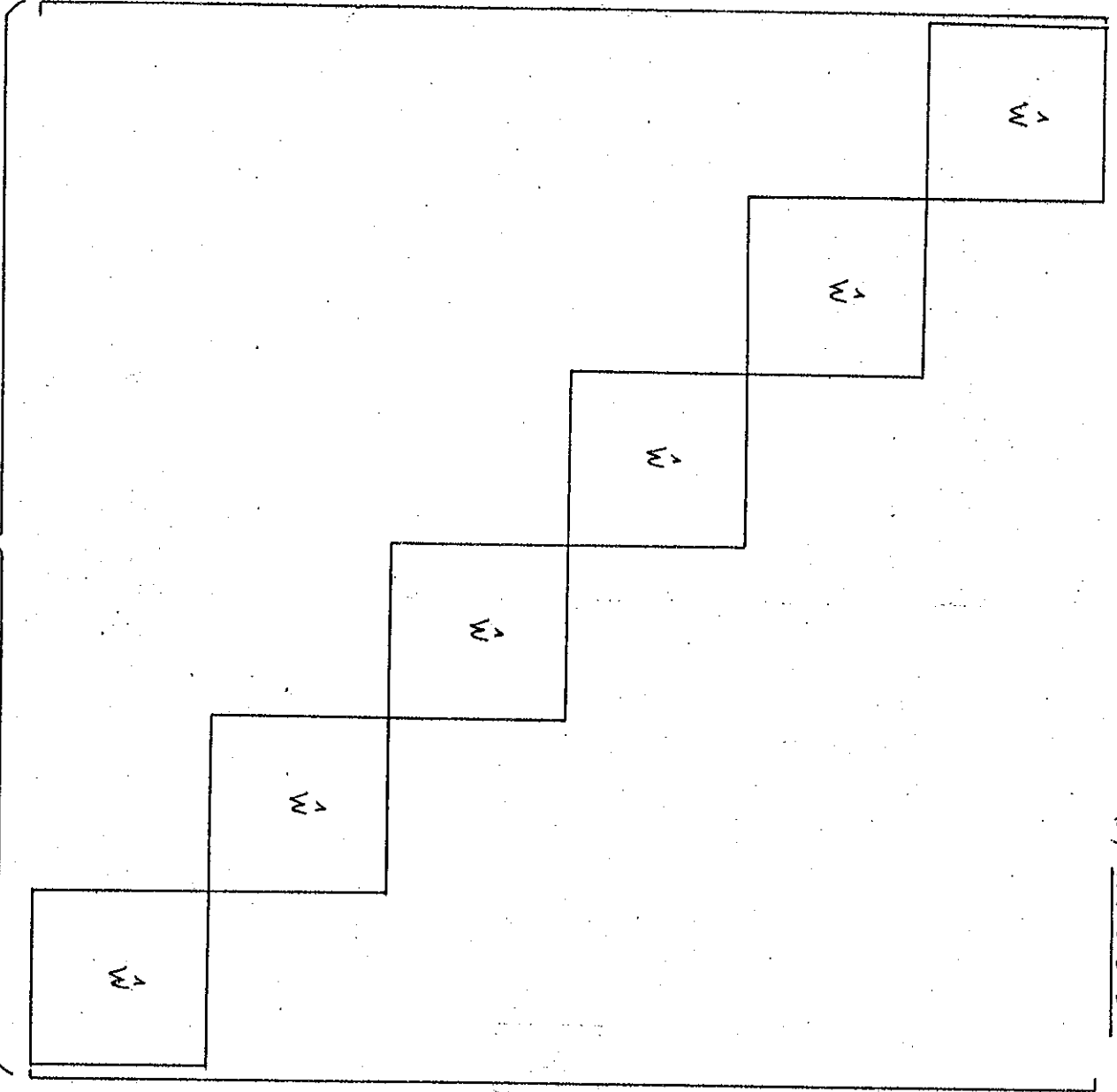
$$[s] \cdot [\dot{p}] \cdot [u]$$

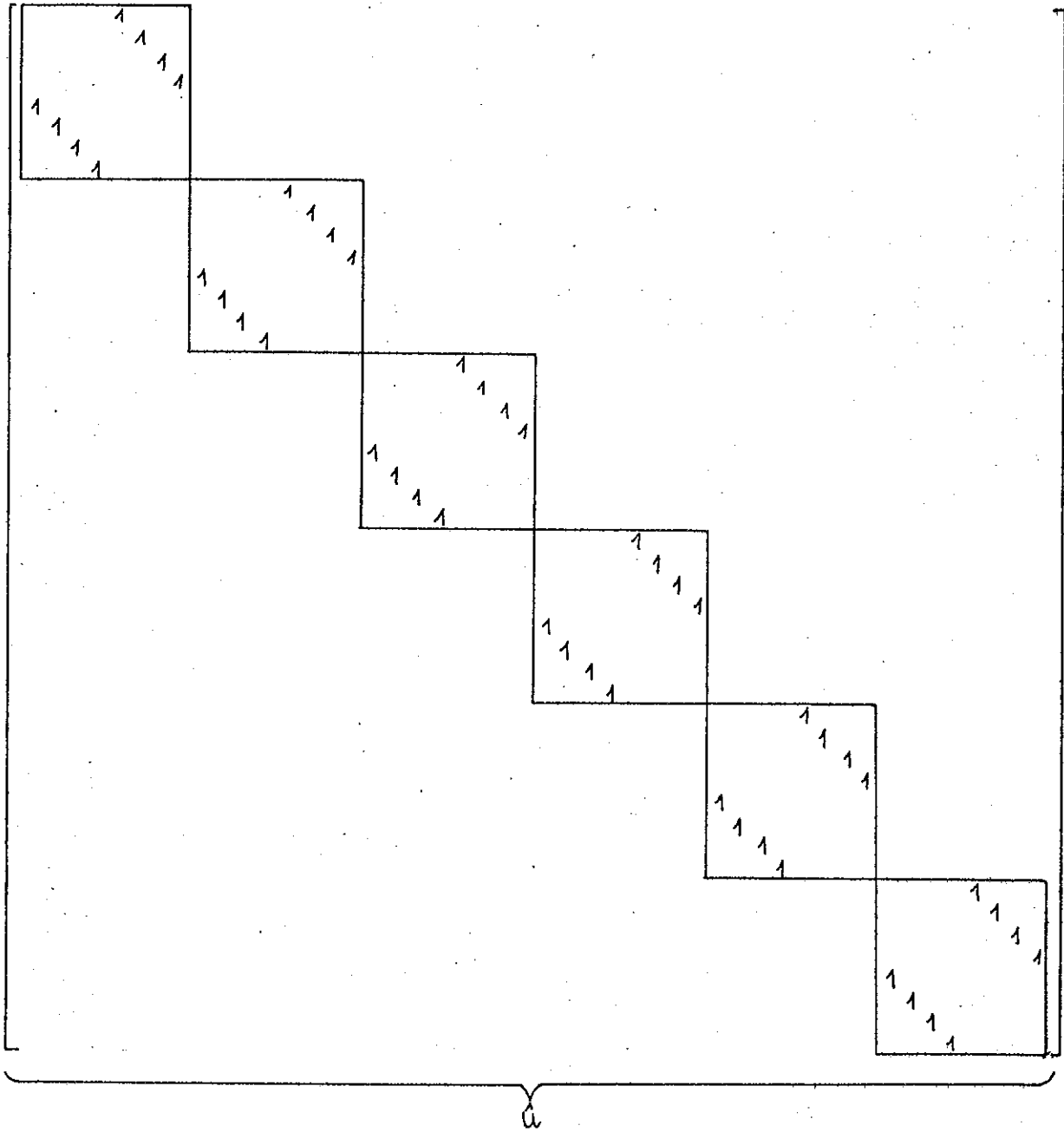
(A) 5.4 DIVISION

$X_0$   
 $X_1$   
 $X_2$   
 $X_3$   
 $X_4$   
 $X_5$   
 $X_6$   
 $X_7$   
 $X_8$   
 $X_9$   
 $X_{10}$   
 $X_{11}$   
 $X_{12}$   
 $X_{13}$   
 $X_{14}$   
 $X_{15}$   
 $X_{16}$

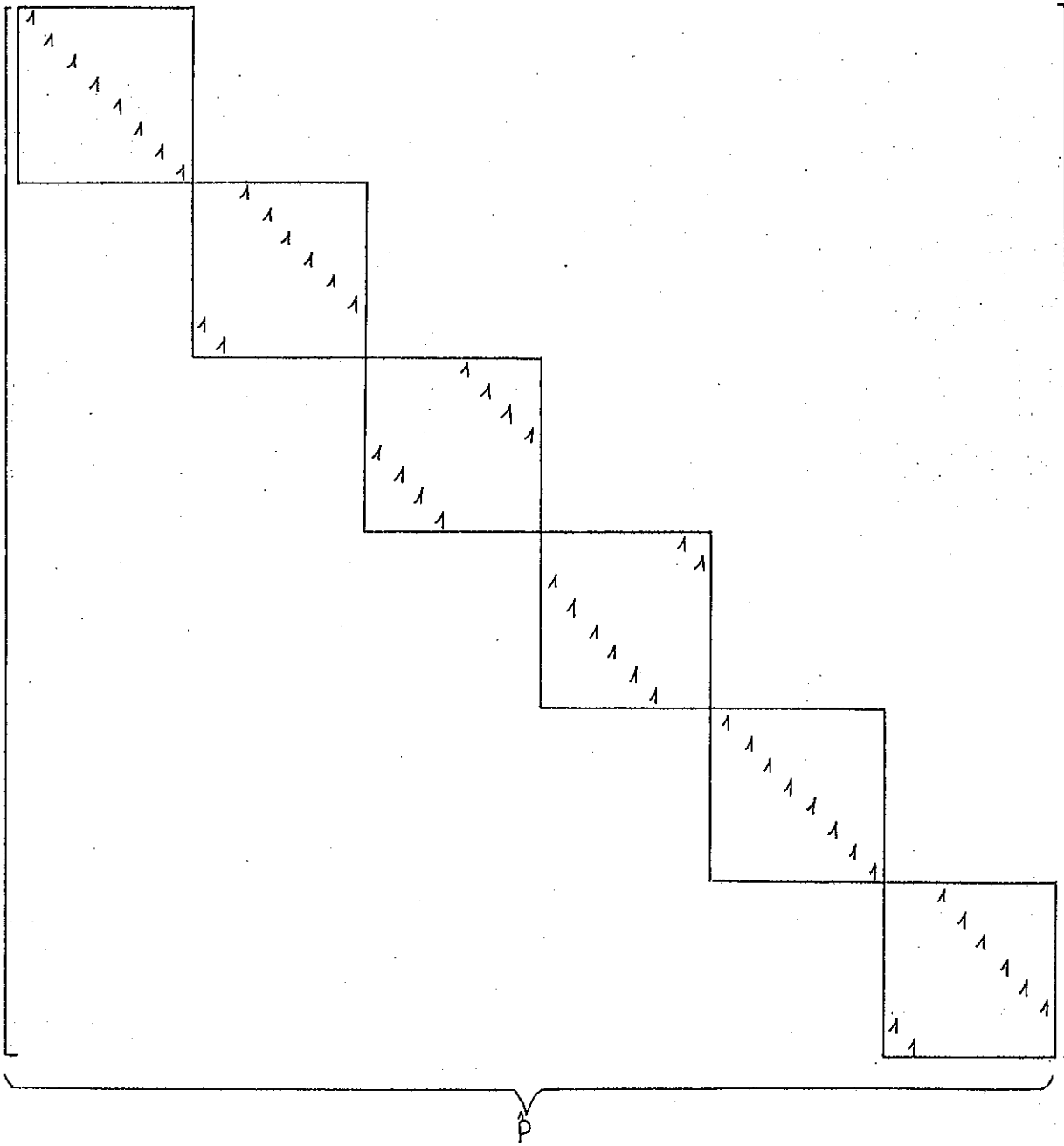
=

$D_0$   
 $D_1$   
 $D_2$   
 $D_3$   
 $D_4$   
 $D_5$   
 $D_6$   
 $D_7$   
 $D_8$   
 $D_9$   
 $D_{10}$   
 $D_{11}$   
 $D_{12}$   
 $D_{13}$   
 $D_{14}$   
 $D_{15}$   
 $D_{16}$   
 $D_{17}$   
 $D_{18}$   
 $D_{19}$   
 $D_{20}$   
 $D_{21}$   
 $D_{22}$   
 $D_{23}$   
 $D_{24}$   
 $D_{25}$   
 $D_{26}$   
 $D_{27}$   
 $D_{28}$   
 $D_{29}$   
 $D_{30}$   
 $D_{31}$   
 $D_{32}$   
 $D_{33}$   
 $D_{34}$   
 $D_{35}$   
 $D_{36}$   
 $D_{37}$   
 $D_{38}$   
 $D_{39}$   
 $D_{40}$   
 $D_{41}$   
 $D_{42}$   
 $D_{43}$   
 $D_{44}$   
 $D_{45}$   
 $D_{46}$   
 $D_{47}$   
 $D_{48}$   
 $D_{49}$   
 $D_{50}$   
 $D_{51}$   
 $D_{52}$   
 $D_{53}$   
 $D_{54}$   
 $D_{55}$   
 $D_{56}$   
 $D_{57}$   
 $D_{58}$   
 $D_{59}$   
 $D_{60}$   
 $D_{61}$   
 $D_{62}$   
 $D_{63}$   
 $D_{64}$   
 $D_{65}$   
 $D_{66}$   
 $D_{67}$   
 $D_{68}$   
 $D_{69}$   
 $D_{70}$   
 $D_{71}$   
 $D_{72}$   
 $D_{73}$   
 $D_{74}$   
 $D_{75}$   
 $D_{76}$   
 $D_{77}$   
 $D_{78}$   
 $D_{79}$   
 $D_{80}$   
 $D_{81}$   
 $D_{82}$   
 $D_{83}$   
 $D_{84}$   
 $D_{85}$   
 $D_{86}$   
 $D_{87}$   
 $D_{88}$   
 $D_{89}$   
 $D_{90}$   
 $D_{91}$   
 $D_{92}$   
 $D_{93}$   
 $D_{94}$   
 $D_{95}$   
 $D_{96}$   
 $D_{97}$   
 $D_{98}$   
 $D_{99}$



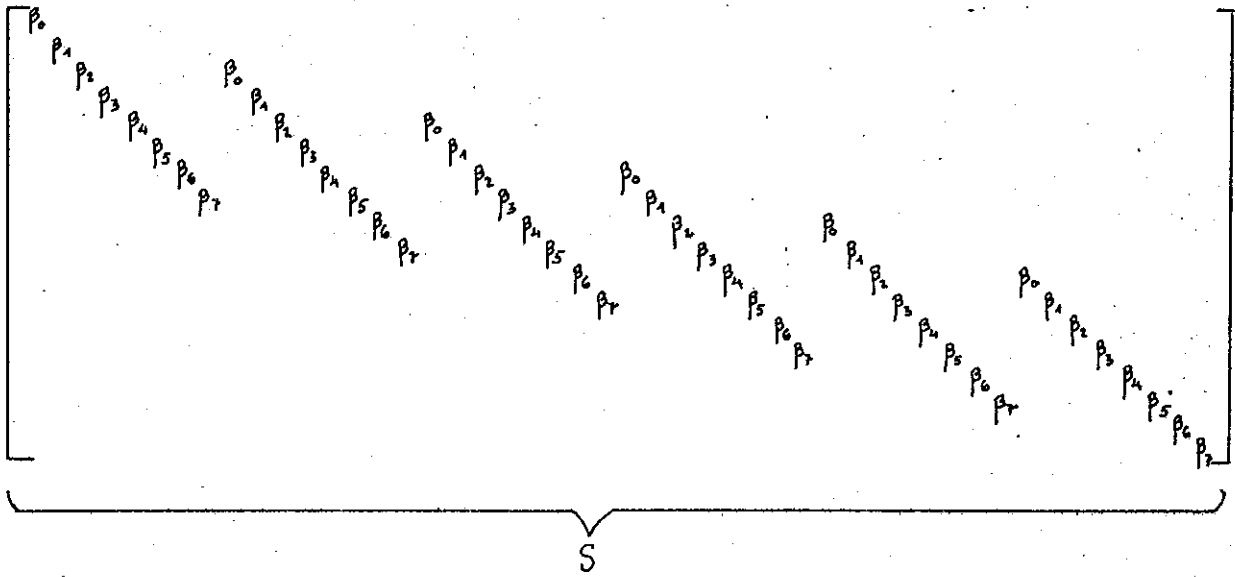


תרשים 5.4 - (ב) מטריצה  $[\hat{U}]$ .  
FIG 5.4 - (B)  $[\hat{U}]$  MATRIX.



תרשים 5.4 - (C) מטריצה  $\hat{P}$ .

FIG 5.4 - (C)  $\hat{P}$  MATRIX.

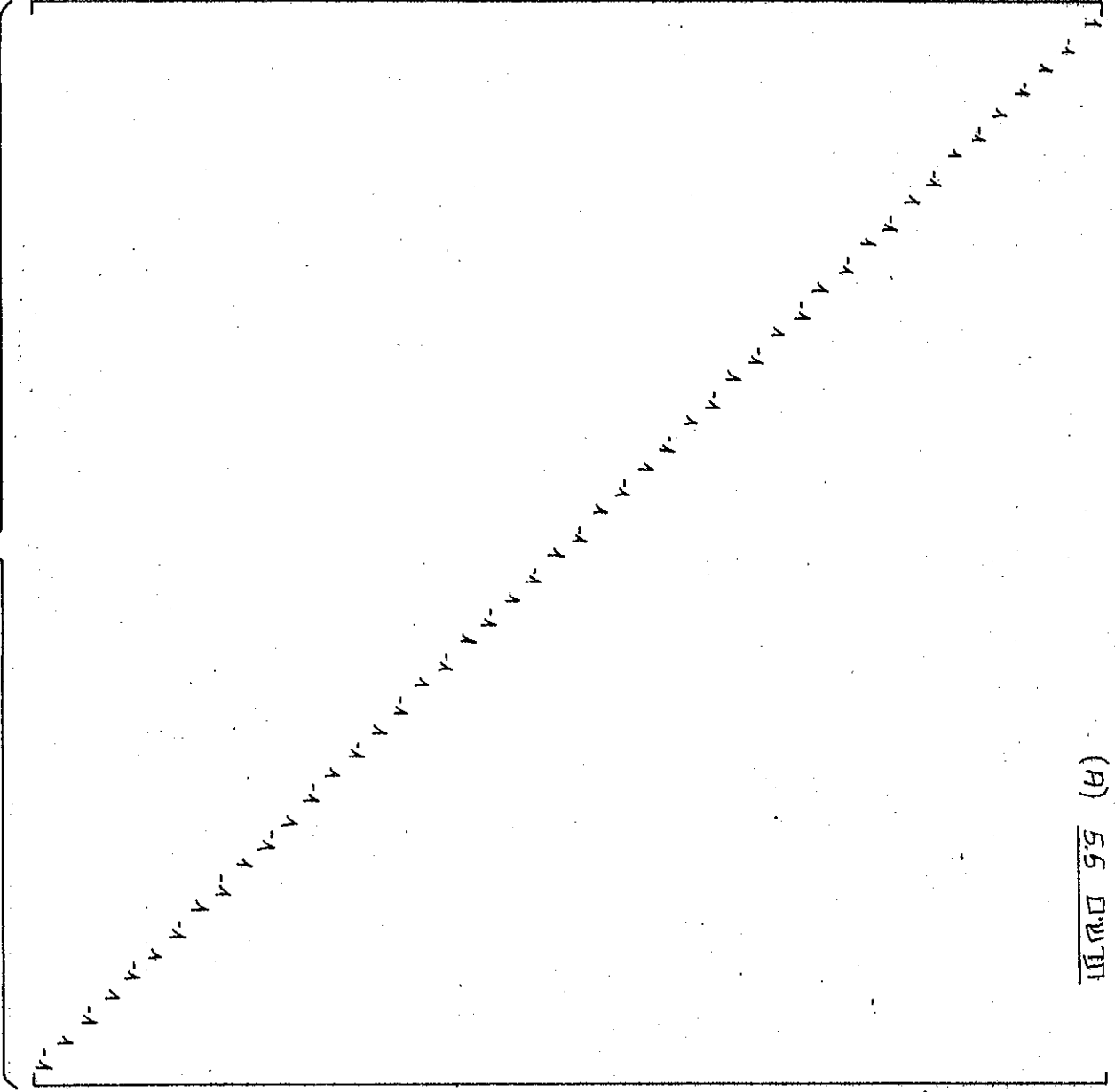


תרשים 5.4 - (D) מטריצה  $[S]$ .

FIG 5.4 - (D)  $[S]$  MATRIX.

$$[S] \cdot [\dot{F}] \cdot [\dot{Q}]$$

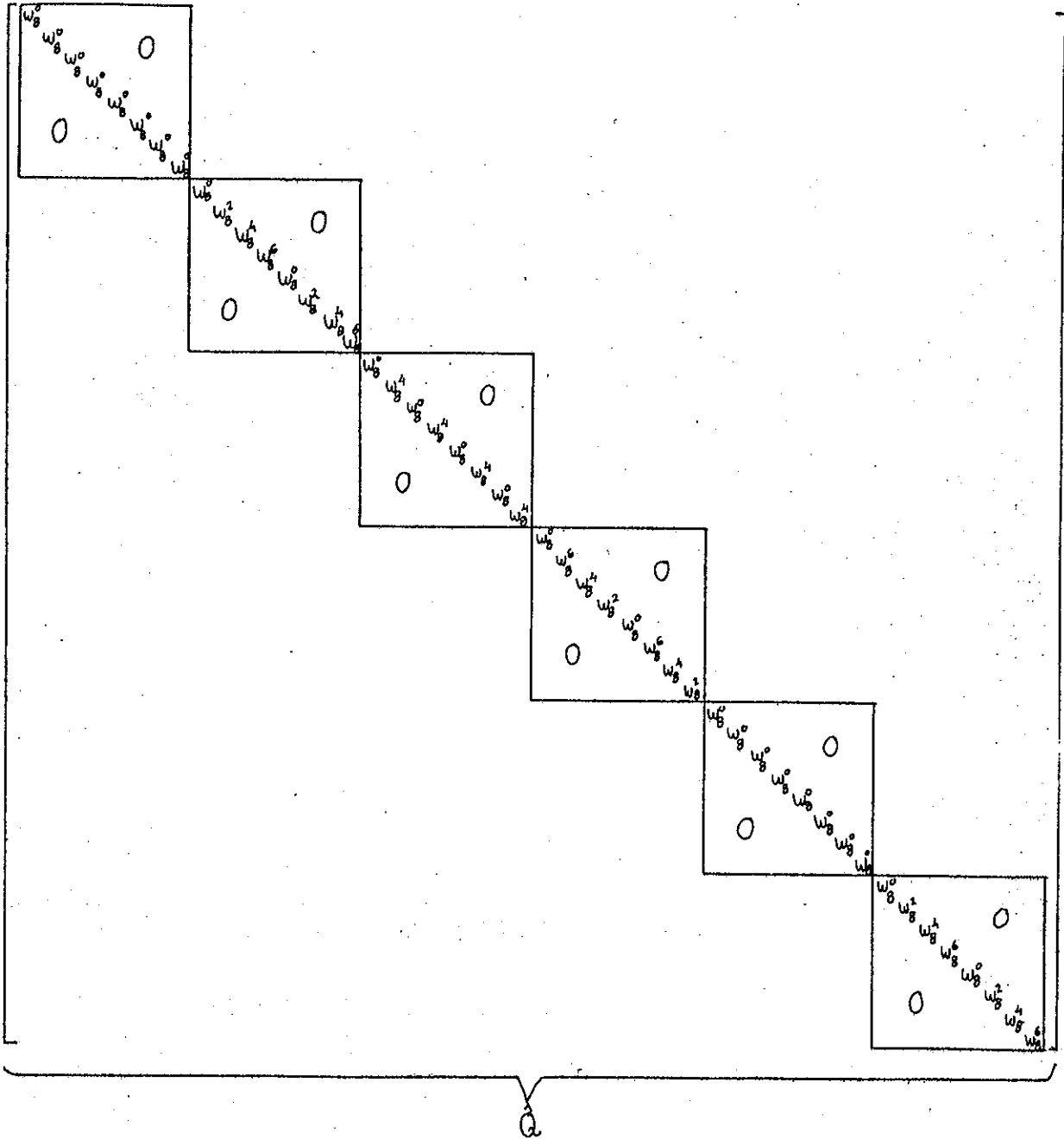
(א) 5.5 דברים



$X_0$   
 $X_1$   
 $X_2$   
 $X_3$   
 $X_4$   
 $X_5$   
 $X_6$   
 $X_7$   
 $X_8$   
 $X_9$   
 $X_{10}$   
 $X_{11}$   
 $X_{12}$   
 $X_{13}$   
 $X_{14}$   
 $X_{15}$   
 $X_{16}$   
 $X_{17}$

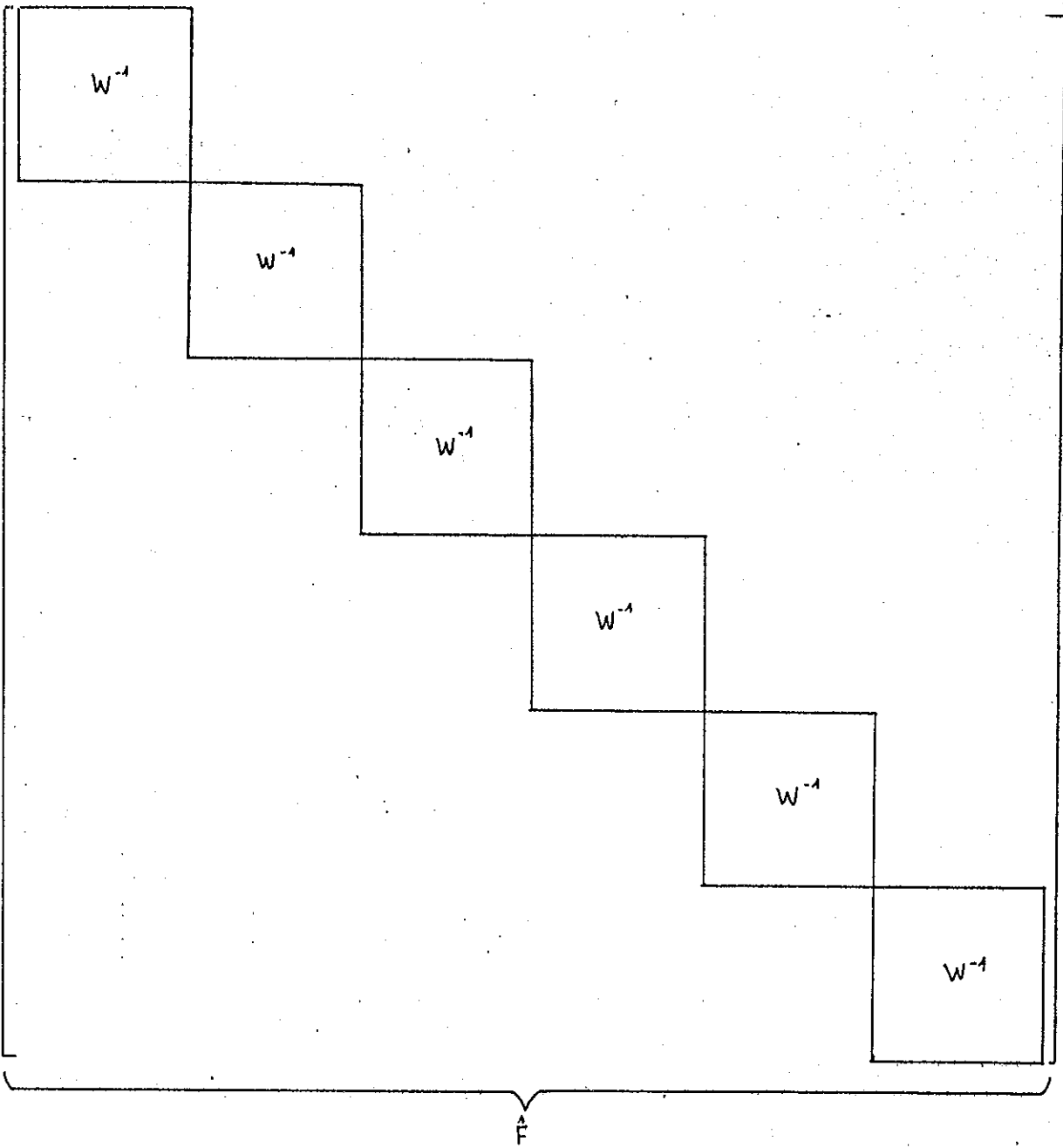
=

$b_0$   
 $b_1$   
 $b_2$   
 $b_3$   
 $b_4$   
 $b_5$   
 $b_6$   
 $b_7$   
 $b_8$   
 $b_9$   
 $b_{10}$   
 $b_{11}$   
 $b_{12}$   
 $b_{13}$   
 $b_{14}$   
 $b_{15}$   
 $b_{16}$   
 $b_{17}$



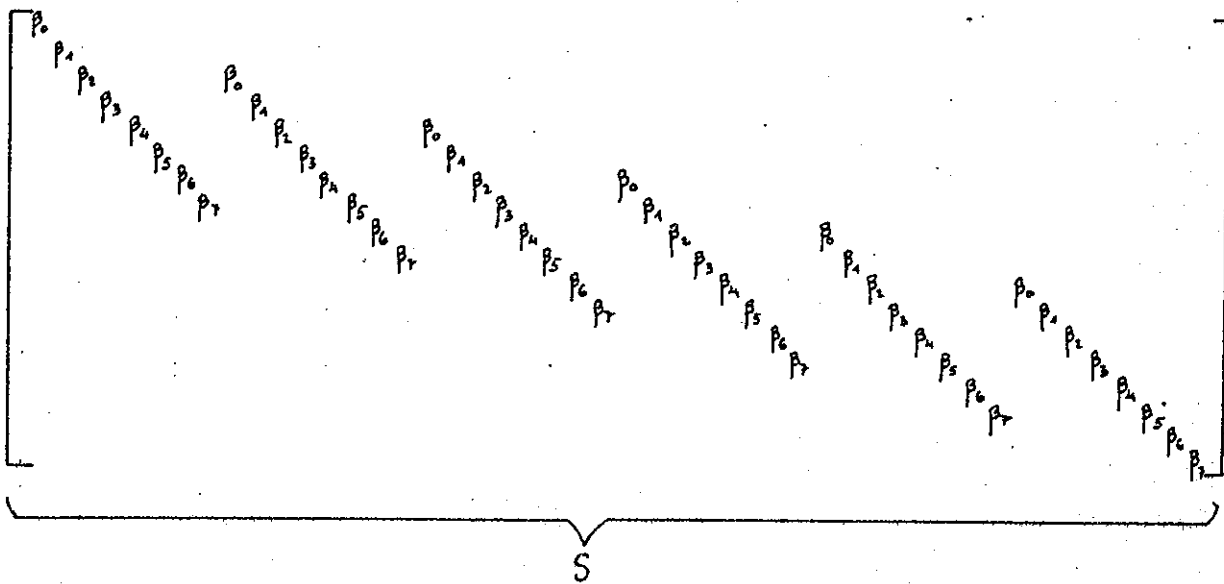
תרשים 5.5 - (ב) מטריצה  $[\hat{Q}]$ .  
FIG 5.5 - (B)  $[\hat{Q}]$  MATRIX.





תרשים 5.5 - (c) מטריצה  $\hat{F}$ .

FIG 5.5 - (c)  $\hat{F}$  MATRIX.



תורשים 5.5 - (D) מטריצה [S].

FIG 5.5 - (D) [S] MATRIX.

5.4 אנליזה של אות עם קיפולים בזמן

כאשר  $N \times M$  ז"א מסנן האנליזה ארוך ממספר הדגימות בתדר אזי אין צורך [36] לבצע התאמת בסיס הזמן של החלון, ומטריצת "כפל בחלון אנליזה ופריסת הסגנאלי" צריכה גם להציג את פעולת ה-STACK ADD המתוארת בתרשים 3.8.

נניח בלי הגבלת כלליות ש-  $N=I \cdot M$  ( $I$  חיובי שלם) ונבחר כיצד תיראה במקרה זה פעולת האנליזה.

$$[F][P][A]x = b \quad (5.31)$$

1x

$$[Q][F][A]x = b \quad (5.32)$$

נסמן

$$[Q][F] = [F][P] \triangleq [Z] \quad (5.33)$$

מכיון ש- $[F]$  ו- $[P]$  הן מטריצות BLOCK DIAGONAL אזי גם  $[Z]$  היא DIAGONAL BLOCK כאשר כל בלוק  $[z]$  מסדר  $M \times M$ , והליך האנליזה יהיה:

$$[z][a]x = b \quad (5.34)$$

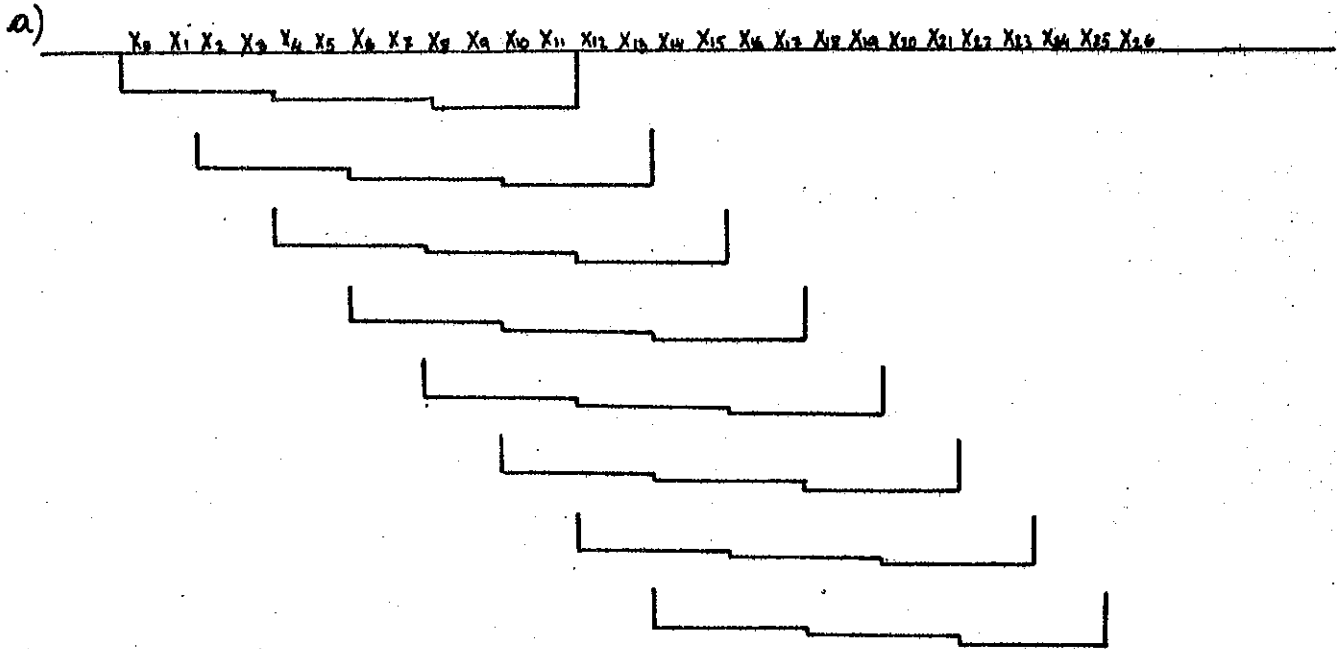
נבחר דוגמא עבור  $N=12, M=4, R=2$ .

$N$  = אורך מסנן האנליזה.

$M$  = מספר הנקודות בהתמרת פוריה ה-DFT.

$R$  = גודל הצעד.

תרשים 5.6 מבהיר את שלב הגדרת הסדרות באורך  $M$ . ובצוע הקיפולים בזמן.



תרשים 5.6 - (A) הגדרת סדרות באורך N. (B) בצוע קיפולים בזמן.

FIG 5.6 - (A) DEFINITION OF SEQUENCES WITH LENGTH N.

(B) TIME DOMAIN ALIASING.

ניתן לתאר את בצוע הקיפולים בזמן עיני הנוסחה הבאה

$$y(i) = \sum_{j=0}^{N/M-1} x(i+j \cdot M) \quad (5.35)$$

פאשר: N - אורך מסנו האנליזה

M - מספר הנקודות בהתמרת ה-OFT.

תרשים 5.7 מבהיר את התאור המטריצי של פעולת האנליזה.

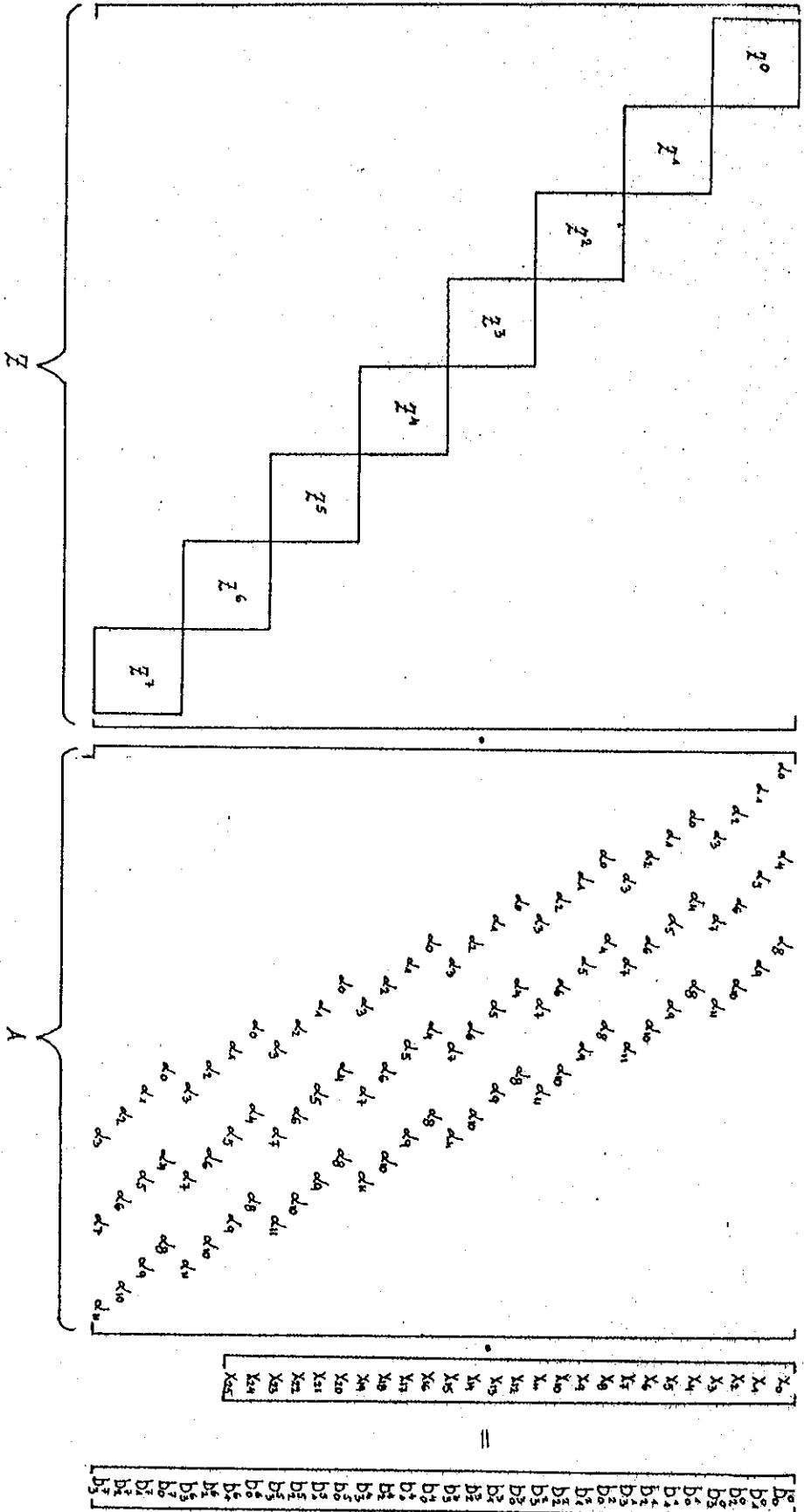


FIG. 5.7 - AN ALGEBRAIC DESCRIPTION OF ANALYSIS WITH TIME ALIASING

5.5 סינטיזה של אות מ-DSTFT לאחר אנליזה עם "קיפולים בזמן"

נבחן את היצוג המטריצי של שיחזור הסיגנאל עפ"י המודל שתואר בפרק 3 בתרשים 3.8 עבור הדוגמא האחרונה. במקרה זה הליך הסינטיזה יהיה:

$$[s][\hat{P}][\hat{F}] \underline{b} = \underline{x} \quad (5.36)$$

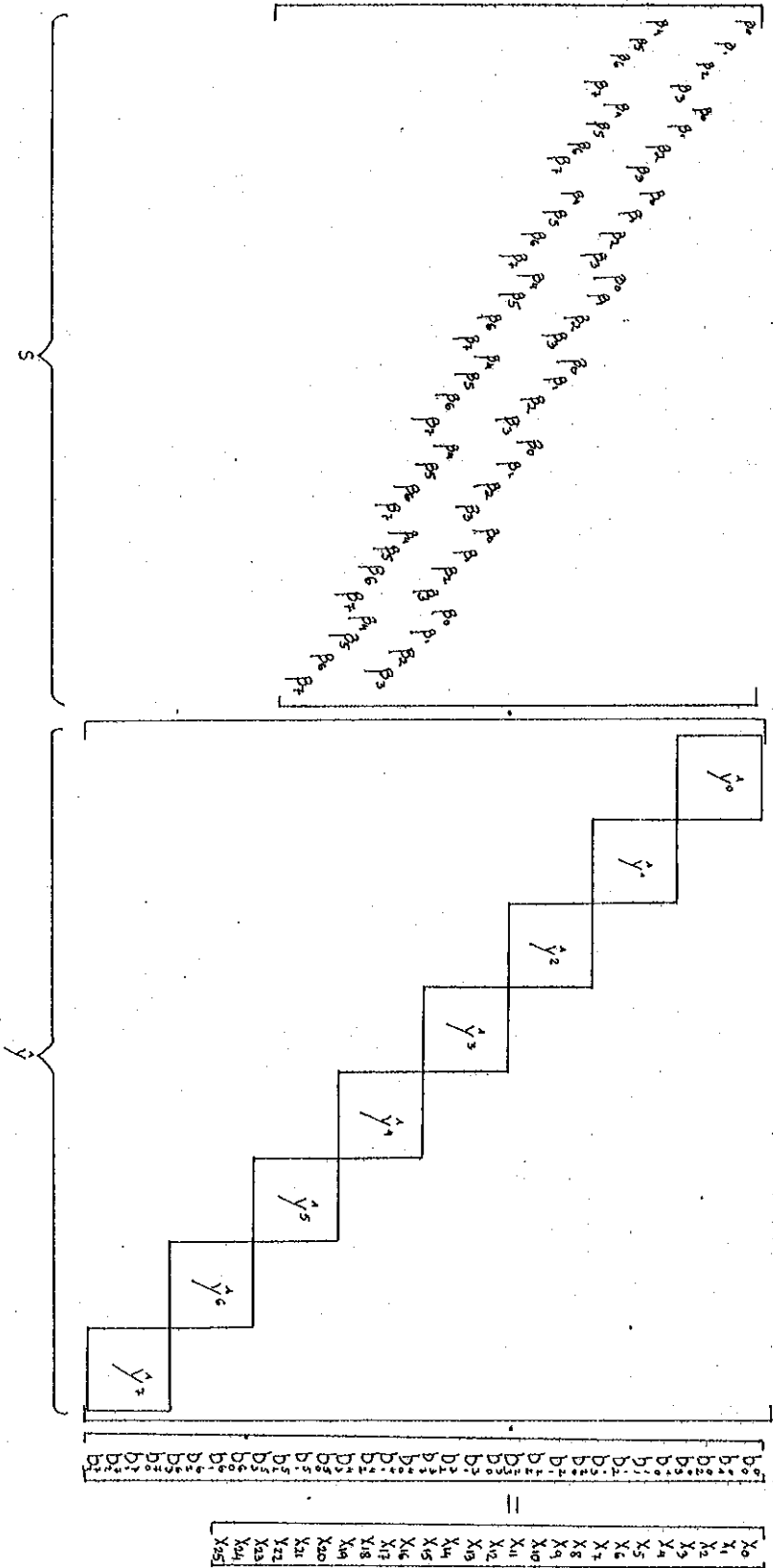
$$[s][\hat{F}][\hat{Q}] \underline{b} = \underline{\hat{x}} \quad (5.37)$$

$$[\hat{P}][\hat{F}] = [\hat{F}][\hat{Q}] \triangleq [\hat{Y}] \quad (5.38)$$

מכיון ש  $[\hat{F}]$  ו-  $[\hat{P}]$  הן מטריצות BLOCK DIAGONAL אזי גם  $[\hat{Y}]$  היא DIAGONAL BLOCK כאשר כל בלוק  $[\hat{Y}_m]$  הוא מסדר  $M \times M$ , והליך הסינטיזה יהיה:

$$[s][\hat{Y}] \underline{b} = \underline{x} \quad (5.39)$$

נתון מסנן סינטיזה עם  $N=8, M=4, R=2$  ויהי  $\beta$  וקטור מסנן הסינטיזה אזי מטריצת הסינטיזה  $[s]$  תבצע הרחבה מחזורית של כל אחת מהסדרות המתקבלות לאחר בצוע IDFT והתאמת ראשית מערכת הצירים לקבלת סדרות באורך מסנן הסינטיזה (במקרה זה הרחבה אחת), תבצע כפל של הסידרה במסנן הסינטיזה ותיצג את פעולת ה-OVERLAP ADD לשחזור הסיגנאל. תרשים 5,8 מתאר תהליך זה. מעניין לשים לב שכאשר ההרחבה המחזורית שווה למספר הקיפולים אזי מטריצת  $[s]$  שווה למטריצה  $[A]$  שעברה TRANSPOSE כשאברי מסנן הסינטיזה הוחלפו באברי מסנן האנליזה.



התיאור האלגוריתמי של תהליך סינתזה עם חריכה  
 .FIG 5.8 - AN ALGEBRAIC DESCRIPTION OF SYNTHESIS WITH  
 PERIODIC REPETITION.

גודל מטריצת האנליזה, הקשר בין  $N, M, R$  וקיום הפיתרון

5.6

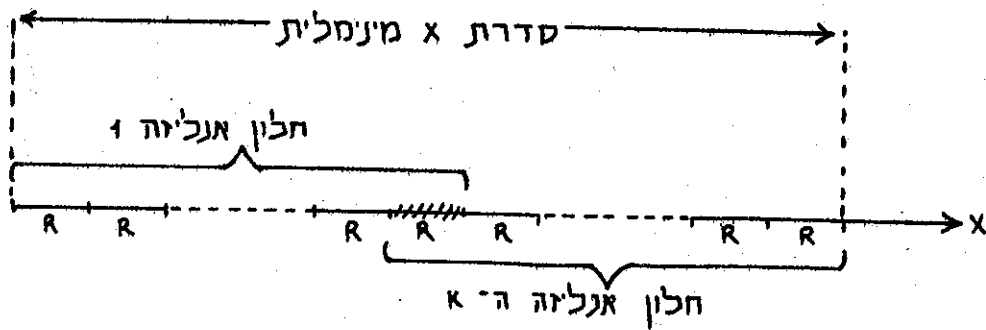
סינטיזה של אות לאחר ביצוע DSTFTA, אנלוגי במקרה של הצגה מטריצית של האנליזה לפתרון מערכת המשוואת  $\underline{b} = [C] \underline{x}$  כאשר  $[C]$  ו- $\underline{b}$  ידועים ו- $\underline{x}$  וקטור הנעלמים. ברור שהפיתרון שהינו רוצים לקבל הוא מהצורה  $\underline{b} = [C] \underline{x}$  והשאלה מתי קיים פיתרון למערכת  $\underline{b} = [C] \underline{x}$ , וכיצד מחשבים את  $[C]$  במקרה זה. לשם כך נבחן את גודל מטריצת האנליזה  $[C]$ . בדצוננו לבצע DSTFTA עם מסנן אנליזה באורך  $N, M$  דגימות בתדר וגודל צעד  $R$  נתון. נניח שוב בלי הגבלת כללית  $\text{MOD}(M, R) = 0$   $\text{MOD}(N, M) = 0$ .

הבעיה דורשת טפול בוקטור כניסה  $\underline{x}$  שכאשר העיבוד אינו בזמן אמיתי זהו ווקטור ארוך מאוד (בד"כ 8000 איברים לכל שנית דבור) ומבחינה מעשית ניתן להתייחס אליו כאל ווקטור אינסופי. כאשר העיבוד הוא בזמן אמיתי היננו חייבים להתייחס לווקטור כאינסופי מכיון שלא ניתן לחזות את המשכו. לכן פעולות האנליזה והסינטיזה מתבצעות למעשה על ווקטורים אינסופיים כאשר מטריצות האנליזה והסינטיזה גם הן אינסופיות.

לשם הצגה מטריצית של הבעיה ניתן להסתפק בווקטור  $\underline{x}$  סופי וקטן אולם עליו להיות מעל גודל מסוים הדרוש לשם הצגה מטריצית. נגדיר "סידרת  $x$  מינימלית" כסדרת ה- $x$ ים המינימלית הדרושה לשם הצגה מטריצית של הבעיה, ונפתח מושג זה עבור  $N \geq M \geq R$ .

הסדרה המינימלית היא זו שבה לפחות  $R$   $x$ -ים עוקבים יופיעו בכל המכפלות האפשריות עם אברי מטריצה  $[C]$  כלומר הגדלת  $[C]$  לא תגרום להוספת מכפלות בהם משתתפים  $R$  ה- $x$ ים הנ"ל. עלינו לבחור מטריצה  $[C]$  ו- $\underline{x}$  ולהתחיל להגדיל את  $\underline{x}$  ו- $[C]$  בהתאמה עד שנגיע למציאת  $R$  איברים עוקבים ב- $x$  שיופיעו בכל המכפלות האפשריות שלהם עם אברי המטריצה  $[C]$ . ברור שסידרה כזו קימת והיא סופית מכיון ש- $[C]$  הוא BANDED ומחזורית. תרשים 5.9 ממחיש מושג זה בצורה גרפית.





תרשים 5.9 - סדרת x מינימלית.

FIG 5.9 - MINIMAL X SEQUENCE.

המטריצה צריכה לתאר את האנליזה מהחלון הראשון עד ה- $k$  (כאשר החלון ה- $k$  זהו החלון החופף לחלון הראשון ב- $R$  איברים). זהו התיאור המינימלי עבור  $R$  האיברים המקווקוים. עבור כל מספר חלונות קטן יותר עדיין קיימים חלונות שלא נלקחו בחשבון, כמו החלון ה- $k$ , שאבריו כופלים את ה- $R$  האים המקווקוים, ועבור כל חלון נוסף כבר קיימים  $R$  איברים המופיעים בכל הכפלים האפשריים (ואלו  $R$  האיברים המקווקוים) ולכן זה לא יהיה תאור מינימלי. מעצם הגדרת המושג ברור שעבור מסנן אנליזה נתון ( $N$  נתון) אזי סדרת ה- $x$ ים המינימלית היא באורך  $2N-R$ , ואז נקבל  $N/R$  סדרות DFT כל אחד באורך  $M$ , ז"א המטריצה המינימלית הנדרשת לתאור הליכי - DSTFTA ו- DSTFTS ע"י מטריצות היא זו המתארת אנליזה וסינטיזה של סדרת ה- $x$ ים המינימלית ולכן שווה ל- $[2N-R] \times [(N/R) \times M]$ . לדוגמא עבור  $N=1024$ ,  $M=128$ ,  $R=32$  נקבל מטריצה  $2016 \times 4096$ . בכל הדוגמאות בהמשך, המטריצות שיתוארו יהיו מטריצות מינימליות או מעט גדולות יותר לשם הבהרת התהליכים. באופן כללי אם נתונה סדרת  $x$ ים באורך  $R$   $N+(P-1)$  (שלם חיובי) אזי נקבל סדרת DSTFT באורך  $P \times M$  ומטריצת האנליזה  $C$  תהיה  $C: [P \times M] \times [N+(P-1) \times R]$ .

נבחן את הקשר בין ממדי המטריצה  $[C]$  (מספר שורות ועמודות) והמשתנים  $N$ ,  $M$ ,  $R$  ו- $P$  ומתוך זה על קיום ואופי הפתרון למערכת  $\underline{x} = \underline{b}$ . מתורת האלגברה ידועים לנו שלושה סוגי פתרונות למערכת משוואות  $\underline{x} = \underline{b}$  בתלות בסוג המטריצה  $[C]$ .

א. כאשר  $C$  ריבועית ולא סינגולרית. אזי קיים פתרון יחיד למערכת הנתון ע"י :

$$\hat{x} = [C]^{-1} b \quad (5.40)$$

ב. כאשר מספר השורות גדול ממספר העמודות ודרגת המטריצה שווה למספר העמודות אזי או שקיים פתרון יחיד או שאין כלל פתרון. כאשר יש פתרון  $\hat{x}$ , אזי קיימות מטריצות  $[D]$  רבות המקיימות  $\hat{x} = [D] \cdot b$  ואנו נבחר באחת מהן ה-GENERALIZED INVERSE או כפי שנהוג לכנותה לעיתים PSEUDO INVERSE ונסמנה  $[C]^+$ . פתרון המערכת במקרה זה יהיה:

$$\hat{x} = [C]^+ b \quad (5.41)$$

ג. כאשר מספר השורות קטן ממספר העמודות או כשמספר השורות גדול ממספר העמודות ודרגת המטריצה קטנה ממספר העמודות, אזי קיימים אינסוף פתרונות למערכת ולכן אין ביכולתנו לשחזר את היא המקורי על סמך  $b$  בלבד.

נניח  $M = l \times R$  ו- $N = q \times M = q \times l \times R$  כאשר  $q$  ו- $l$  שלמים וחיוביים ממש. אזי גודל המטריצה הוא:  
מספר השורות  $P \times M =$   
מספר העמודות  $N + (P-1) \times R =$   
נבחן את היחס ביניהם על מנת ללמוד על תנאי קיום הפתרון.





$$[P \times M] \left\{ \begin{matrix} ? \\ \leq \\ \geq \end{matrix} \right\} [N + (P-1) \times R] \quad (5.42)$$

נעביר אגף לקבלת נוסחה

$$P \times (M-R) \left\{ ? \right\} (N-R) \quad (5.43)$$

והיחס צריך להתקיים לכל  $P$ ,  $P \geq N/R$

הטבלה הבאה מסכמת את היחסים האפשריים בין המשתנים  $M, N, R$  ואת השפעת יחסים אלו על צורת מטריצת האנליזה  $[C]$  היכולת לשחזר את  $x$  במדויק ואופי המטריצה  $[C]$  המשמשת לפתרון המערכת  $b \cdot [C] = \hat{x}$ .

מס' סד'	R	M	N	סוג המטריצה	אופי מטריצה [C]
.1	נתון	$M > R$	$N > M$		GENERALIZED INVERSE עם קיפולים.
.2	נתון	$M = R$	$N > M$		לא ניתן לשחזר את X.
.3	נתון	$M > R$	$N = M$		GENERALIZED INVERSE ללא קיפולים.
.4	נתון	$M = R$	$N = M$		INVERSE OF [C]

מקרה 4 זהו המקרה של DFT רגיל,  $[C]=[F][P][A]$ . היא רבועית ואלכסונית כאשר האלכסון מחזורי וכל מחזור מורכב מאברי מסנן האנליזה  $h(\lambda)$ ,  $(\lambda = 0, 1, \dots, (N-1))$ . במקרה זה מתקבלת כמטריצת היחידה  $([P]=[I])$ , ו- $[F]$  ריבועית BLOCK DIAGONAL. לכן פתרון המערכת יהיה:

$$\hat{x} = [C]^{-1}b = ([F][P][A])^{-1}b = [A]^{-1}[P]^{-1}[F]^{-1}b \quad (5.44)$$

מכיוון ש- $[P]=[I]$ , לכן  $[P]^{-1}=[I]$  ונקבל:

$$\hat{x} = [A]^{-1}[F]^{-1}b \quad (5.45)$$

מכיוון ש- $[A]$  אלכסונית אזי  $[A]^{-1}$  גם אלכסונית ואם נסמן את אברי האלכסון של  $[A]$  ב- $\lambda_i$  אזי אברי האלכסון של  $[A]^{-1}$  יהיו  $1/\lambda_i$ .  $[F]^{-1}$  זו מטריצת  $INV [F]$  ומכיוון ש- $F$  יהיה BLOCK DIAGONAL אזי  $[F]^{-1}$  גם DIAGONAL BLOCK. אם נסמן כל אחד מהבלוקים של  $[F]$  ב- $w$  נקבל ש- $[F]^{-1}[F]=[I]$  גורר שכל אחד מהבלוקים של  $[F]^{-1}$  יהיה  $[w]^{-1}$ . מכיוון ש- $[w]$  זו מטריצת DFT אזי  $[w]^{-1}$  זו מטריצת התמרת פוריה הפוכה IDFT כלומר

$$[W]_{ik}^{-1} = \frac{1}{M} \exp\left[+j \frac{2\pi}{M} i k\right] \quad (5.46)$$

$$i = 0, \dots, (M-1)$$

$$k = 0, \dots, (M-1)$$

כך קיבלנו ש-  $[W]^{-1}$  שווה ל-  $[\hat{W}]$  שהוגדרה בהליך הסינטיזה (5.23). כלומר  $[F]^{-1}$  שווה ל-  $[\hat{F}]$ . לכן הליך הסינטיזה שהתקבל זהה להליך הסינטיזה הרגיל במקרה זה ( $N=M=R$ ) וכולל ביצוע IDFT לכל אחת מהסדרות ולאחר מכן כפל כל סדרה בהופכי של חלון האנליזה לקבלת  $\hat{x}$ . במקרה זה ברורה גם הדרישה שאברי חלון האנליזה לא יתאפסו בתחום ז"א  $i=0, \dots, N-1$  כי אז  $f(i) = \frac{1}{h(i)}$  לא מוגדר ולכן  $[A]^{-1}$  לא מוגדר. במקרים אלו נהוג לבחור חלון מלבני כחלון אנליזה וזהו למעשה ה-DFT "המקובל". מקרה זה הוא פשוט ואסתפק בהסבר קצר זה.

למקרה מסי 2 אין פתרון יחיד - כלומר לא קימת סינטיזה כלשהי המאפשרת את הכלת הסיגנאל המקורי. לאותה מסקנה אם כי בדרך שונה הגיע גם PORTNOFF [34]. הוא בחן את הדרישות שעל מסנן הסינטיזה לקיים בזמן ובתדר והתברר שאלו דרישות סותרות. למרות זאת מתבצעים נסויים לקרוב מערכת יחידה גם במקרים אלו [41], אולם השיטות שפותחו משמשות בעקר לקידוד דבור.

במקרה מסי 3 ובמקרה מסי 1 כאשר  $b$  הינה סידרה חוקית (כלומר קיים  $x$  כך ש-  $[C]x = b$ ), אזי אין חשיבות איזו מטריצת סינטיזה  $[D]$  נבחר כל עוד היא תקינה:

$$[D][C] = [I] \quad (5.47)$$

ובמקרה זה נקבל:

$$\hat{x} = [D] b \quad (5.48)$$

כאשר  $[C]$  היא מסדר  $m \times n$  ( $m > n$ ) אזי  $[D]$  מסדר  $(m \times n)$  ו-  $[I]$  מסדר  $n \times n$ . אנו נבחר בתור  $[D]$  את ה- GENERALIZED INVERSE של  $C$  ( $C^\dagger$ ) והוא אכן מקיים תכונה זו.

$$[C]^\dagger [C] = [I] \quad (5.49)$$

כמו כן הוא בעל תכונה נוספת, כאשר סידרת ה-  $b$  ימים לא חוקית (דבר שאפשרי בגלל ש-  $C$  מלבנית), כלומר לא קיים  $x$  כך ש-  $[C]x = b$  אזי הפתרון  $\hat{x} = [C]^\dagger b$  מבטיח מינימום על

$$E = \| [C] \hat{x} - b \|^2 \quad (5.50)$$

כאשר -  $C = n \times m$  ( $m > n$ ) היא מעל הקומפלקסים ודרגתה שווה למספר  
העמודות ( $C \in \mathbb{C}_n^{m \times n}$ ) אזי  $[C]^\dagger$  נתון ע"י:

$$[C]^\dagger = ( [C]^* [C] )^{-1} C^* \quad (5.51)$$

כאשר  $[C]^*$  זהו  $[C]$  מחולף וצמוד [42].

יש להדגיש שה-GENERALIZED INVERSE מוגדר גם עבור  $[C]$  מדרגה נמוכה יותר מאשר  
מספר העמודות ז"א  $C \in \mathbb{C}_r^{m \times n}$  ( $r < n$ ) אולם במקרים אלו לא ניתן לשחזר את האות.  
בנספח א מפורטות ההוכחות לתכונות ה-GENERALIZED INVERSE ששפורטו לעיל.

6. סינטזתה של DSTFT לאחר מודיפיקציה - MDSTFT הנובעת מהגישה האלגברית

6.1 סינטזתה של MDSTFT על פי הגישה האלגברית

בעית הסינטזתה של DSTFT ו-MDSTFT כפי שתוארה בפרק 3, הופכת עפ"י הגישה האלגברית במקרים 1 ו-3 לבעיה של חישוב ה-GENERALIZED INVERSE עבור מטריצת האנליזה  $[C]$  ( $[C] = [F][P][A]$ ). חישוב ה-GENERALIZED INVERSE עונה במקרה זה על שתי הבעיות שהוצגו לגבי שחזור אות מ-DSTFT ומ-MDSTFT גם יחד. הוא מבטיח קיום מערכת יחידה  $[I] = [C]^{\dagger}[C]$  ולכן הליך הסינטזתה שהוצג באופן כללי:

$$\hat{x} = [C] b \quad (6.1)$$

נעזר עם הבחירה  $[I] = [C]^{\dagger}[C]$  מתקבל:

$$\hat{x} = [C]^{\dagger} b \quad (6.2)$$

אם  $b$  הנה סידרה חוקית כלומר

$$b = [C] x \quad (6.3)$$

נקבל:

$$\hat{x} = [C]^{\dagger} [C] x = [I] x = x \quad (6.4)$$

קיבלנו שפתרון זה מבטיח שחזור מדויק של האות עבור DSTFT חוקי. עבור DSTFT שעבר מודיפיקציה (MDSTFT) ואינו חוקי ניבחנו כיצד הפתרון המבוסס על INVERSE GENERALIZED מתיחס לקריטריון של מינימום שגיאה דיבועית כפי שהוגדר (3.37).

$$D(\hat{x}(n), Y_k(SR)) = \sum_{S=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{M-1} |\hat{X}_k(SR) - Y_k(SR)|^2 \quad (6.5)$$

תאור מטריצי של האנליזה והסינטזתה יתו:

$$D(\hat{x}(n), Y_k(SR)) = \|[C][D] \underline{b} - \underline{b}\|^2 \quad (6.6)$$

כאשר  $\underline{b}$  וקטור ה-MDSTFT,  $[D]$  - מטריצת סינטיזה, ו- $[C]$  מטריצת אנליזה. נציב  $[D]=[C]^\dagger$  ונקבל:

$$D(\hat{x}(n), Y_k(SR)) = \|[C][C]^\dagger \underline{b} - \underline{b}\|^2 = \|[C]\hat{x} - \underline{b}\|^2 \quad (6.7)$$

כאשר  $\hat{x}$  מתאר את וקטור האות המשוחזר מה-MDSTFT עפ"י GENERALIZED INVERSE. מהגדרת ה-GENERALIZED INVERSE (5.51) נובע ש- $\hat{x} = [C]^\dagger \underline{b}$  הוא הוקטור המבטיח מינימום על  $\|[C]\hat{x} - \underline{b}\|^2$  ולכן גם על  $D(\hat{x}(n), Y_k(SR))$ , ורק פתרון זה עונה על שתי הבעיות שהוצגו. כדי לממש פתרון זה עלינו לבחון את דרך חישוב  $[C]^\dagger$  ( $[C]$  הינה למעשה מטריצה אינסופית) והאינטרפטציה הפיסיקלאית של בצוע הסינטיזה ע"י  $\hat{x} = [C]^\dagger \underline{b}$  (למשל האם סינטיזה כזו תואמת את מודל הסינטיזה כפי שתואר בתרשים 3.8).

6.2 חישוב  $[C]^\dagger$  - GENERALIZED INVERSE OF  $[C]$

נבחן תחילה את דרך חישוב  $[C]^\dagger$  עפ"י [42].

$$[C]^\dagger = ([C]^* [C])^{-1} [C]^* \quad (6.8)$$

נבחין בארבעה מקרים עבור  $[C]$ :

א. לפי (5.2)  $[C] = [F][P][A]$

ב. או לפי (5.7)  $[C] = [F][U][P][A]$

ג. לפי (5.3)  $[C] = [Q][F][A]$

ד. או לפי (5.8)  $[C] = [V][Q][F][A]$

נבחן את אופו הישוב  $[C]^T$  עבור כל אחד מארבעת המקרים שפורטו לעיל:

במקרה א:

$$\begin{aligned}
 [C]^T &= (([F][P][A])^* [F][P][A])^{-1} ([F][P][A])^* \\
 &= ([A]^* [P]^* [F]^* [F][P][A])^{-1} [A]^* [P]^* [F]^* \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

$[F]^*$  זוהי מטריצת  $[F]$  מוחלפת וצמודה. מכיון ש- $F$  היא BLOCK DIAGONAL (כל בלוק  $w$ ) גם  $[F]^*$  היא BLOCK DIAGONAL כשכל בלוק הוא  $[w]^*$ . מכיון ש- $w$  סימטרית (מטריצת DFT) אזי  $[w]^* = [w]^T$  ז"א

$$[w]_{ik}^* = \exp\left[+j \frac{2\pi}{M} ik\right] \quad \begin{matrix} i=0, \dots, (M-1) \\ j=0, \dots, (M-1) \end{matrix} \quad (6.10)$$

ומטריצה זו כמעט זהה למטריצת DFT המוגדרת:

$$[w]_{ik}^{-1} = \frac{1}{M} \exp\left[+j \frac{2\pi}{M} ik\right] \quad (6.11)$$

$$[F]^* = M \cdot [F]^{-1} = M[\hat{F}] \quad \text{כלומר} \quad (6.12)$$

הכפל  $[F]^* [F]$  מתבצע לפי בלוקים ולכן ניתן לקבל:

$$[w^* w]_{ik} = \sum_{l=0}^{M-1} \exp\left[j \frac{2\pi}{M} i \cdot l\right] \exp\left[-j \frac{2\pi}{M} l \cdot k\right] =$$

$$= \sum_{l=0}^{M-1} \exp\left[j \frac{2\pi}{M} l(i-k)\right] = \begin{cases} M & i=k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6.13)$$



$$[F]^* [F] = M[I] \quad (6.14)$$

$[P]^*$  זוהי מטריצת הסבוב ומכיוון שהיא ממשיית נקבל  $[P]^* = [P]^T$ .  
 כמו כן  $[P]$  מטריצה BLOCK DIAGONAL כשכל בלוק  $[P^S]$  לכו  $[P]^T$  גם היא  
 BLOCK DIAGONAL כאשר כל בלוק יהיה  $[P^S]^T$  ז"א

$$[P^S]^T_{ik} = \begin{cases} 1 & ((k-i))_M = ((SR))_M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6.15)$$

מעניין לשים לב שקבלנו ש-  $[P]^*$  זהה למטריצת  $[P]$  כפי שהוגדרה בהליך  
 הסינטיזה נבחן את הכפל  $[P]^* [P]$ , הוא מתבצע לפי בלוקים ונקבל:

$$[P^* \cdot P]_{ik}^S = \sum_{l=0}^{M-1} [P^S]^T_{il} \cdot [P^S]_{lk} = P_{i((i+SR))_M}^{S^T} \cdot P_{((i+SR))_M, k}^S =$$

$$= \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6.16)$$

ולכן

$$[P^* P]^S = [I] \quad (6.17)$$

ונקבל ש-

$$[P]^* [P] = [I] \quad (6.18)$$

נציב זאת בחישוב C ונקבל:

$$\begin{aligned}
 [C]^T &= ([A]^* [P]^* [F]^* [F] [P] [A])^{-1} [A]^* [P]^* [F]^* = \\
 &= ([A]^* ([P]^* ([F]^* [F]) [P]) [A])^{-1} [A]^* [P]^* [F]^* =
 \end{aligned}$$

M שקאלר

$$\begin{aligned}
 &= ([A]^* ([P] M [P]) [A])^{-1} [A]^* [P]^* [F]^* = \\
 &= (M [A]^* ([P]^* [P]) [A])^{-1} [A]^* [P]^* [F]^* = \\
 &= M^{-1} ([A]^* [A])^{-1} [A]^* [P]^* [F]^* =
 \end{aligned}$$

מכיוון שגם A ממשיית מקבל :

$$\begin{aligned}
 &= ([A]^T [A])^{-1} [A]^T [P]^* M^{-1} [F]^* = \\
 &= ([A]^T [A])^{-1} [A]^T [\hat{P}] [\hat{F}] \quad (6.19)
 \end{aligned}$$

כלומר הליך הסינטיזה כולל:

$$\hat{x} = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T [\hat{P}] [\hat{F}] \underline{b} \quad (6.20)$$

ז"א בצוע DFS לכל אחת מהסדרות המרכיבות את  $\underline{b}$ , ביצוע הזזה ציקלית לשם שיחזור מערכת הצירים וכפל ב-  $(A^T A)^{-1} A^T$  בדומה לתהליך שהוסבר ב- (5.21)  $\hat{x} = [S] [\hat{P}] [\hat{F}] \underline{b}$ , כאשר מטריצת "כפל בחלון סינטיזה וכיווץ האות"  $[S]$  נתונה ע"י

$$[S] = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T \quad (6.21)$$

ב. במקרה זה

$$\begin{aligned}
 [C]^T &= (([F][U][P][A])^*([F][U][P][A]))^{-1}([F][U][P][A])^* = \\
 &= ([A]^*[P]^*[U]^*[F]^*[F][U][P][A])^{-1}[A]^*[P]^*[U][F]^* \quad (6.24)
 \end{aligned}$$

מכיוון ש-  $[U]$  היא BLOCK DIAGONAL וכל בלוק  $[U^S]$  אזי  $[U]^*$  גם היא BLOCK DIAGONAL כאשר כל בלוק יהיה  $[U^S]^*$ . מכיוון ש  $[U]$  מקשיח נקבל ש-

$$[u^S]^*_{ik} = [u^S]^T_{i,k} = \begin{cases} 1 & ((i-j))_M = M/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6.25)$$

קיבלנו ש-  $[u]^* = [u]$  ו-  $[u]^* = \hat{u}$  כאשר  $[\hat{u}]$  מוגדר במליך הסינטיזה. נבחן את הכפל  $[U]^*[U]$ ; הוא מתבצע לפי בלוקים ונקבל:

$$\begin{aligned}
 [U^S]^*[U^S]_{ik} &= \sum_{l=0}^{M-1} U^S_{i,l} \cdot u_{l,k} = u^S_{i((i-M/2))_M} \cdot u^S_{((k-M/2))_{M,k}} = \\
 &= \begin{cases} 1 & i=k \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (6.26)
 \end{aligned}$$

לכן

$$[U^S]^*[U^S] = [I] \quad (6.27)$$

ונקבל

$$[U]^* [U] = [I] \quad (6.28)$$

כך נקבל:

$$\begin{aligned} [C]^T &= (M[A]^T [P]^T [U]^* [U] [P] [A])^{-1} [A]^* [P]^* [U]^* [F]^* = \\ &= ([A]^T [A])^{-1} [A]^T [P]^* [U]^* [F]^* = \\ &= ([A]^T [A])^{-1} [A]^T \hat{P} \hat{U} \hat{F} \end{aligned} \quad (6.29)$$

והליך הסינטיזה במקרה זה מתלכד עם הסינטיזה "הרגילה" המוגדרת ב-(5.26) כאשר

$$[S] = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T$$

ג. במקרה זה

$$\begin{aligned} [C]^T &= (([Q][F][A])^* [Q][F][A])^{-1} ([Q][F][A])^* = \\ &= ([A]^* [F]^* [Q]^* [Q][F][A])^{-1} [A]^* [F]^* [Q]^* \end{aligned} \quad (6.30)$$

מכיוון ש-  $[Q]$  אלכסונית כאשר וקטור האלכסון מורכב מווקטורים  $q^S$  באורך  $M$  אזי גם  $[Q]^*$  אלכסונית ומורכבת מווקטורים  $q^{*S}$  באורך  $M$  המוגדרים

$$(q^{*S})_K = W_M^{SRK} \quad (6.31)$$

וקיבלנו ש  $[Q]^* = \hat{Q}$  המוגדר בהליך הסינטיזה (5.26). מכיוון שאלו מטריצות אלכסוניות הכפל  $[Q]^* [Q]$  מתבצע עיני כפל איבר איבר ונקבל:

$$(6.32)$$

$$[Q^* Q]_K^S = q_K^{S*} \cdot q_K^S = W_M^{SRK} W_M^{-SRK} = 1$$

$$[Q]^*[Q] = [I] \quad \text{לכו} \quad (6.33)$$

ולכו

$$\begin{aligned} [C]^T &= ([A]^*[F]^*([Q]^*[Q])([F][A])^{-1}[A]^T[F]^*[Q])^* = \\ &= ([A]^T[A])^{-1}[A]^T[\hat{F}][\hat{Q}] \end{aligned} \quad (6.34)$$

כלומר הליך הסינטיזה זהה לזה המוגדר ב-(5.22) כאשר מטריצת כפל בחלון סינטיזה וכיוון הסיגנאל [s] מוגדרת ע"י

$$[s] = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T$$

ד במקרה זה

$$c^T = ([V][Q][F][A])^*[V][Q][F][A])^{-1}([V][Q][F][A])^* = \quad (6.35)$$

$$= ([A]^*[F]^*[Q]^*[V]^*[V][Q][F][A])^{-1}[A]^*[F]^*[Q]^*[V]^*$$

מכיון ש [v] אלכסונית וממשית אזי  $[v]^* = v$ , וגם  $[v]^* = \hat{v}$  כפי שהוגדרה בהליך הסינטיזה. נבחן את הכפל  $[v]^*[v]$

(6.36)

$$[v]^*[v] = (v)_{\lambda,\lambda} (v)_{\lambda,\lambda} = (-1)^\lambda (-1)^\lambda = (-1)^{2\lambda} = ((-1)^2)^\lambda = 1^\lambda = 1$$

ולכו

$$[v]^*[v] = [I] \quad (6.37)$$

כך נקבל

$$[C]^T = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T[\hat{F}][\hat{Q}] \quad (6.38)$$

כלומר הליך הסינטיזה זהה לזה המוגדר עפ"י נוסחה (5.27) כאשר

$$[s] = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T$$

כך קיבלנו שבכל המקרים בעית הסינטיזה האופטימלית מצטמצמת לבעית חישוב מטריצה  $(A^T A)^{-1} A^T$  והאינטרפטציה הפיסיקלית של ביצוע הכפל:

$$\hat{x} = [(A^T A)^{-1} A^T] y \quad (6.39)$$

כאשר

$$y = \begin{cases} [\hat{P}][\hat{F}] b & \text{מקרה א.} \\ [\hat{P}][\hat{U}][\hat{F}] b & \text{מקרה ב.} \\ [\hat{F}][\hat{Q}] b & \text{מקרה ג.} \\ [\hat{F}][\hat{Q}][\hat{V}] b & \text{מקרה ד.} \end{cases} \quad (6.40)$$

חישוב  $y$  בכל אחד מארבעת המקרים הינו תהליך פשוט, וקטור  $b$  מורכב מסדרות באורך  $M$  המשורשרות ימין. כל אחת מהמטריצות  $[\hat{P}]$ ,  $[\hat{U}]$ ,  $[\hat{F}]$  ו-  $[\hat{V}]$  הינה מטריצה BLOCK DIAGONAL כאשר כל בלוק הוא מסדר  $M \times M$ , ולכן חישוב  $y$  שקול לפעולת כל בלוק בנפרד על אחת הסדרות ושרשור כל אחת מהסדרות המתקבלות באורך  $M$  לוקטור  $y$ , כמו כן קיבלנו שהליך הסינטיזה האופטימלי מתלכד עם המודלים המקובלים לסינטיזה כפי שתוארו בתרשימים 3.6 ו- 3.8 עד לשלב האחרון של OVERLAP ADD עבור המקרה  $N=M$  ו- PERIODIC REPEAT OVERLAP ADD עבור המקרה  $N > M$  שלב שיבחן בפרקים הבאים.

כל הפיתוח לעיל נעשה בהנחה ש-  $C$  שהינה מטריצה מלבנית  $(M > N)$  דרגתה שווה למספר העמודות. נבחן הנחה זו עבור כל אחת מהצורות ש-  $C$  יכולה לקבל

$$[C] = [F][P][A] \quad \text{א.}$$

$$[C] = [F][U][P][A] \quad \text{ב.}$$

$$[C] = [Q][F][A] \quad \text{ג.}$$

$$[C] = [V][Q][F][A] \quad \text{ד.}$$

כל אחת מהמטריצות  $[F]$ ,  $[P]$ ,  $[U]$ ,  $[Q]$ ,  $[V]$  היא מטריצה רבועית  $m \times m$  מדרגה  $m$  וניתן להוכיח זאת מעצם בנית המטריצות או על ידי כך שבנינו לכל אחת את המטריצה ההופכת משמאל. עבור  $[V]$  הגדרנו כהליך הסינטיזה את  $[\hat{V}]$  המקיימת עפ"י (6.37)  $[\hat{V}][V] = [I]$  ובמקרה זה עפ"י משפט הדרגות דרגת  $[V]$  שווה ל- $m$  בצורה דומה הגדרנו את  $[\hat{P}]$ ,  $[\hat{U}]$ , ו- $[\hat{Q}]$  המקיימים בהתאמה

$$[\hat{F}][F] = [I] \quad (6.41)$$

$$[\hat{P}][P] = [I] \quad (6.42)$$

$$[\hat{U}][U] = [I] \quad (6.43)$$

$$[\hat{Q}][Q] = [I] \quad (6.44)$$

ולכן דרגת כל אחת מהמטריצות שווה ל- $m$ .

בכל ארבעת המקרים נותר לבחון את המטריצה  $A: m \times m$ . מכיון שכפל מטריצה במטריצה לא סינגולרית לא משנה דרגה, דרגת  $[A]$  שווה לדרגת  $[A]$  ולכן קיום הפתרון מותנה בכך שדרגתה תשווה ל- $m$ . בפרק 7 נבחן משמעות תנאי זה לגבי מטריצת  $[A]$  המתארת אנליזה של אות ללא קיפולים בזמן ובפרק 8 עבור מטריצה  $[A]$  המתארת גם קיפולים בזמן.

ברצוננו לקבל  $\hat{x}$  ממשי לשם כך נניח שהסינטיזה מתבצעת ע"י:

$$\hat{x} = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T[\hat{P}][\hat{F}]b \quad (6.45)$$

מכיון ש- $A$  ממשיית אזי  $[(A^T A)^{-1}A^T]$  גם ממשיית,  $[\hat{P}]$  זו מטריצת פרמוטציה וברור שהיא ממשיית ולכן תנאי מספיק לכך ש- $\hat{x}$  תהיה ממשיית הוא ש- $[\hat{F}]b$  יהיה ממשי. מכיון ש- $[\hat{F}]$  זו מטריצת התמרת פוריה הפוכה של סדרות באורך  $m$  המשורשרות יחדיו, די לדרוש ש- $b$  שהוא וקטור המורכב מסדרות באורך  $m$  יהיה בנוי כך שכל סדרה תהווה התמרת פוריה של אות ממשי כלומר ערך מוחלט סימטרי ופאזה אנטי סימטרית.

$$\hat{x}[k] = x^*(M-k) \quad (6.46)$$

נותר להוכיח שכאשר הסינטיזה מתבצעת ע"י

$$\hat{x} = ([A]^T[A])^{-1}[A]^T[\hat{F}]\hat{q}b \quad (6.47)$$

תנאי זה על  $b$  עדיין מבטיח קבלת  $\hat{x}$  ממשי.

הוכחה :

$$[\hat{P}][\hat{F}] = [\hat{F}][\hat{Q}] \quad \text{מכיון ש-} \quad (6.48)$$

ברור שהתנאי שהוגדר על  $b$  הינו תנאי מספיק לקבלת  $\hat{x}$  ממשי ללא תלות בשיטת הסינטיזה.



7. סינטיזה של MDSTFT עבור אנליזה ללא קיפולים בזמן

7.1 סינטיזה על פי הגישה המקובלת

המאמר היחידי שדן עד כה בבטיה של שיחזור אות מהתמרת פוריה שעברה מודיפיקציה בצורה מפורשת הינו המאמר של LIM & GRIFFIN [38]. הפתרון ב-[38] מבוסס על שתי הנחות יסוד הפוגעות בכלליותו ובחשיבותו המעשית:

1. הפתוח הוא להתמרת פוריה לזמן קצר הדגומה בזמן ורציפה בתדר, כלומר עוסקים ב- $X(SR, \omega)$  כאשר  $\omega$  משתנה רציף, אולם מבחינה מעשית האלגוריתמים מתבצעים עם  $X(SR, k)$  כלומר על התמרה הכוללת גם דגימה בתדר.

2. מניחים שתלונ האנליזה  $h(n)$  ממשי באורך  $L$  ואינו מתאפס בקטע  $0 \leq n \leq L-1$ .

עפ"י הנחות אלו מקבלים את מסנו הסינטיזה האופטימלי.

להבהרת השיטה נסמו ב-

$$X_A(SR, \omega) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_A(SR, l) e^{-j\omega l} \quad (7.1)$$

כאשר

$$x_A(SR, l) = h(SR - l) x(l) \quad (7.2)$$

ה-MDSTFT הנתון יסומו ב- $Y_A(SR, \omega)$ , האות המשוחזר  $\hat{x}(n)$ , והתמרת פוריה לזמן קצר שלו ב- $\hat{X}_A(SR, \omega)$ . מטרתם מציאת  $\hat{x}(n)$  כך שהתמרת פוריה לזמן קצר שלו תהיה קרובה ככל האפשר ל-MSTFT הנתון במובן של מינימום שגיאה ריבועית. כמו כן הוגדרה פונקצית מרחק  $D$  באופן הבא:

$$D[\hat{x}(n), Y_A(SR, \omega)] = \sum_{S=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\hat{X}_A(SR, \omega) - Y_A(SR, \omega)]^2 d\omega \quad (7.3)$$

עפ"י משפט פרטבל נקבל:

$$D[\hat{x}(n), Y_A(SR, \omega)] = \sum_{S=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [\hat{x}_A(SR, l) - y_A(SR, l)]^2 \quad (7.4)$$

כאשר:

$$y_A(SR, l) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y_A(SR, \omega) e^{j\omega l} d\omega \quad (7.5)$$

למציאת מינימום על  $\hat{D}$ .

במידה ומתחשבים בדגימה בתדר יש למעשה למצא מינימום על הפונקציה  $\hat{D}$  המוגדרת:

$$\hat{D}[X^1(n), Y(SR, k\Omega_M)] = \sum_{S=-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{M-1} [X^1(SR, k\Omega_M) - Y(SR, k\Omega_M)]^2 \quad (7.6)$$

עפ"י משפט פרטבל מתקבל:

$$\hat{D}[X^1(n), Y(SR, k\Omega_M)] = \sum_{S=-\infty}^{\infty} \frac{1}{M} \sum_{l=SR-M+1}^{SR} \left[ \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_A(SR, l+k\cdot M) - y(SR, l) \right]^2 \quad (7.7)$$

כאשר

$$y(SR, l) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} Y(SR, k\Omega_M) \exp[j\Omega_M k \cdot l] \quad (7.8)$$

כאשר  $N=M$  נקבל:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_A(SR, l+k\cdot M) = X_A(SR, l) \quad (7.9)$$

$$D = \sum_{S=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} [X_A(SR, l) - y_A(SR, l)]^2 =$$

כלומר

$$= \sum_{S=-\infty}^{\infty} \sum_{l=SR-M+1}^{SR} [X_A(SR, l) - y_A(SR, l)]^2 = M \cdot \hat{D} \quad (7.10)$$

לכן  $\hat{X}^1(n)$  המבטיח מינימום על  $\hat{D}$ , מכיון ש- $M$  קבוע, מבטיח מינימום גם על  $D$ . קיבלנו שהפתרון המוצע במאמר, שפותח עבור MSTFT הדגום רק בזמן, במקרה של  $M=N$  זהה לפתרון עבור MSTFT כלומר התמרה הדגומה בזמן ובתדר.

## 7.2 טינטיזה על פי הגישה האלגברית

נפתח כעת את נוסחת הטינטיזה של אות מ-MSTFT כאשר  $M=N$  על פי הגישה האלגברית שהוצגה בפרקים הקודמים. נבחן תחילה את התנאים לקיום הפתרון כלומר את התנאים לכך שדרגת מטריצה  $[A]$  תשווה למספר העמודות. תנאי הכרחי לכך הוא שכל אחד מוקטורי העמודות לא ישווה זהותית לוקטור האפס. לכאורה היה עלינו גם לדרוש שכל הוקטורים יהיו בלתי תלויים אולם מכיון שהאברים השונים מאפס בכל אחד מוקטורי העמודות הם בשורות שונות (במטריצה  $A$  כל שורה מכילה רק איבר אחד) תנאי אי התאפסות מבטיח גם אי תלות, ולכן זהו גם תנאי מספיק. התבוננות בדוגמא בתרשים 5.2 מבירה דרישה זו.

במטריצה A (ללא תלות בסדר) ניתן למצא  $2N-R$  וקטור עמודות שונים.  $(N-R)$  וקטורי העמודות השמאליות,  $(N-R)$  וקטורי העמודות ימניות, ו- $R$  וקטורים אמצעיים המופיעים בצורה מחזורית P פעמים (P שלם חיובי ממשי).

$N-R$  הוקטורים השמאליים נתונים ע"י:

$$P(i) = \{h(k+m \cdot R) \mid k = ((i))_R, m=0, \dots, \lfloor i/R \rfloor\} \quad i=0, \dots, (N-R-1) \quad (7.11)$$

R הוקטורים האמצעיים נתונים ע"י:

$$P(i) = \{h(i+m \cdot R) \mid m=0, 1, \dots, \lfloor i/R \rfloor\} \quad i=0, \dots, (R-1) \quad (7.12)$$

ו-  $N-R$  הוקטורים הימניים נתונים ע"י:

$$P(i) = \{h(N-1-k-mR) \mid k = ((i))_R, m=0, \dots, \lfloor i/R \rfloor\} \quad i=0, \dots, (N-R-1) \quad (7.13)$$

יש לשים לב שהתנאים לגבי  $(N-R)$  הוקטורים השמאליים ו- $(N-R)$  הוקטורים הימניים אינם הכרחיים אלא לצורך שחזור מוחלט של האות כולל תופעת המעבר. אם נותר על הדרישה לשיחזור תופעת המעבר  $(N-R)$  הנקודות הראשונות ו- $(N-R)$  הנקודות האחרונות, אזי התנאי ההכרחי הוא התנאי לגבי R הוקטורים האמצעיים שזהו תנאי חלש יותר מהתנאי שנדרש ע"י GRIFFIN & LIM - אי התאפסות המסנו באינטרוול. מענין לשים לב שהוקטורים האמצעיים שהוגדרו אלו למעשה ה-POLYPHASE של מסנו האנליזה [35], ולכן התנאי לשיחזור האות הוא שאף אחד מה-POLYPHASE של מסנו האנליזה לא ישווה זהותית לאפס (אכרים בודדים רשאים להיות אפס).

הפתרון האופטימלי עפ"י הגישה האלגברית מובסס על GENERALIZED INVERSE של מטריצת האנליזה. על פי פרק 6 תבעיה בחשוב ה-GENERALIZED INVERSE מתמקדת בחישוב  $[A]^T([A]^T[A])^{-1}[A]^T$  (בהנחה ש- $[A]$  מדרגה  $n$ ), מכיון ש- $[A]$  היא מסדר השואף לאינסוף, חישוב  $[A]^T([A]^T[A])^{-1}[A]^T$  ניראה לכאורה לא מעשוי. כאשר  $n=m$  קיימת הפרדה ב-y-ים, ז"א כל  $y_j$  נקבע ע"י  $x_i$  אחד בלבד וכל  $x_i$  קובע מספר  $y_j$ -ים (בדי"כ  $n/R$ ).

אם נחזור לדוגמא מתרשים 5.2 ונשכתבה מחדש עפ"י הנוסחה  $[A]x=y$  ונבחן את  $x_6$  נקבל עבורו את סט המשוואות הבא:

$$\begin{aligned} d_6 \cdot x_6 &= y_6^0 \\ d_4 \cdot x_6 &= y_4^1 \\ d_2 \cdot x_6 &= y_2^2 \\ d_0 \cdot x_6 &= y_0^3 \end{aligned}$$

אם נכתוב זאת בצורה מטריצית נקבל:

(7.14)

$$\begin{bmatrix} d_6 \\ d_4 \\ d_2 \\ d_0 \end{bmatrix} \cdot [x_6] = \begin{bmatrix} y_6^0 \\ y_4^1 \\ y_2^2 \\ y_0^3 \end{bmatrix} \rightarrow \tilde{A} x = \underline{y}$$

ויש לנו כאן בעיה של שטרוך גודל עפ"י מספר מדידות.

מספר המדידות שילקח בחשבון הוא  $M/R$  חוץ מאשר במקרי השפה (M-R) ה-x-ים הראשונים ו-(M-R) האחרונים (בוקטור) וכאשר אחת ה- $d_i$  שווה לאפס. במקרה זה נמחק את השורה ונפתור בעיה מדרגה נמוכה יותר.

עפ"י ה- GENERALIZE INVERSE הפתרון הוא

$$\begin{aligned} x &= (\tilde{A}^T \tilde{A})^{-1} \tilde{A}^T \underline{y} = \frac{1}{d_6^2 + d_4^2 + d_2^2 + d_0^2} \cdot \tilde{A}^T \underline{y} = \\ &= \frac{1}{d_6^2 + d_4^2 + d_2^2 + d_0^2} \cdot [d_6, d_4, d_2, d_0] \underline{y} \end{aligned} \quad (7.15)$$

נסמן ב- $[s]$  את המטריצה  $[(\tilde{A}^T \tilde{A})^{-1} \tilde{A}^T]$  כי היא מהווה למעשה מטריצת סינטיזה עבורנו.

כמה מטריצות שונות כאלו ניתן לבנות? בחינת דרך בנית המטריצה מוכיחה שקימות R מטריצות סינטיזה שונות ובמקרה שלנו 2. עבור  $x_7$  נקבל:

$$s_2 = \frac{1}{d_7^2 + d_5^2 + d_3^2 + d_1^2} [d_7, d_5, d_3, d_1] \quad (7.16)$$

עבור  $x_8$  נקבל את  $s_1$  ועבור  $x_9$  את  $s_2$  וחוזר חלילה. קיבלנו למעשה סינטיזה של סיגנאל ע"י כפל של  $\underline{y}$  ב- $[\tilde{A}]^T$  שזוהי למעשה סינטיזה רגילה במובן של SOLA עם מסנן סינטיזה השווה למסנן האנליזה ז"א

$$x(n) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} h(sR-n) y_A(sR, n) \quad (7.17)$$

ושיקולו לפי  $(\tilde{A}^T \tilde{A})^{-1}$  שזהו משחנה שעבור  $x(n)$  שווה ל-  $\sum_{s=-\infty}^{\infty} h^2(n-sR)$  וקיבלנו:

$$x(n) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} h^*(sR-n) y_A(sR, n) \quad (7.18)$$

כאשר

$$h^*(i) = \frac{h(i)}{\sum_{p=-\infty}^{\infty} h^2(i-pR)} \quad (7.19)$$

נציב זאת לחוד נוסחת ה-WOLA ונקבל:

$$x(n) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} f(sR-n) y_A(sR, n) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{h(sR-n)}{\sum_{p=-\infty}^{\infty} h^2(sR-n-pR)} \cdot y_A(sR, n) \right] =$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{h(mR-n)}{\sum_{p=-\infty}^{\infty} h^2(s-p)R-n} \right] \cdot y_A(sR, n) =$$

$$= \sum_{s=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{h(mR-n)}{\sum_{q=-\infty}^{\infty} h^2(qR-n)} \right] \cdot y_A(sR, n) = \quad \text{נסמן } q=s-p$$

$$= \frac{\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(sR-n) y_A(sR, n)}{\sum_{q=-\infty}^{\infty} h^2(qR-n)} = \frac{\sum_{s=-\infty}^{\infty} h(sR-n) y_A(sR, n)}{\sum_{s=-\infty}^{\infty} h^2(sR-n)} \quad (7.20)$$

שזהו בדיוק הפתרון המוצע ע"י GRIFIN & LIM במאמר והוכחנו בסעיף 6.1 שהוא טוב גם עבור המקרה הדיסקרטי כש-  $N=M$ .

ניתן להסביר את הפתרון שהתקבל גם בצורה שונה. הפתרון הכללי הוא  $\hat{x} = ([A]^T [A])^{-1} [A]^T y$ . זוהי סינטיזה של האות בשוטף WOLA כאשר מסנו הסינטיזה שווה למסנו האנליזה. במקרה ש-  $m=n$  מקבל ש-  $[A]^T [A]$  זו מטריצה אלכסונית שאברי אלכסונה ידועים מראש (ללא תלות בסדר המטריצה) אם נסמן ב-  $\Delta$  את וקטור האלכסון  $\Delta = \{\lambda_i\}$  אזי  $([A]^T [A])^{-1}$  גם היא מטריצה אלכסונית כאשר באלכסונה הוקטור  $\Delta^{-1}$ .

ולכן לאחר בצוע סינטיזה עם מסנו אנליזה נקבל  $\{x_i\} = \{y_i\}$   
 $x_i = \frac{1}{\lambda_i} y_i$  ולקבלת ה-x האופטימלי נותר לבצע

הוקטור  $y$  מורכב באופן הבא: (M-R) האברים הראשונים ו-(M+R) האברים האחרונים הם "תופעת מעברי" ונתעלם מהם (מכיוון שאנו דנים במטריצות מסדר שואף ל- $\infty$  הזנחנו מספר סופי וקטן של איברים וההזנחה מותרת). שאר אברי האלכסון מורכבים מסדרה מחזורית (במחזור R) כאשר כ"א מאברי הסידרה שווה ל- $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \alpha^2 (i-mR)$   
 נבחר זאת בדוגמא: תרשים 7.1 מתאר את המטריצה  $([A]^T[A])$  עבור מטריצת האנליזה בתרשים 5.2.

מסגרת את המטריצה הפנימית שהיא זו שייתנפח" עם הגדלת הסדר של [A]. מכיוון שאברי האלכסון ידועים מראש ניתן לבצע את הסינטיזה ב- REAL TIME (אבל עם השהייה) ואין צורך להמתין לקבלת [A] הסופית (שהיא מסדר שואף ל- $\infty$ ) לשם חשוב  $([A]^T[A])^{-1}$ . נוסחת הסינטיזה המתקבלת:

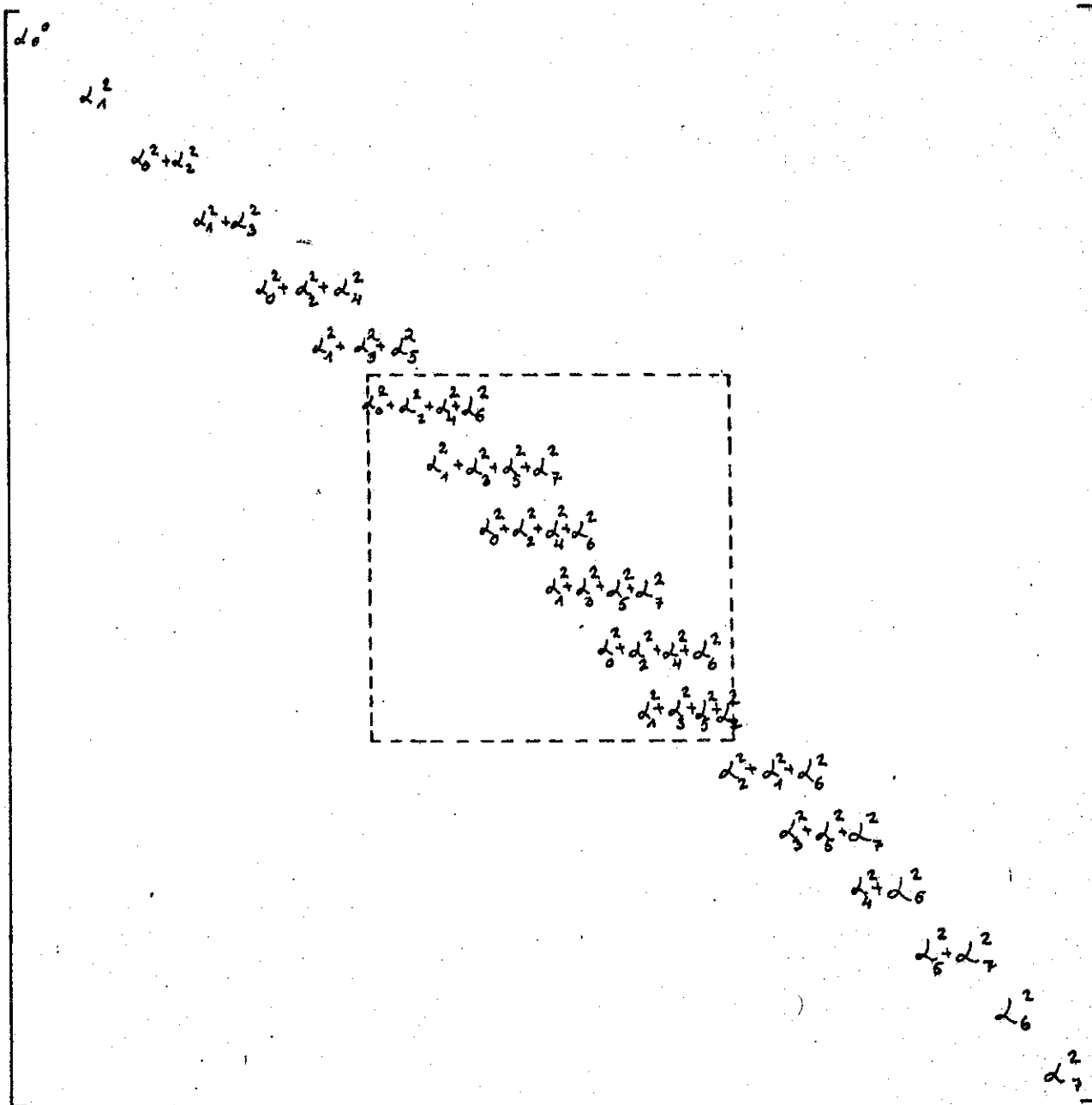
$$x(n) = \frac{\sum_{s=-\infty}^{\infty} h(sR-n) y_r(sR, n)}{\sum_{s=-\infty}^{\infty} h^2(sR-n)} \quad (7.21)$$

הזהה לנוסחה שהגענו אליה קודם (7.20).

מעניין לשים לב שפתרון זה הינו מקרה פרטי של WOLA כפי שהוצג ע"י CROCHIERE [14] כאשר מסנו הסינטיזה נתון ע"י:

$$f(i) = \frac{h(i)}{\sum_{s=-\infty}^{\infty} h^2(i-sR)} \quad (7.22)$$

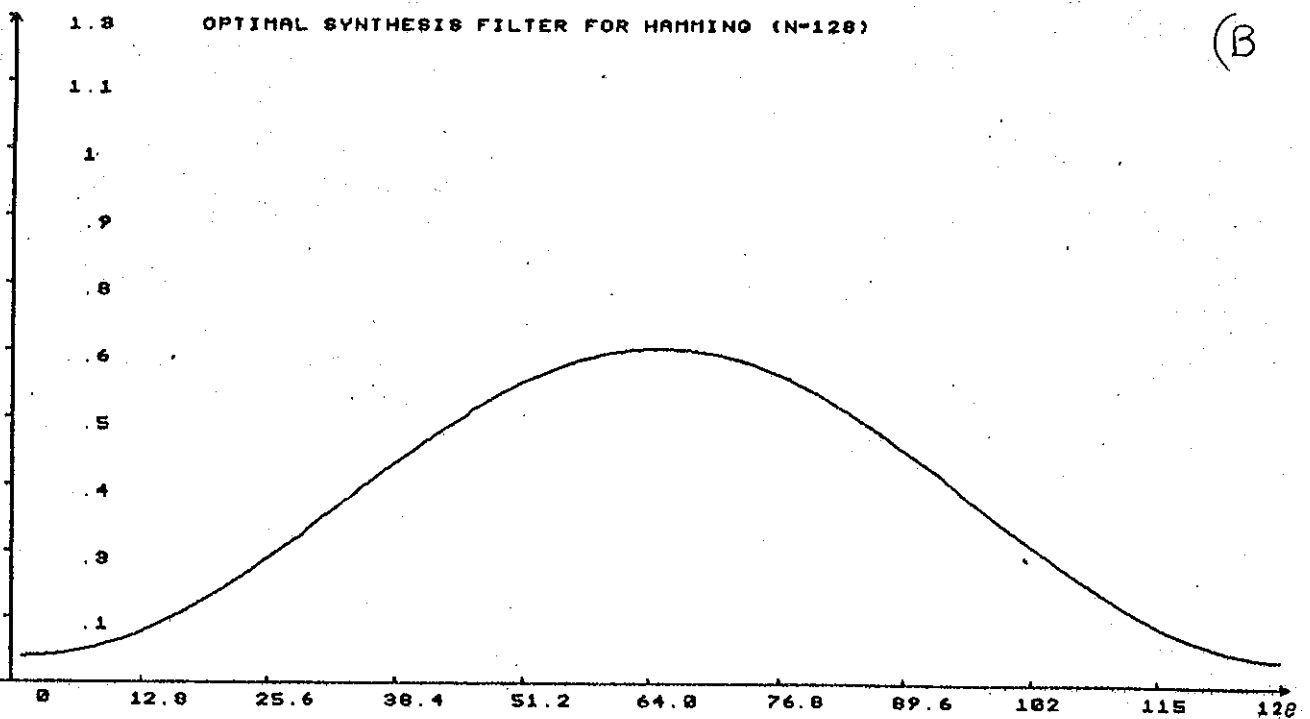
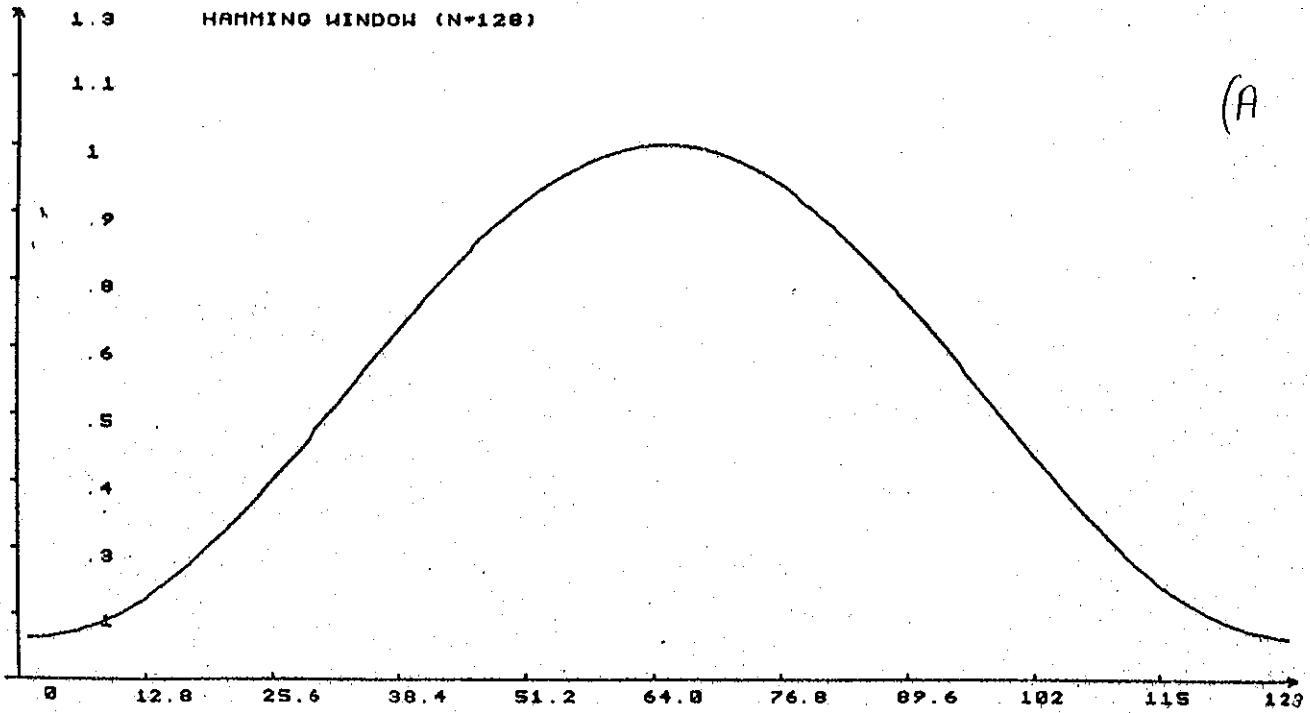
תרשים 7.2 מתאר מסנו אנליזה HAMMING (N=128) ומסנו הסינטיזה האופטימלי שחושב עבורו עפ"י הגישה שתוארה בפרק זה (R=32). יש להדגיש שעד כה, כלל לא היה ידוע מסנו סינטיזה המבטיח מערכת יחידה במקרה זה. תרשים 7.3 מתאר מסנו אנליזה HANNING (N=128). מסנו הסינטיזה המקובל עבורו - חלון מלבני ומסנו הסינטיזה האופטימלי שחושב עבורו (עם R=32). הגישה שתוארה ב- [38] אינה תופשת במקרה זה מכיון שאחד מאברי המסנו שווה לאפס.



תרשים 7.1 - מטריצה  $[A^T A]$  עבור מטריצת אנליזה  $[A]$ ,

המתארת אנליזה ללא קיפולים בזמן.

FIG 7.1 -  $[A^T A]$  MATRIX FOR ANALYSIS MATRIX  $[A]$  DESCRIBING ANALYSIS WITHOUT TIME ALIASING.

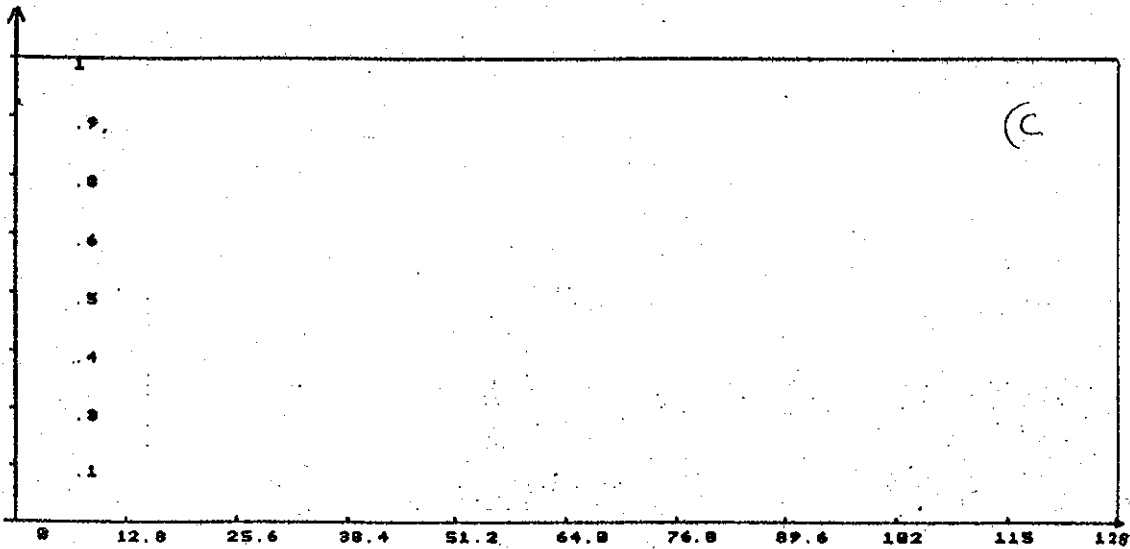
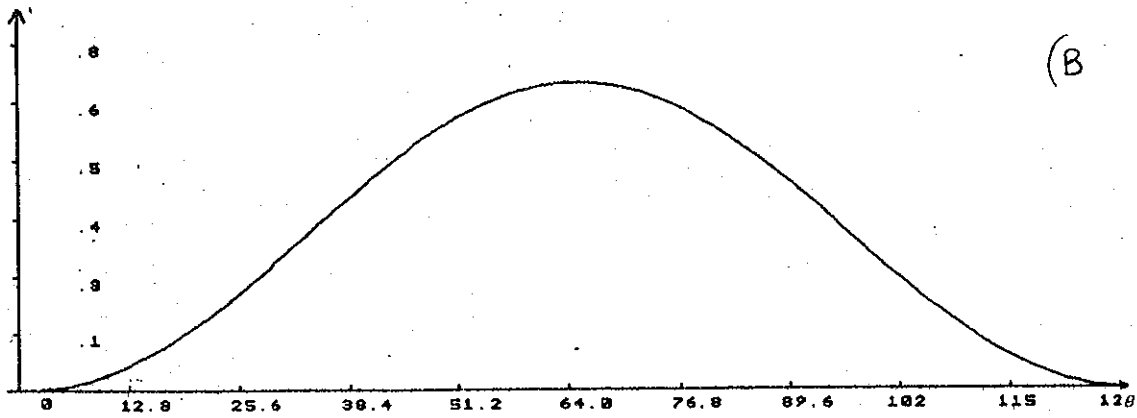
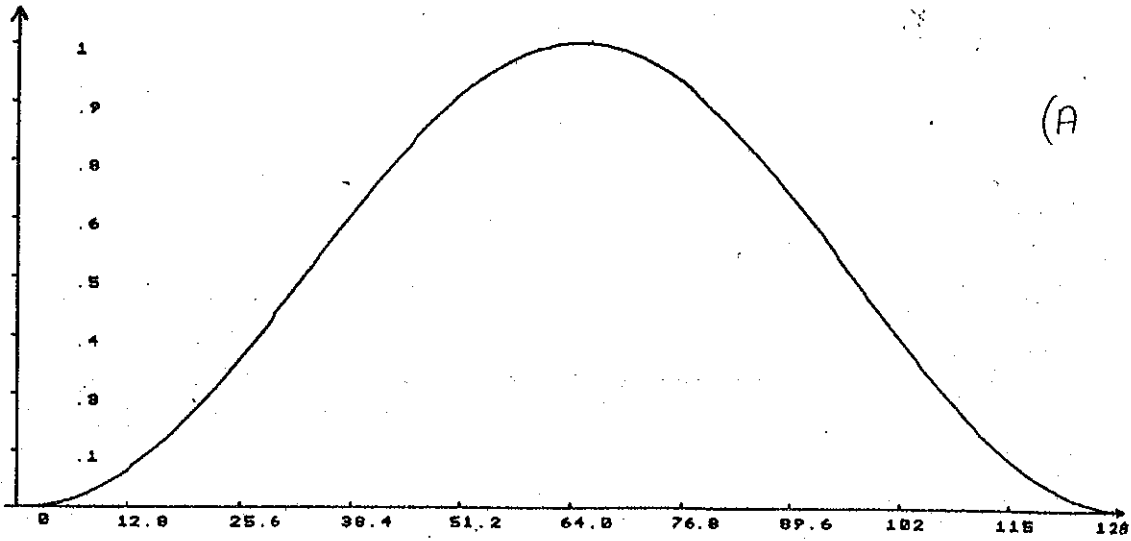


תרשים 7.2 - (A) מסונן אנליזה HAMMING, (B) מסונן סינתזה אופטימלי.

FIG 7.2 - (A) ANALYSIS FILTER - HAMMING,

(B) OPTIMAL SYNTHESIS FILTER.





תרשים 7.3 - (A) מסנן אנליזה HANNING, (B) מסנן סינתזה אופטימלי.

FIG 7.3 - (A) ANALYSIS FILTER - HANNING,

(B) OPTIMAL SYNTHESIS FILTER.

(C) COMMON SYNTHESIS FILTER

8. סינטיזה של - MDSTFT עבור אנליזה עם קיפולים בזמן

8.1 סינטיזה עפיי הגישה שפוחחה עבור אנליזה ללא קיפולים בזמן

מבחינה אלגברית הליך הסינטיזה המבוסס על GENERALIZED INVERSE הוא:

$$\hat{\underline{x}} = [\underline{c}]^T \underline{b} = ([\underline{A}]^T [\underline{A}])^{-1} [\underline{A}]^T \underline{y} \quad (8.1)$$

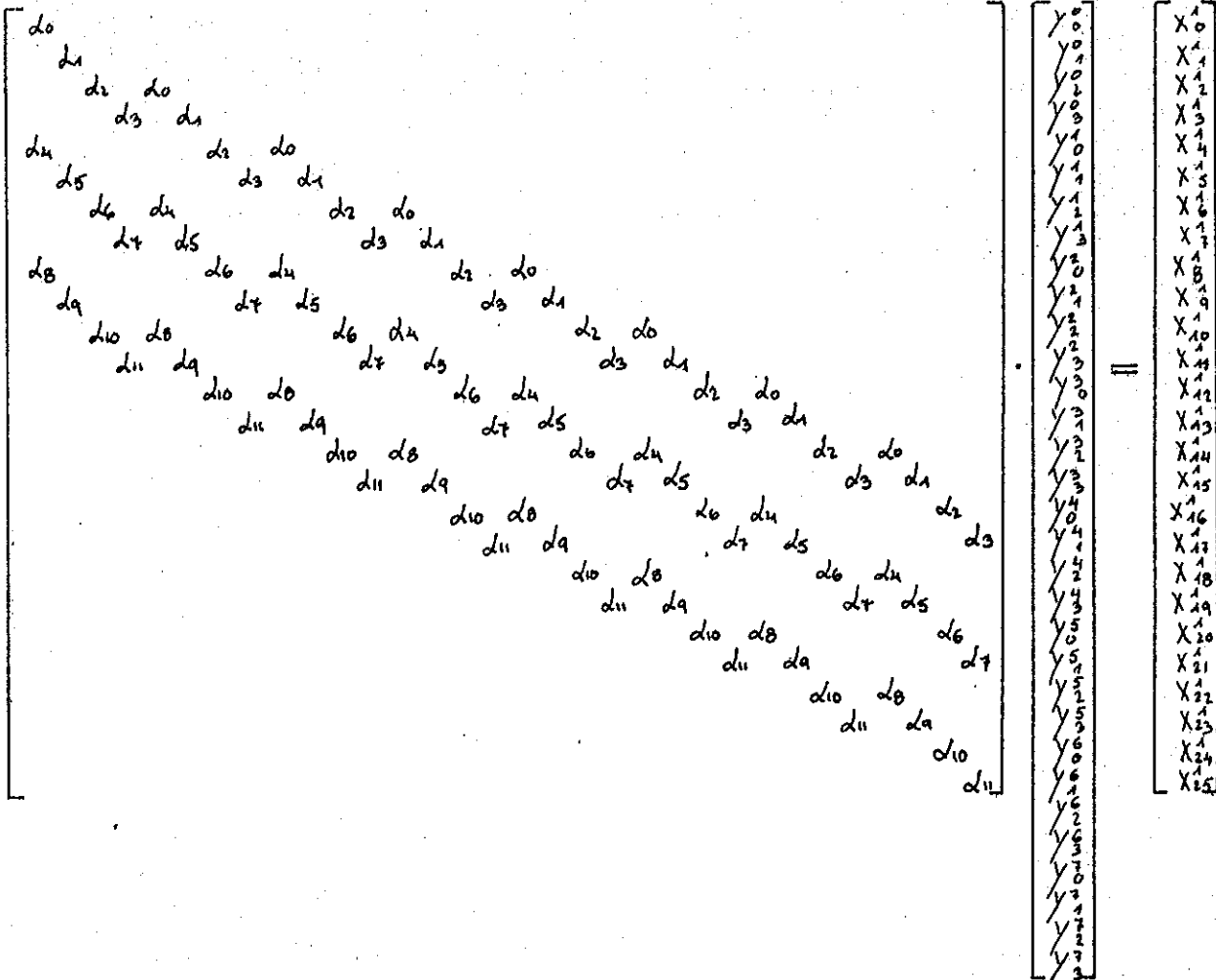
כאשר חישוב  $\underline{y}$  זהו שלב ידוע המפורט ב- (6.40). הבעיה מתמקדת בחישוב  $[\underline{A}]^T \underline{y}$   $([\underline{A}]^T [\underline{A}])^{-1} [\underline{A}]^T \underline{y}$  כאשר  $[\underline{A}]$  מטריצת כפל בחלון אנליזה ופרישת האות המתארת גם בצוץ קיפולים בזמן. נפרק את החישוב לשני שלבים:

$$\underline{x}' = [\underline{A}]^T \underline{y} \quad \text{א.} \quad (8.2)$$

$$\hat{\underline{x}} = ([\underline{A}]^T [\underline{A}])^{-1} \underline{x}' \quad \text{ב.} \quad (8.3)$$

ונבחן את משמעות כל שלב.

כדי לבחון את משמעות שלב אי נבחן את תרשים 8.1. הוא מחאר את בצוץ הכפל  $[\underline{A}]^T \underline{y}$  כאשר  $[\underline{A}]$  זו מטריצת אנליזה עם חלון באורך  $N=12$ , 4 דגימות בתדר  $(M=4)$ , וגודל צעד של 2 דגימות  $(R=2)$ .



תרשים 8.1 - בצוע הכפל  $[A]^T Y$ .

FIG. 8.1 - PRODUCT OF  $[A]^T Y$ .

נבחן את פעולת הכפל מנקודת מבט של ה- $y$ -ים. הסדרה  $y^0$  מוכפלת תחילה ב- $d_0, \dots, d_3$  אחר מוזות ארבעה מקומות ומוכפלת ב- $d_4, \dots, d_7$ , מוזות בארבעה מקומות ומוכפלת ב- $d_8, \dots, d_{11}$ , הפעולה שתוארה שקולה ליצירת סידרה באורך 12 ע"י בצוע הרחבה מחזורית של הסידרה  $y^0$  אותו מספר פעמיים "שקופלה" באנליזה (N/M) וכפל בחלון האנליזה. הסידרה שהתקבלה משורשרת לסידרה אחרת המתקבלת ע"י הרחבה מחזורית של הסדרה  $y^1$ , כפל בחלון אנליזה והזזתה ב-R יחסית לסידרה הראשונה וחוזר חלילה. למעשה התקבלה כאן פעולה של הרחבה מחזורית, כפל בחלון סינטיזה ובנית אות ע"י OVERLAP ADD פעולה התואמת למודל הסינטיזה המורחב שהוצע ע"י מלאך [36] ותואר בתרשים 3.8 כאשר "מספר ההרחבות" שווה ל"מספר הקיפולים" ומסנון הסינטיזה שווה למסנון האנליזה.

ניתן לראות את משמעות פעולה זו גם על פי ההצגה הבאה:

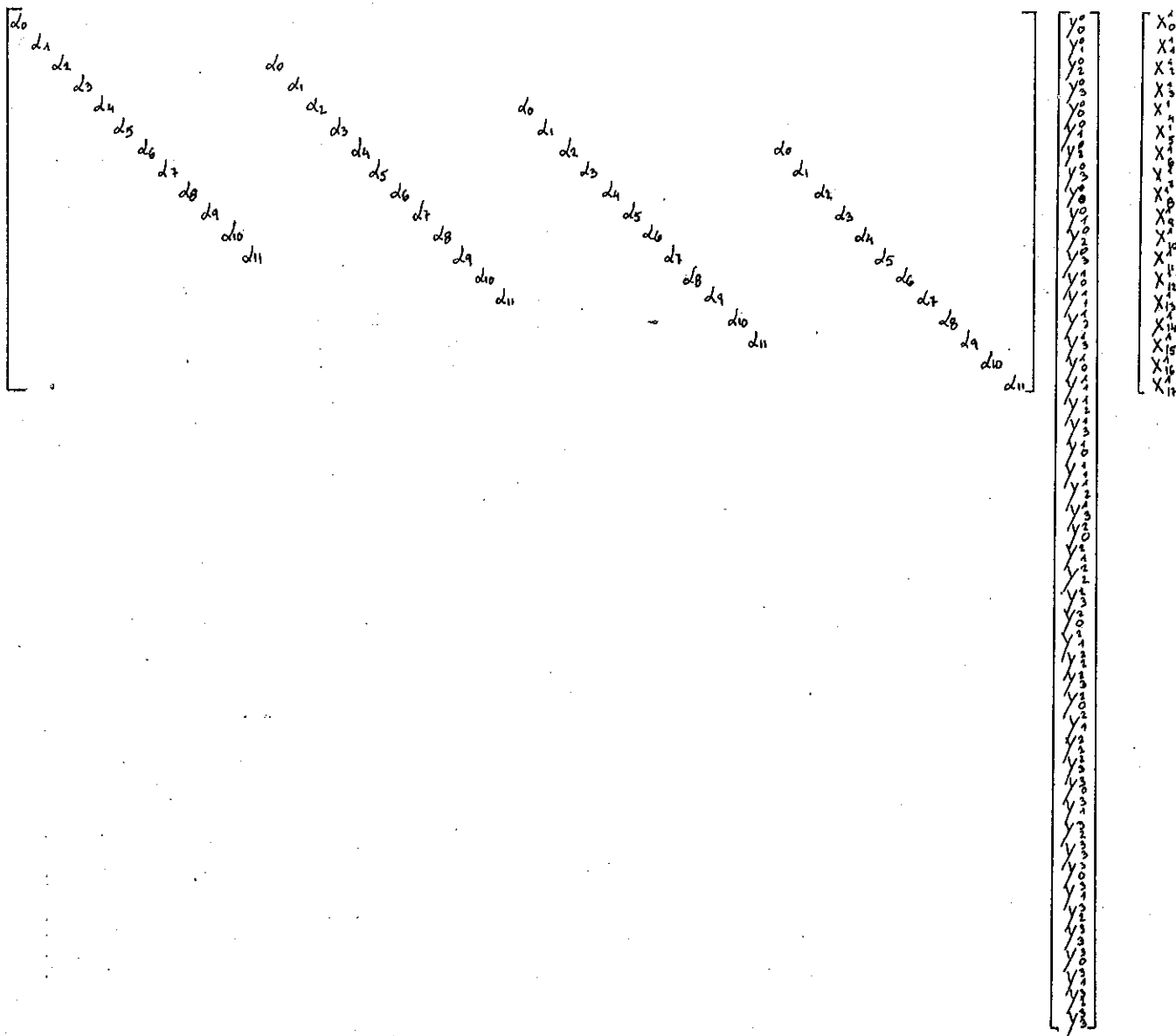
$$\underline{x}' = [A]^T \underline{y} = [A'']^T \underline{y}'' \quad (8.4)$$

כאשר  $\underline{y}''$  זהו הוקטור  $\underline{y}$  שכל סידרה המרכיבה אותו עברה הרחבה של N/M - מספר הקיפולים (במקרה זה 3) פעמים כלומר:

$$\underline{y}'' = y^0, y^0, y^0, y^1, y^1, y^1, y^2, y^2, \dots \quad (8.5)$$

ו- $[A'']^T$  זו מטריצה מלבנית המציגה את פעולת כפל בחלון הסינטיזה ו-OVERLAP (ללא הרחבה מחזורית).

נבחן את פעולת הסינטיזה עפ"י הצגה זו עבור הדוגמא בתרשים 8.1 ונקבל את ההצגה המתוארת בתרשים 8.2.



תרשים 8.2 - בצוע הכפל  $[A']^T [Y]$

FIG. 8.2 - PRODUCT OF  $[A']^T [Y]$ .

אם נשווה בין צורת מטריצה  $[A'']^T$  בדוגמא זו לבין צורת מטריצה  $[A]^T$  בדוגמא של אנליזה ללא קפולום בזמן נראה ששתייהן בעלות אותה צורה ולכן בעלות אותה אינטרפרטציה פיסיקלית של פעולת OVERLAP ADD.

שלב בי הינו מודיפיקציה של הסדרה יא לפי המטריצה  $([A]^T[A])^{-1}$ . במקרה של אנליזה ללא קיפולים בזמן אזי  $([A]^T[A])$  הינה מטריצה אלכסונית מחזורית ולכן ניתן לחשבה אפריורי ללא תלות בסדר המטריצה. כאשר מטריצת האנליזה מתארת גם קיפולים בזמן לא ברור כיצד ניראת המטריצה  $([A]^T[A])^{-1}$  האם היא מחזורית ואם כן באיזה מחזור, האם היא ניתנת לחישוב מראש ואם כן במדויק או בקרוב. לכאורה עפ"י ההצגה של  $\underline{y}'' = [A'']\underline{x}$  העברנו את הבעיה לבעית LAPLACE וגילה עם מטריצה  $[A'']$  במקום  $[A]$  ואז עפ"י הדרך שהוצגה בפרק 7 ניתן להניח שנקבל  $([A'']^T[A''])^{-1}$  אלכסונית ומחזורית. אולם אם נבחן את דרך קבלת  $\underline{y}''$  בצורה מטריצית נקבל עפ"י אחת הגישות האפשריות:

$$\underline{y}'' = [A'']^T \underline{x} \tag{8.6}$$

$$\underline{b} = [F''] [P''] [A''] \underline{x} \tag{8.7}$$

ולכן

$$\hat{\underline{x}} = ([A'']^* [P'']^* [F'']^* [F''] [P''] [A''])^{-1} [A'']^* [P'']^* [F'']^* \underline{b} \tag{8.8}$$

וקיבלנו

$$\hat{\underline{x}} = ([A'']^T [A''])^{-1} [A'']^T [\hat{P}'] [\hat{F}'] \underline{b} \tag{8.9}$$

בהנחה ש -

$$[F'']^T [F''] = M [I] \tag{8.10}$$

$$[P'']^T [P''] = [I] \tag{8.11}$$

נבחן את ההנחה הראשונה - (8.10). מטריצה  $[F]$  היא BLOCK DIAGONAL כאשר כל בלוק  $(w)$  הוא מסדר  $M$  אינ אולם הפעם

$$w_{k,l} = \exp[-j \frac{2\pi}{M} \cdot k \cdot l] \quad (8.12)$$

ולכן כל בלוק [W] (בהנחה ש  $N=P \cdot M$   $P-1$  שלם), כמתואר בתרשים 8.3,

$\tilde{w}$	$\tilde{w}$	$\tilde{w}$	$\tilde{w}$
$\tilde{w}$	$\tilde{w}$	$\tilde{w}$	$\tilde{w}$
$\tilde{w}$	$\tilde{w}$	$\tilde{w}$	$\tilde{w}$
$\tilde{w}$	$\tilde{w}$	$\tilde{w}$	$\tilde{w}$

תרשים 8.3 - מטריצת [F'']

FIG. 8.3 - [F''] MATRIX.

כאשר  $[\tilde{w}]$  זו מטריצת DFT מסדר  $M \times M$  ( $M < N$ ).

מכיון ש-[F''] היא BLOCK DIAGONAL אזי גם [F'']\* היא BLOCK DIAGONAL ולכן גם [F'\*F] היא BLOCK DIAGONAL כאשר כל בלוק הוא מכפלת [W]\*[W].

$$[W]^* [W] = [I] \quad [F]^* [F] = [I] \quad (8.13)$$

מכיון ש-w היא מסדר M ולא N ( $M < N$ ) אזי  $\det(w) = 0$  ולכן

$$\det(W^* W) = \det(W^*) \cdot \det(W) = 0 \quad (8.14)$$

בעוד ש-  $\det(I) \neq 0$  ולכן  $[F]^* [F] \neq [I]$ . מכאן שהנסיון לבחון את האנליזה עם קיפולים בזמן לפי הכלים שפותחו עבור אנליזה ללא קיפולים בזמן לא עלה יפה.

8.2 סינטיזה אופטימלית עבור צעד של דגימה אחת

מכיון ש-A מחזורית ו-BANDED DIAGONAL (כלומר  $a_{ij} = 0$  לכל  $|i-j| > M$  עבור M סופי) נראה ש-  $(A^T A)^{-1}$  ניתנת לחישוב מראש. לשם אימות או הפרכת טענה זו ניבחנו תחילה את המטריצה  $([A]^T [A])$  כאשר  $[A]$  הינה מטריצת אנליזה עם  $R=1$  (לשם המחשת סיבוכיות הבעיה די לבדוק יימקרה פרטי זה). התקבלה מטריצת השונה אך במעט ממטריצת טופליץ אינסופית סמטרית עם מספר סופי של אלכסונים השונה מאפס (BANDED SYMMETRIC TOEPLITZ MATRIX).

$$\sum_{i=0}^{N-1} h^2(i) \quad \text{האלכסון הראשי שווה ל-}$$

האלכסונים  $1 \frac{1}{2}(M-1)$  שווים לאפס.

$$\sum_{i=0}^{N-M-1} h(i) h(i+M) \quad \text{האלכסון ה-M שווה ל-}$$

האלכסונים  $(M+1) \frac{1}{2}(2M-1)$  שווים לאפס

$$\sum_{i=0}^{N-2M-1} h(i) h(i+2M) \quad \text{האלכסון ה-2M שווה ל-}$$

וחוזר חלילה

$$\alpha_{k,l} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{N-|k-l|-1} h(i) h(i+|k-l|) & \text{if } ((k-l))_M = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{כלומר המטריצה נחונה ע"י} \quad (8.15)$$

והבטוי העליון עקב גבולות ה- $\sum$  יהיה שונה מאפס לכל היותר עבור מספר סופי של אלכסונים השווה ל- $N/M$ . מכיון שהמטריצה סימטרית נקבל  $2(N/M)-1$  אלכסונים השונים מאפס. כדי להדגיש עובדה זו ניתן לרשום את המטריצה בצורה הבאה:

$$\alpha_{k,l} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{N-|k-l|-1} h(i) h(i+|k-l|) & \text{if } ((k-l))_M = 0 \wedge (|k-l| < N) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{הבאה:} \quad (8.16)$$

הוכחת תכונה זו של המטריצה  $([A]^T [A])$  היא פשוטה ואסתפק בהסבר קצר. בצוע הכפל  $[A]^T$  ב- $[A]$  הוא בעצם חישוב מכפלה פנימית בין וקטורי העמודות השונים במטריצה A, כלומר

$$[A^T A]_{k,l} = \| \underline{A}^k \cdot \underline{A}^l \| \quad (8.17)$$



כאשר  $\underline{A}^j$  זהו וקטור העמודה ה- $j$  במטריצה  $A$ . אם נבחן לדוגמה את מטריצת האנליזה המתוארת בתרשים 5.7 ברור שכל עמודה שאינה מרוחקת כפולה שלמה של  $M$  עמודות מהעמודה הנדונה תתרום איבר השווה לאפס מכיון שהאיברים השונים מאפס בעמודה אחת נמצאים בהתאמה מול אפסים בעמודה השניה. מהתכונות גם ברור התנאי שלכל היותר  $N/M$  איברים שונים מאפס, ומכיון שהמטריצה סימטרית נקבל  $1-2(N/M)$  אלכסונים. המטריצה שהתקבלה כתוצאה מהכפל  $A^T A$  היא כמעט מטריצת טופליץ מכיון שהאיברים ב- $(N-R)$  העמודות הראשונות וב- $(N-R)$  העמודות האחרונות אינם הקבועים השווים לאברי האלכסון. במטריצה שהתקבלה קשה מאוד לטפל [43], ומכיון שאנו דנים במטריצות אינסופיות ומעוניינים ב"מצב המתמיד" שלהן, יתופעת מעבר" של מספר סופי של עמודות בתחילת המטריצה או בסופה לא תשפיע על המצב המתמיד. לכן שיניתי את האיברים בעמודות הנ"ל כך שתתקבל מטריצת טופליץ מלאה שבה קל יותר לטפל מבחינה מתמטית. הפוך מטריצת טופליץ זו בעיה שטופלה בחלקה [44] אולם לא עלה בידי למצוא לה פתרון.

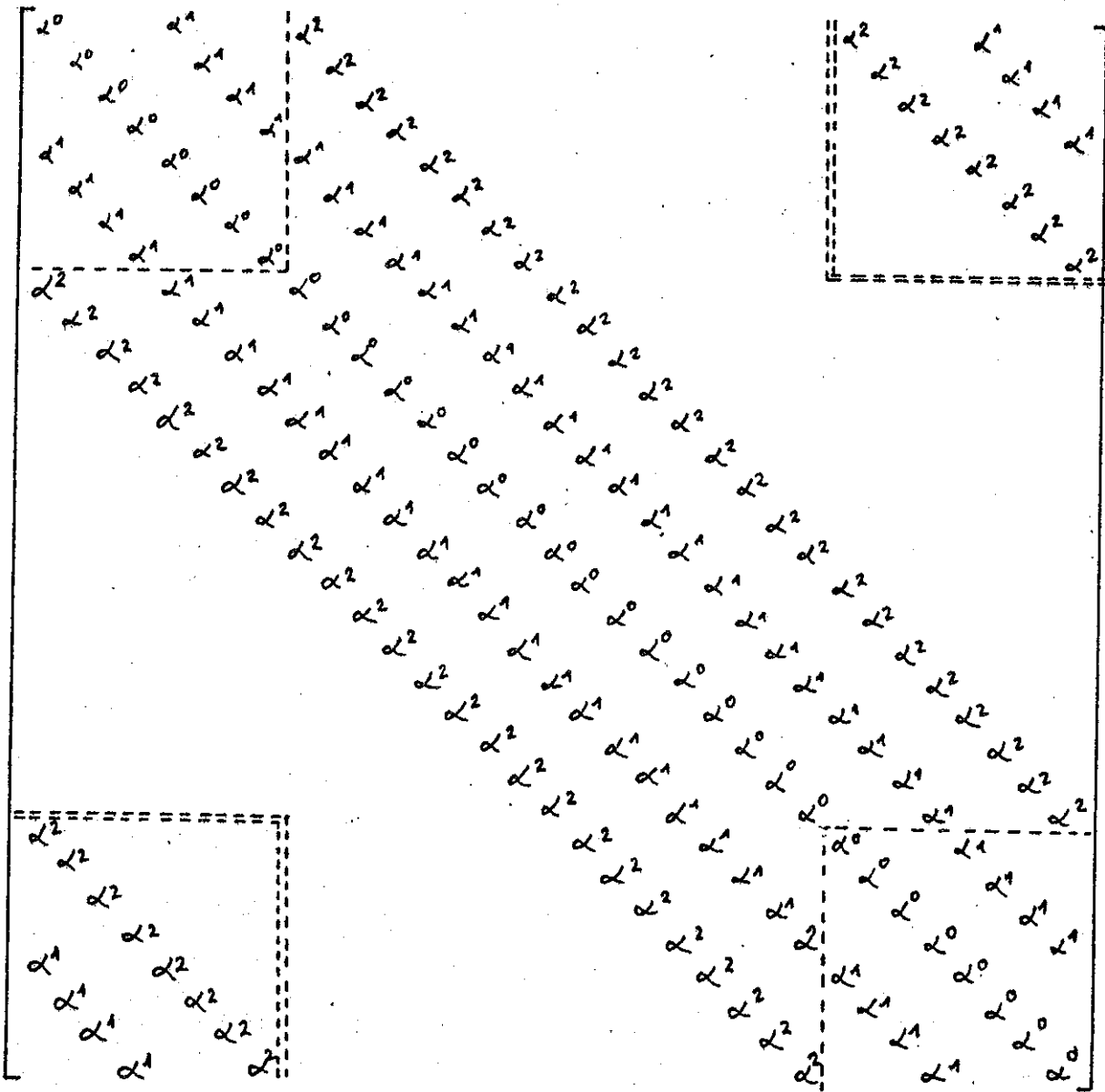
נבחן גישה שונה לנתוח הבעיה, מכיון ש- $[A^T A]$  הינה מטריצת טופליץ מסדר  $P$  (כאשר  $P \rightarrow \infty$ ) אזי נשלים את  $(N-R)$  העמודות הראשונות ב- $(N-R)$  השורות התחתונות שלהם ואת  $(N-R)$  העמודות האחרונות ב- $(N-R)$  השורות העליונות שלהם - כך שנקבל מטריצה שתהווה CIRCULANT MATRIX כלומר מטריצה שכל שורה שלה מורכבת מהשורה הקודמת לה מוזזת ציקלית באיבר אחד. מכיון שהמטריצה מסדר שואף לאינסוף ואנו מעוניינים ב"מצב המתמיד שלה" שינויים כאלה משפיעים לכל היותר על תופעת המעבר וניתן להתעלם מהם. נבחן כיצד תיראה המטריצה  $([A]^T [A])$  עבור מטריצת האנליזה  $[A]$  המתוארת מסגן אנליזה באורך  $N=12$ , וארבע דגימות בתדר  $(M=4)$ . נסמן:

$$L^0 = \sum_{i=0}^{11} d_i^2$$

$$L^1 = \sum_{i=0}^7 d_i d_{i+4}$$

$$L^2 = \sum_{i=0}^3 d_i d_{i+8}$$

אזי  $([A]^T [A])$  עם השלמות למטריצת טופליץ ואחר ל-CIRCULANT תהיה כמתואר בתרשים 8.4.



תרשים 8.4 - מטריצה  $([A]^T[A])$  עם השלמות ל-CIRCULANT.  
 FIG. 8.4 -  $([A]^T[A])$  MATRIX WITH CHANGES TO A CIRCULANT.

לשם הבהרה הקפתי בקו מקוקו את האזורים במטריצה ששוננו כדי להפכה למטריצת טופליץ ובשני קווים מרוסקים את האזורים שהושלמו כדי להפוך את המטריצה ל-CIRCULANT. מכיון שאילו פינות המטריצה כל אחת מסדר  $(N-M) \times (N-M)$  סופי, כאשר סדר המטריצה שואף לאינסוף שנויים אלו משפיעים רק על תופעת המעבר [45].  
כאשר מטריצה היא CIRCULANT אזי יש לה מספר תכונות שנח לנצלן [46].

א. כל עמודה מהווה העתקה ציקלית של העמודה הקודמת לה באיבר אחד, הגדרת המטריצה היחה על פי השורות).

ב. נגדיר מטריצת DFT  $\tilde{F}$  מסדר  $N \times N$  כך ש-

$$[\tilde{F}]_{k,l} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp[-j \frac{2\pi}{N} k \cdot l] \quad (8.18)$$

ובהתאמה מטריצת IDFT  $\tilde{F}^{-1}$  מסדר  $N \times N$  כך ש-

$$[\tilde{F}]_{k,l}^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp[j \frac{2\pi}{N} k \cdot l] \quad (8.19)$$

וברור שמתקיים הקשר  $[\tilde{F}]^{-1} = [\tilde{F}]^*$

תהי  $C$  מטריצת CIRCULANT כאשר השורה הראשונה שלה  $\underline{c} = \{c_0, c_1, \dots, c_{N-1}\}$  ותהי  $\underline{\lambda} = \{\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{N-1}\}$  האלכסון; אזי מתקיים:

$$C = F^* \underline{\lambda} F \quad (8.20)$$

ג. המטריצה ההופכית ל-CIRCULANT היא גם CIRCULANT ונתונה ע"י

$$C^{-1} = F \underline{\lambda}^{-1} F^* \quad (8.21)$$

והוכחה היא פשוטה

$$C \cdot C^{-1} = F^* \underline{\lambda} F F^* \underline{\lambda}^{-1} F = F^* \underline{\lambda} \underline{\lambda}^{-1} F = F^* F = I$$

$$C^{-1}C = F^* \Lambda^{-1} F F^* \Lambda = F = F^* \Lambda^{-1} F = F^* F = I \quad (8.22)$$

ד. מכיוון שהמטריצה C היא CIRCULANT ניתן לאפינה עי"י השורה הראשונה שלה בלבד, נסמן:

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_{N-1} \end{pmatrix} \quad Y^T = \begin{pmatrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{N-1} \end{pmatrix} \quad (8.23)$$

ומחקיים

$$Y^T = N^{-1/2} \tilde{F} L \quad (8.24)$$

לכן ניתן לקבל את  $Y^T$  של  $C^{-1}$  שננסמנו  $\hat{Y}^T$  עי"י:

$$L = N^{1/2} \tilde{F}^* \hat{Y}^T$$

$$L^{-1} = N^{-1/2} (\tilde{F}^* \hat{Y}^T)^{-1}$$

$$\hat{Y}^T = N^{1/2} \tilde{F} L^{-1} = N^{1/2} \tilde{F} N^{-1/2} (\tilde{F}^* \hat{Y}^T)^{-1}$$

$$= N^{-1/2} \tilde{F} (\tilde{F}^* \hat{Y}^T)^{-1} \quad (8.25)$$

נבחן בטו"י זה עפ"י הגדרת התמרת פוריה המקובלת ב"הנדסת חשמל":

$$[F]_{k,l} = \exp \left[ -j \frac{2\pi}{N} k \cdot l \right] \quad (8.26)$$

$$[F^{-1}]_{k,l} = \frac{1}{N} \exp \left[ j \frac{2\pi}{N} k \cdot l \right] \quad (8.27)$$

ונקבל

$$F = \sqrt{N} \tilde{F} \quad (8.28)$$

$$F^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{F}^{-1} \quad (8.29)$$

לכן

$$\hat{Y}^T = \frac{1}{N} \frac{1}{\sqrt{N}} F(\sqrt{N} F^{-1} Y^T)^{-1} = \frac{1}{N^2} F(F^{-1} Y^T)^{-1} \quad (8.30)$$

נבחן את ישום משפטים אלו לגבי המטריצה שתוארה בתרשים 8.4, מטריצת טופליץ סימטרית אינסופית עם מספר אלכסונים סופי שהושלמה ל-CIRCULANT. לשם כך נגדיר משתנה עזר וקטור  $\underline{b}$

$$\underline{b}^T = \frac{1}{N^2} (F^{-1} Y^T)^{-1} \quad (8.31)$$

ולכן

$$Y^T = F(B^T) \quad (8.32)$$

$$(F^{-1} Y^T)_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c(k) \exp(j \frac{2\pi}{N} k \cdot n)$$

מכיוון ש- $Y^T$  כולל מספר סופי של איברים שונים מאפס שנשמנו  $c$  נקבל:

$$(F^{-1} Y^T)_n = \frac{1}{N} \left\{ c^0 \exp[0] + c^1 \exp[j \frac{2\pi}{N} n \cdot 4] + c^2 \exp[j \frac{2\pi}{N} n \cdot 8] + c^2 \exp[j \frac{2\pi}{N} n(N-8)] + c^1 \exp[j \frac{2\pi}{N} n(N-4)] \right\} =$$

$$= \frac{1}{N} \left\{ c^0 + 2c^1 \cos(\frac{2\pi}{N} n \cdot 4) + 2c^2 \cos(\frac{2\pi}{N} n \cdot 8) \right\} \quad (8.33)$$

בהנחה שהאיברים  $(F^{-1} Y^T)_n \neq 0$  לכל  $n$  נקבל:

$$b_n = \frac{1}{N^2} N \cdot \frac{1}{c^0 + 2c^1 \cos(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot 4) + 2c^2 \cos(\frac{2\pi}{N} \cdot n \cdot 8)} \quad (8.34)$$

מכיוון ש- $g(n) = c^0 + 2c^1 \cos(\frac{2\pi}{N} n \cdot 4) + 2c^2 \cos(\frac{2\pi}{N} n \cdot 8)$  חסום ושונה מאפס אזי  $1/g(n)$  חסום ונסמן חסם זה ב-  $CONST\_1$ . לכן קיבלנו:

$$|b_n| \leq \frac{1}{N} CONST\_1 \quad (8.35)$$

$$|b_n|^2 \leq \frac{1}{N^2} (CONST\_1)^2 = \frac{1}{N^2} CONST\_2 \quad (8.36)$$

על פי משפט פרטול, ידוע ש-

$$N \cdot \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 \quad (8.37)$$

$$N \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 \leq N \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N^2} \text{CONST}_2 = \text{נציב ונקבל}$$

$$= N^2 \frac{1}{N^2} \text{CONST}_2 = \text{CONST}_2 \quad (8.38)$$

ולכן

$$\sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 \leq \text{CONST}_2 \quad (8.39)$$

הרחבה של תוצאה זו למקרה הכללי של  $N/M$  אלכסונים היא מידית כאשר האיבר  $(F^{-1} \gamma^T)_n$  יהיה הפעם:

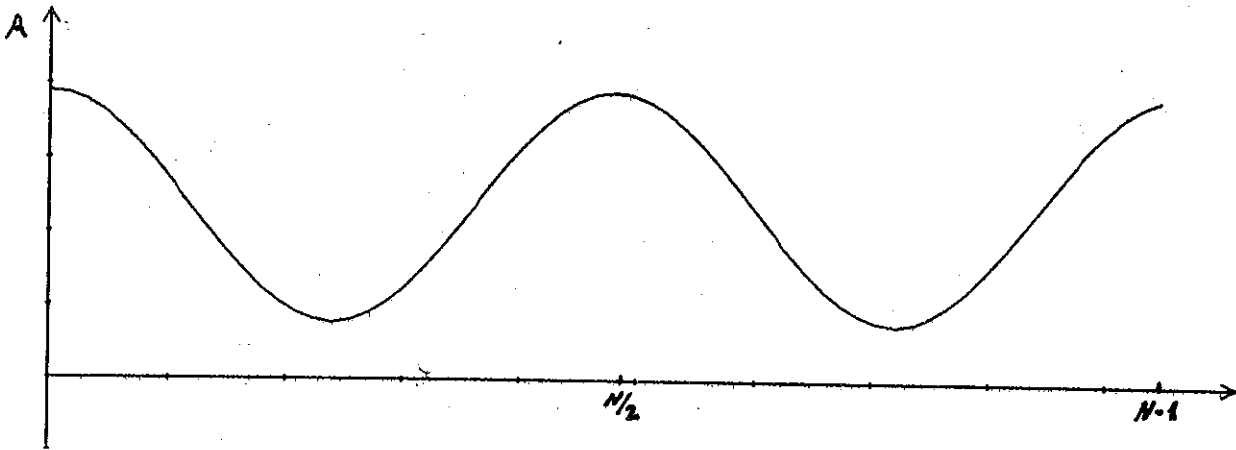
$$(F^{-1} \gamma^T)_n = \frac{1}{N} \left\{ \alpha_0 + 2 \sum_{i=1}^{N/M-1} \alpha_i \cos\left(\frac{2i\pi}{N} n \cdot i \cdot R\right) \right\} \quad (8.40)$$

ושוב נקבל:

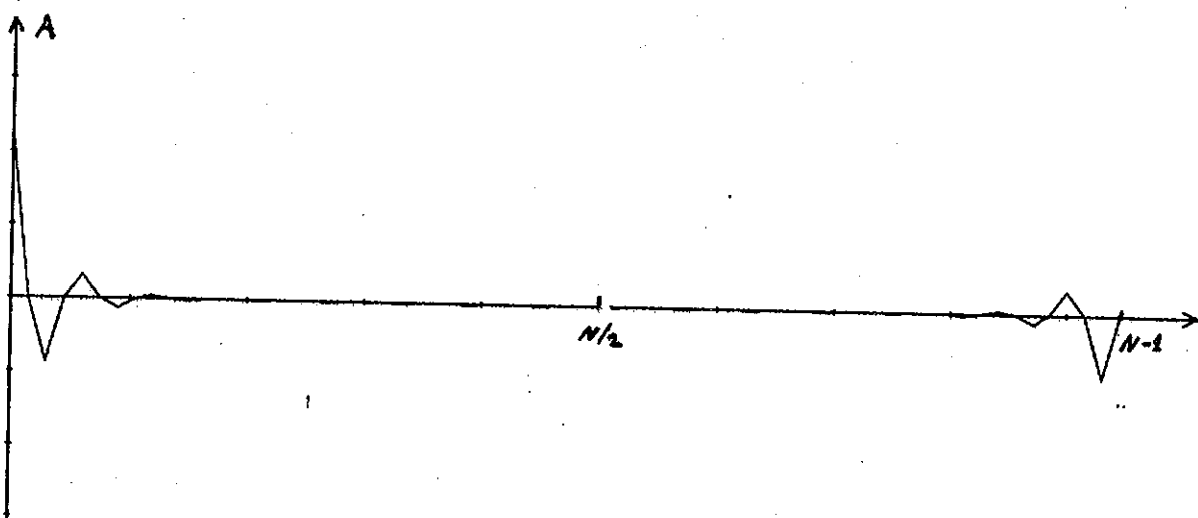
$$\sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2 \leq \text{CONST}_2 \quad (8.41)$$

אם נבחן את התוצאה שהתקבלה משמעותה שאנרגיית האיברים חסומה ואינה תלויה בסדר המטריצה כלומר כאשר אנו עובדים עם מחשב בעל דיוק סופי ניתן להתייחס לתוצאה כאל סידרה סופית המתקבלת ממטריצה אינסופית. לשם המחשה תרשימים 8.5 ו-8.6 מתארים את תוצאות הליך החישוב שתואר לעיל עבור מטריצת טופליץ עם שני אלכסונים שונים מאפט: האלכסון הראשי שווה ל-3 והשני שווה ל-1. תרשים 8.5 מתאר את הוקטור  $F^{-1} \gamma^T$  ותרשים 8.6 מתאר את וקטור התוצאה  $\frac{1}{N^2} F(F^{-1} \gamma^T)^{-1}$ . החישובים נערכו עבור  $N=128$  ואותם תוצאות בדיוק התקבלו גם עבור  $N=256$  ו- $N=512$ .

במקרה הכללי של  $R > 1$  המטריצה המתוארת את  $(A^T A)$  כבר אינה מטריצת טופליץ והטפול בה לשם חישוב  $(A^T A)^{-1}$  מורכב ומסובך.



תרשים 8.5 - תאור הוקטור  $F^{-1}y^T$ .  
FIG 8.5 - ILLUSTRATION OF THE VECTOR  $F^{-1}y^T$ .

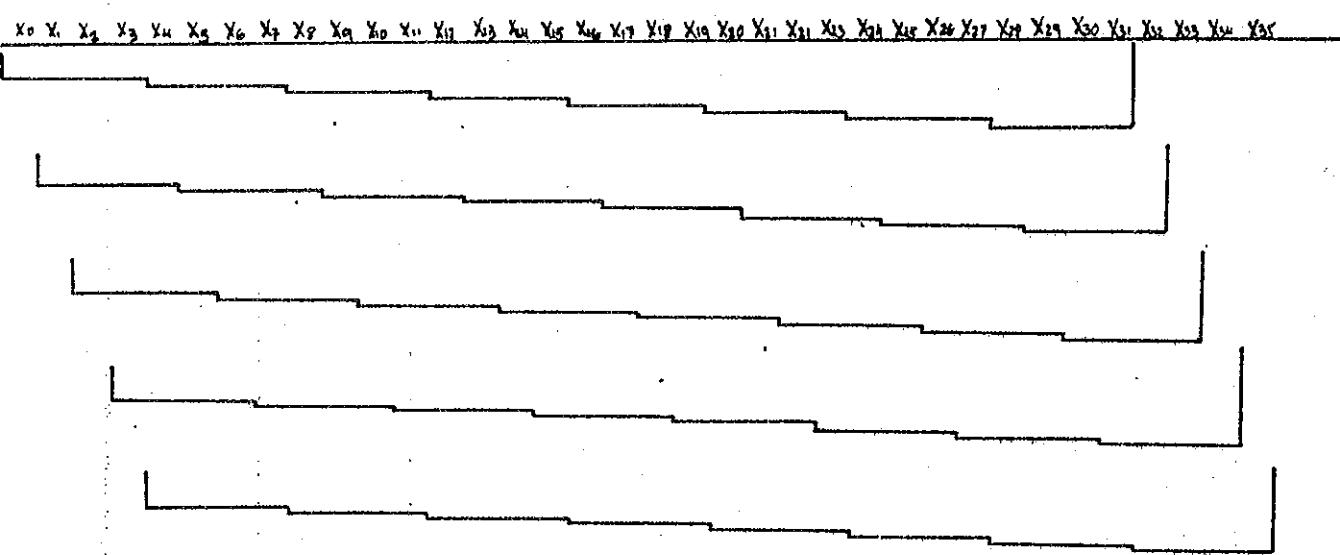


תרשים 8.6 - תאור שורה ב- $[A^T A]^{-1}$ .  
FIG 8.6 - ILLUSTRATION OF A LINE IN  $[A^T A]^{-1}$ .

8.3.1 כללי

מכיון שהפתרון המדויק קשה לחישוב אנו לקרב את מטריצת הסינטיזה  $(A^T A)^{-1} A^T$  במספר דרכים. לשם כך אגדיר מטריצת אנליזה מינימלית. נניח ש-  $m = \ell \cdot r - 1$   $n = p \cdot m$  כאשר  $\ell - 1$   $p$  שלמים חיוביים. אזי מטריצת האנליזה המינימלית זו מטריצה שבה  $r=1$  כלומר  $\ell = m - 1$   $n = p \cdot \ell$ . נמחיש מושג זה בדוגמא הבאה: נניח  $n=1024$ ,  $m=128$ ,  $r=1$   $r=32$ , אזי עבור המטריצה המינימלית נקבל:  $r=1$ ,  $m=4$ ,  $n=32$ .

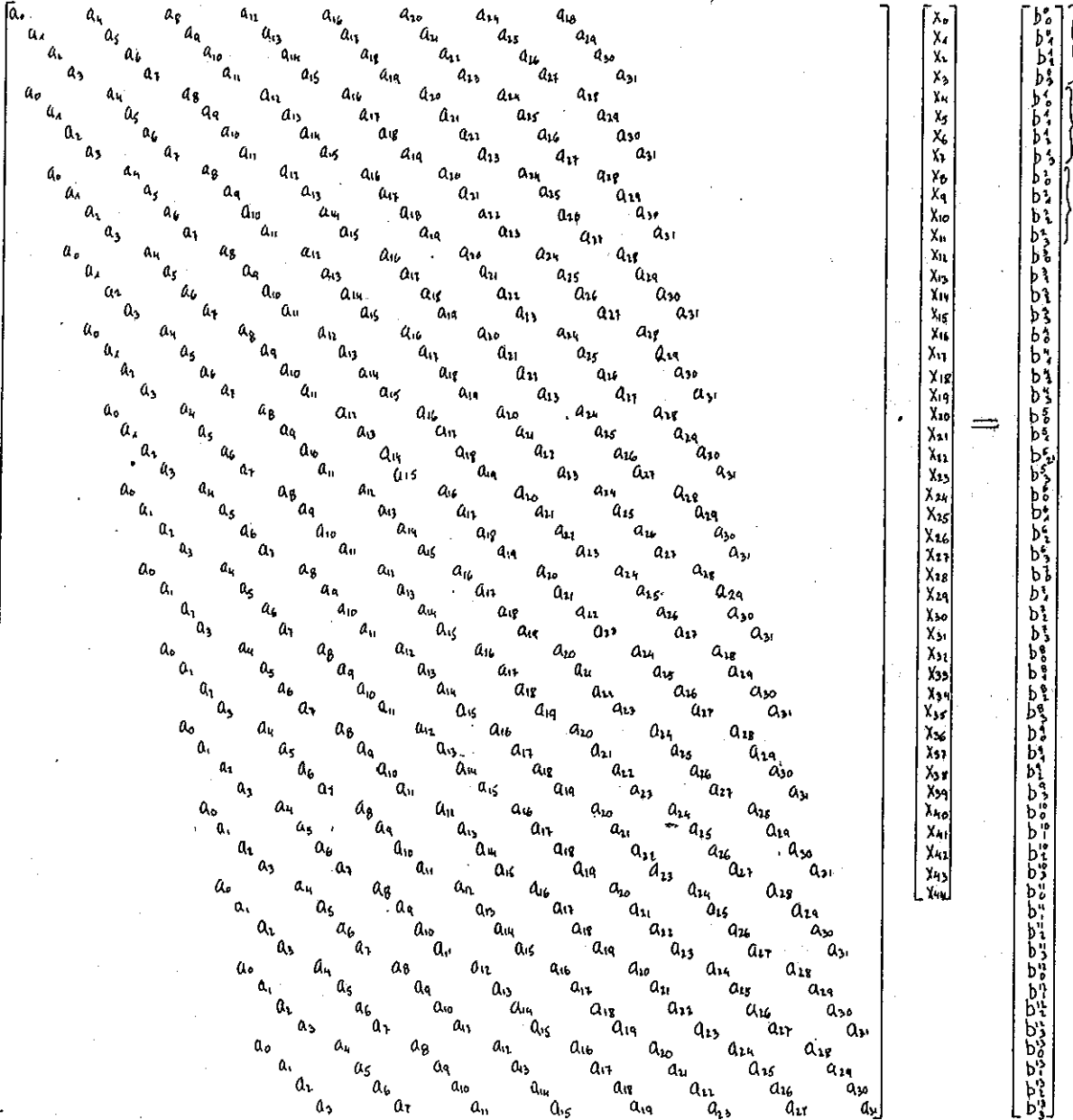
שיטות הפתרון המוצעות בהמשך הפרק מפותחות ומוסברות על מטריצה מינימלית ואחר מורחבות למקרה של מטריצות מעשיות, ( $r > 1$ ). תרשים 8.7 מבהיר את שלב בחירת הסדרות וכפל בחלון אנליזה עבור הדוגמא שלעיל עם מטריצת אנליזה מינימלית, ובתרשים 8.8 מפורט הכפל  $\underline{x} = \underline{y} [A_{min}]$  כאשר  $[A_{min}]$  זו מטריצת אנליזה מינימלית של  $[A]$ .



תרשים 8.7 - הגדרת סדרות עבור מטריצה מינימלית.

FIG 8.7 - DEFINITION OF SEQUENCES FOR MINIMAL MATRIX.

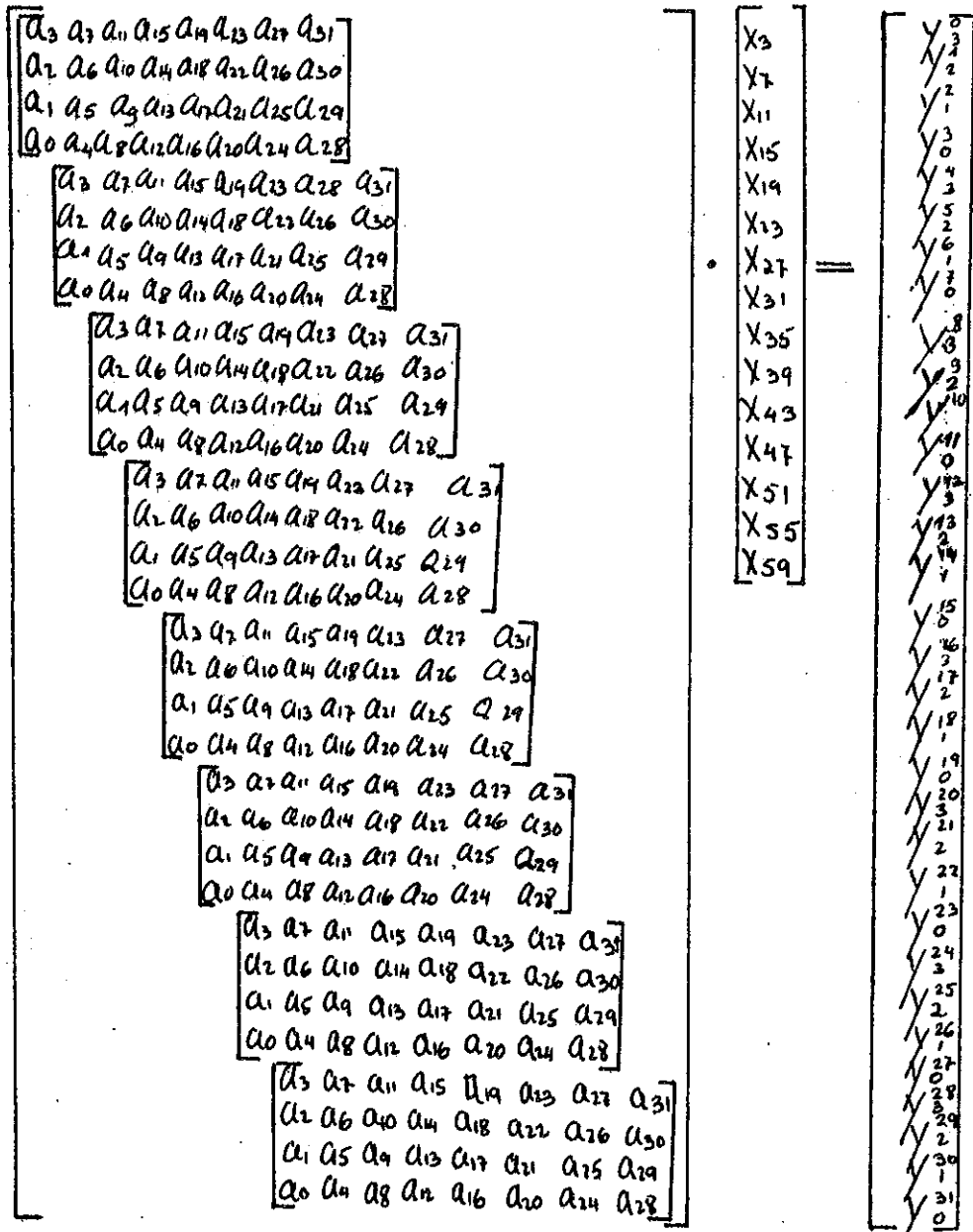




. [A<sub>min</sub>] X = Y תרשים 8.8 - בצוה הנפל

FIG 8.8 - PRODUCT OF [A<sub>min</sub>] X = Y.

אם נבחן את המטריצה,  $1-N$  העמודות הראשונות הן תופעת מעבר ולכן נתיחס למטריצה החל מהעמודה ה- $N$ . מיד ניתן להבחין שהחל מעמודה זו המטריצה הופכת להיות מחזורית כאשר כל עמודה זהה לקודמתה ומוזזת בארבעה ( $M$ ) דגמים. נבחן את שחזור  $x_N$ . לשם כך ניבנה מטריצה מצומצמת שתכלול רק את השורות המכילות בעמודה ה- $N$  איבר שונה מאפס. נסמן מטריצה זו ב- $\hat{A}$  ונכתוב מערכת מצומצמת  $[\hat{A}]\hat{x}=\hat{y}$  וברור שהאיבר האמצעי ב- $\hat{x}$  הוא  $x_N$ , וה- $\hat{y}$  אלו ה- $y_i$  הכוללים בתוכם מכפלה שאחד מאבריה הוא  $x_N$ . תרשים 8.9 מתאר את המטריצה המצומצמת עבור (31)  $x$  בדוגמא האחרונה. מכיון שהעמודות החל מהשורה ה- $N$  זהות ורק מוזזות נקבל שמטריצה  $\hat{A}$  קבועה וזהה לכל ה- $x_i$  ( $i > 31$ ) ומה שמשתנה זהו וקטור  $\hat{y}$  ווקטור  $\hat{x}$ . (ז"א  $\hat{A}x^{32}=\hat{y}^{32}$ ,  $\hat{A}\hat{x}^k=\hat{y}^k$ ).



תרשים 8.9 - תאור הכפל  $[A]x=y$ .

FIG 8.9 - DESCRIPTION OF THE MULTIPLICATION  $[A]x=y$ .

מתאור זה נגזור שלוש שיטות סינטיזה שונות.

שיטה א 8.3.2

קיבלנו למעשה מערכת משוואות סופית שעל ה- $x$ ים למלא - לכן ניתן להציג את הבעיה כשחזור וקטור  $\underline{x}^k$  מוקטור  $\underline{\tilde{y}}^k$  עם מטריצה  $\hat{A}$  - שחזור ללא תפיפה. בדוגמא שהוצגה נקבל את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{aligned} \hat{A} \underline{x}^{31} &= \underline{\tilde{y}}^{31} \\ \hat{A} \underline{x}^{32} &= \underline{\tilde{y}}^{32} \\ \hat{A} \underline{x}^{33} &= \underline{\tilde{y}}^{33} \\ \hat{A} \underline{x}^{34} &= \underline{\tilde{y}}^{34} \\ \hat{A} \underline{x}^{91} &= \underline{\tilde{y}}^{91} \\ \hat{A} \underline{x}^{92} &= \underline{\tilde{y}}^{92} \end{aligned} \tag{8.42}$$

:

כאשר

$$\begin{aligned} \underline{x}^{31} &= \{x_3, x_7, \dots, x_{31}, \dots, x_{55}, x_{59}\} \\ \underline{x}^{32} &= \{x_4, x_8, \dots, x_{32}, \dots, x_{56}, x_{60}\} \\ \underline{x}^{33} &= \{x_5, x_9, \dots, x_{33}, \dots, x_{57}, x_{61}\} \\ \underline{x}^{34} &= \{x_6, x_{10}, \dots, x_{34}, \dots, x_{58}, x_{62}\} \\ \underline{x}^{91} &= \{x_{63}, x_{67}, \dots, x_{91}, \dots, x_{115}, x_{119}\} \\ \underline{x}^{92} &= \{x_{64}, x_{68}, \dots, x_{92}, \dots, x_{116}, x_{120}\} \end{aligned} \tag{8.43}$$

וה-  $\underline{y}$  נתונים עיי

$$\begin{aligned} \underline{\tilde{y}}^{31} &= \{y_3^0, y_2^1, y_1^2, y_0^3, \dots, y_3^{28}, y_2^{29}, y_1^{30}, y_0^{31}\} \\ \underline{\tilde{y}}^{32} &= \{y_3^1, y_2^2, y_1^3, y_0^4, \dots, y_3^{29}, y_2^{30}, y_1^{31}, y_0^{32}\} \\ \underline{\tilde{y}}^{33} &= \{y_3^2, y_2^3, y_1^4, y_0^5, \dots, y_3^{30}, y_2^{31}, y_1^{32}, y_0^{33}\} \\ \underline{\tilde{y}}^{34} &= \{y_3^3, y_2^4, y_1^5, y_0^6, \dots, y_3^{31}, y_2^{32}, y_1^{33}, y_0^{34}\} \\ \underline{\tilde{y}}^{91} &= \{y_3^{60}, y_2^{61}, y_1^{62}, y_0^{63}, \dots, y_3^{88}, y_2^{89}, y_1^{90}, y_0^{91}\} \\ \underline{\tilde{y}}^{92} &= \{y_3^{61}, y_2^{62}, y_1^{63}, y_0^{64}, \dots, y_3^{89}, y_2^{90}, y_1^{91}, y_0^{92}\} \end{aligned} \tag{8.44}$$

מכיון ש-  $\hat{A}$  מלבנית ( $n > m$  |  $m \times n$ :  $A$ ) ודרגתה שווה למספר העמודות מוגדר עבורה  $\hat{A}^t$ . הפתרון המוצע הוא:

$$\begin{aligned} \hat{A}^{\dagger} \cdot \underline{\tilde{Y}}^{31} &= \underline{X}^{31} \\ \hat{A}^{\dagger} \cdot \underline{\tilde{Y}}^{32} &= \underline{X}^{32} \\ \hat{A}^{\dagger} \cdot \underline{\tilde{Y}}^{33} &= \underline{X}^{33} \\ \hat{A}^{\dagger} \cdot \underline{\tilde{Y}}^{34} &= \underline{X}^{34} \\ \hat{A}^{\dagger} \cdot \underline{\tilde{Y}}^{91} &= \underline{X}^{91} \\ \hat{A}^{\dagger} \cdot \underline{\tilde{Y}}^{92} &= \underline{X}^{92} \end{aligned}$$

(8.45)

כלומר שחזור ה- $x$ -ים על פי מערכת המשוואות שעליהם לקיים. ברור ששיטה זו מבטיחה מערכת יחידה, כלומר אם ה  $MDSTFT$  הוא סידרה חוקית אזי הסינטיזה לפי שיטה זו תשחזר את הסיגנאל המקורי (ז"א  $[S][A]=[I]$ ). לעומת זאת אם ה- $MDSTFT$  סידרה לא חוקית לא ברור מה התוצאה המתקבלת עפ"י שיטת סינטיזה זו לפי הקריטריון שקבענו ז"א מה המרחק בין  $\hat{A}^{\dagger} \underline{x} - \underline{b}$  לבין  $\hat{A}^{\dagger} \underline{x} - \underline{b}$ .

כדי להעמיק בנקודה זו נבחן שנית את מטריצה  $\hat{A}$  הפעם כמטריצת מדידות ל- $x$ -ים המופיעים בוקטור  $\underline{x}^j$ ,  $[\hat{A}]\underline{x}^j = \underline{\tilde{Y}}^j$ . הנעלם המרכזי בוקטור (בדוגמא לעיל  $x_{31}$ ) משתתף בקביעת ערכם של כל אברי הוקטור  $\underline{Y}$  - 32 איברים ולכן בקינטיזה ישוערך משתנה זה מ-32 מדידות.  $x_3$  לעומתו (או  $x_{59}$ ) משתתפים בקביעת ערכם של 4 אברים בלבד ב-  $\underline{Y}$  -  $\{b_3^0, b_1^1, b_2^2, b_3^3\}$  (או עבור  $x_{59}$  -  $\{b_3^{31}, b_3^{32}, b_1^{33}, b_0^{34}\}$ ) ולכן בהליך הסינטיזה ישוחררו מ-4 מדידות בלבד.

טענה זו שקולה לטענה שבשחזור איננו מנצלים חלק ניכר מהאינפורמציה שבידינו. בדוגמא לעיל האיבר האחרון המופיע ב  $\underline{\tilde{Y}}^{35}$  זהו  $\underline{Y}_j^{34}$  ואילו האיבר הראשון שמופיע בשורה הבאה של מערכת המשוואות זהו האיבר הראשון ב-  $\underline{\tilde{Y}}^{91}$  השווה ל-  $\underline{Y}_j^{60}$ . כלומר כל הוקטורים מ-  $\underline{Y}^{35}$  עד  $\underline{Y}^{59}$  כלל לא נוצלו לצרכי הסינטיזה. בנוסף לכך הכופלים של  $x_3$  ו-  $x_{59}$  אלו  $a_0, a_1, a_2, a_3$  או  $a_{28}, a_{29}, a_{30}, a_{31}$  שהם אברי החלון בתחילתו או בסופו ולכן מספרים בעלי ערך מוחלט קטן דבר העלול לגרום, בגלל אורך מילה סופי במחשב, לשגיאת שיערוך גדולה בסינטיזה של  $x$ -ים אלו. הדברים שפורטו לעיל אילו החטרונות העקריים של שיטת סינטיזה זו.

8.3.3 שיטה ב'

נתגבר על חטרונות אלו בכך שנשחזר כל נעלם  $x_j$  מכל 32 המדידות (המספר המכסימלי של מדידות) שיש עליו. נבצע זאת ע"י סינטיזה של כל  $x_j$  על פי השורה האמצעית בלבד במטריצה  $\hat{A}^{\dagger}$ , כלומר נתיחס כעת למערכת המשוואות -

$$\begin{aligned}
 \hat{A} \underline{x}^{31} &= \underline{\tilde{y}}^{31} \\
 \hat{A} \underline{x}^{32} &= \underline{\tilde{y}}^{32} \\
 \hat{A} \underline{x}^{33} &= \underline{\tilde{y}}^{33} \\
 \hat{A} \underline{x}^{34} &= \underline{\tilde{y}}^{34} \\
 \hat{A} \underline{x}^{35} &= \underline{\tilde{y}}^{35} \\
 \hat{A} \underline{x}^{36} &= \underline{\tilde{y}}^{36} \\
 \hat{A} \underline{x}^{37} &= \underline{\tilde{y}}^{37}
 \end{aligned}
 \tag{8.46}$$

:

אם נשווה זאת למערכת השוואות (8.42), ארבעת המשוואות הראשונות זהות אולם בהמשך, במקרה זה  $x_{35}$  ישוחרר מהמשוואה:  $\hat{A} \underline{x}^{35} = \underline{\tilde{y}}^{35}$  בעוד שבמקרה הקודם הוא שוחרר מהמשוואה  $\hat{A} \underline{x}^{31} = \underline{\tilde{y}}^{31}$ , כלומר במקרה זה הוא שוחרר מ-32 מדידות בעוד שעל פי  $\hat{A} \underline{x}^{31} = \underline{\tilde{y}}^{31}$  הוא שוחרר מ-28 מדידות. במקרה זה השחרור יתבצע ע"י:

$$\begin{aligned}
 \hat{A}_8^+ \underline{\tilde{y}}^{31} &= x^{31} \\
 \hat{A}_8^+ \underline{\tilde{y}}^{32} &= x^{32} \\
 \hat{A}_8^+ \underline{\tilde{y}}^{33} &= x^{33} \\
 \hat{A}_8^+ \underline{\tilde{y}}^{34} &= x^{34} \\
 \hat{A}_8^+ \underline{\tilde{y}}^{35} &= x^{35} \\
 \hat{A}_8^+ \underline{\tilde{y}}^{36} &= x^{36} \\
 \hat{A}_8^+ \underline{\tilde{y}}^{37} &= x^{37}
 \end{aligned}
 \tag{8.46}$$

:

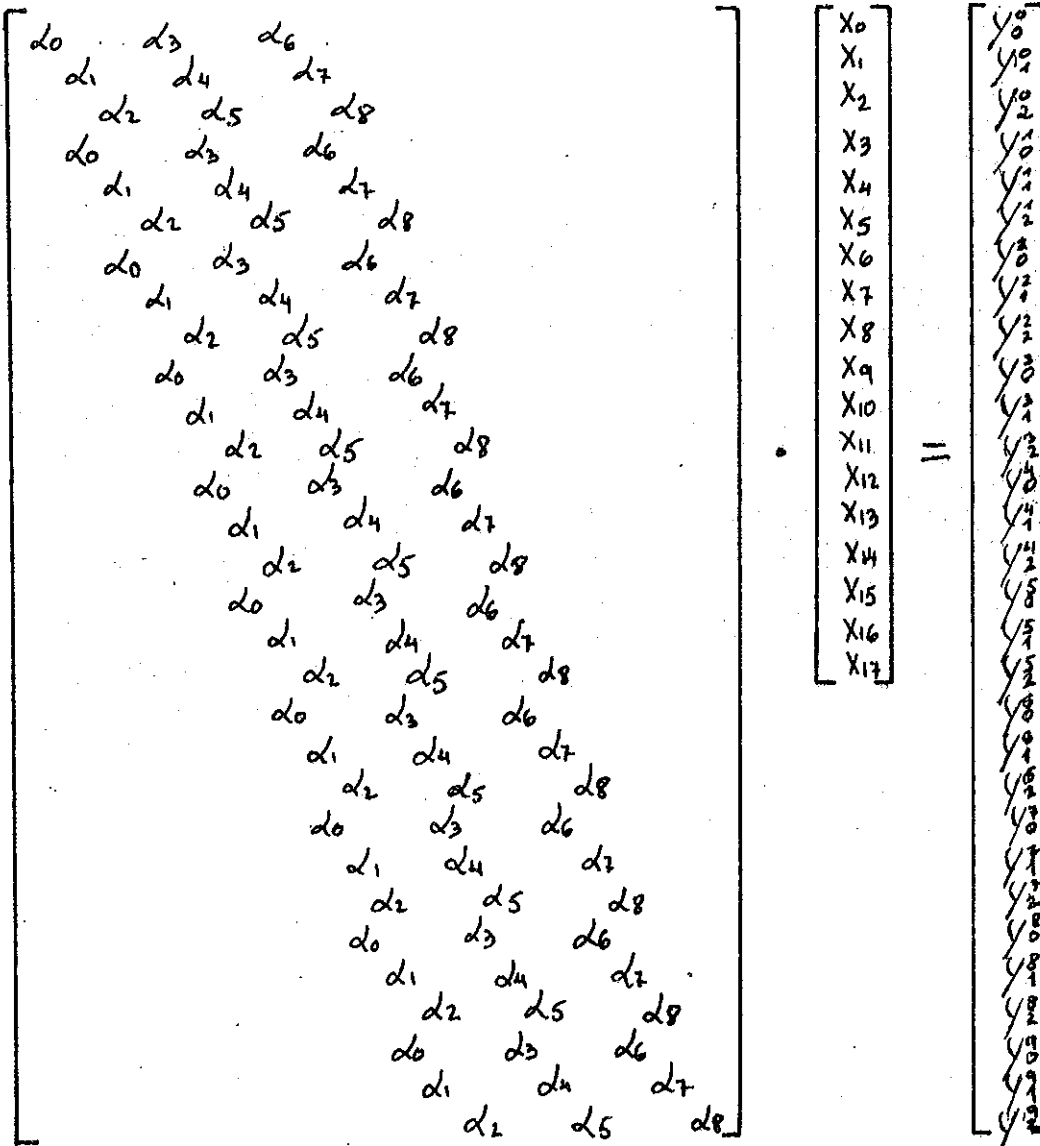
$\hat{A}_8^+$  זוהי השורה השמינית (האמצעית) ב- $\hat{A}_8^+$ .

מכיון שאותו  $\hat{A}$  משותף לכל הנעלמים די לחשב פעם אחת את  $\hat{A}_8^+$  ולהוציא את השורה האמצעית והיא קבועה לכל אורך הליך הסינטיזה. נבחן את צורת הוקטורים  $\underline{\tilde{y}}^j$  והקשר בין  $\underline{\tilde{y}}^j$  ל- $\underline{\tilde{y}}^{j+1}$ .

$$\begin{aligned}
 \underline{\tilde{y}}^j &= \{ \gamma_3^{j-31}, \gamma_2^{j-30}, \gamma_1^{j-29}, \gamma_0^{j-28}, \dots, \gamma_3^j, \gamma_2^j, \gamma_1^j, \gamma_0^j \} \\
 \underline{\tilde{y}}^{j+1} &= \{ \gamma_3^{j-30}, \gamma_2^{j-29}, \gamma_1^{j-28}, \gamma_0^{j-27}, \dots, \gamma_3^{j+1}, \gamma_2^{j+1}, \gamma_1^{j+1}, \gamma_0^{j+1} \}
 \end{aligned}$$

אם ניון לקבל את  $\underline{\tilde{y}}^j$  ע"י כפל הוקטור האינסופי  $\underline{y}$  בסריג סופי, אזי  $\underline{\tilde{y}}^{j+1}$  מתקבל ע"י הזזת אותו סריג וקטור אחד של  $\underline{y}$  קדימה שזה זהה להעתקת הסריג בארבעה (מ) מקומות.

נכתוב את ההליך בצורה מטריצית עבור הדוגמא הבאה:  $R=1, M=3, N=9$  ואברי חלון האנליזה  $\{h(i)\} = \{d_0, \dots, d_8\}$  בתרשים 8.10 מתוארת מטריצת האנליזה כאשר  $x_8$  ו- $x_9$  הם במצב יציב ומשתתפים ב-N כפלים (ולכן יש עליהם N מדידות).



תרשים 8.10 - תאור הנפל  $[A]x = b$ .

FIG 8.10 - PRODUCT OF  $[A] x = b$ .

תרשים 8.11 מתאר את מטריצת האנליזה המצומצמת A והמערכת המתקבלת על פיה.

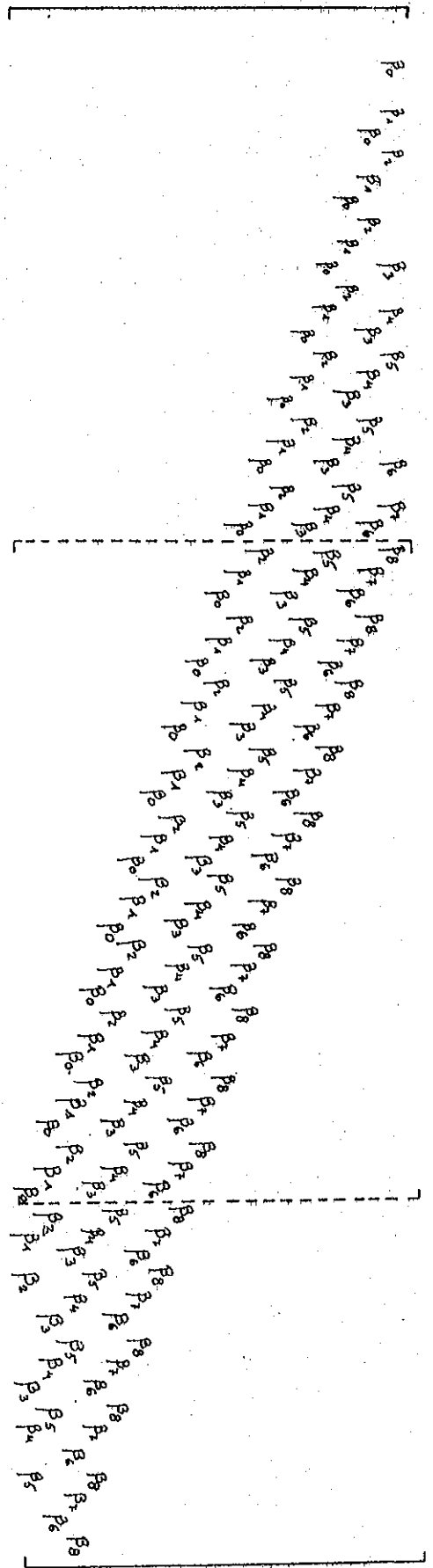
$$\begin{bmatrix} d_2 & d_5 & d_8 \\ d_1 & d_4 & d_7 \\ d_0 & d_3 & d_6 \\ d_2 & d_5 & d_8 \\ d_1 & d_4 & d_7 \\ d_0 & d_3 & d_6 \\ d_2 & d_5 & d_8 \\ d_1 & d_4 & d_7 \\ d_0 & d_3 & d_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_2 \\ X_5 \\ X_8 \\ X_{11} \\ X_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\hat{A}}$

תרשים 8.11 - תאור הכפל  $[\hat{A}]\hat{X} = \hat{b}$   
 FIG 8.11 - PRODUCT OF  $[\hat{A}]\hat{X} = \hat{b}$ .

נמצא את  $[\hat{A}]^T$  עיני חשוב  $(\hat{A}^T \hat{A})^{-1} \hat{A}^T$ . נבחר את השורה שלישית ונסמנה  $\beta = \{\beta_0, \dots, \beta_8\}$ . במקרה זה התאור המטריצי של הסינטיזה מפורט בתרשים 8.12.

ברצוננו להשוות פעולה זאת לפעולת סינטיזה עיני WOLA. נניח לרגע שהסינטיזה מתבצעת עיני WOLA עם הרחבה מחזורית השווה למספר הקיפולים ומסנן סינטיזה שווה למסנן האנליזה. במקרה זה התאור המטריצי של הסינטיזה יהיה כמתואר בתרשים 8.13.



$\alpha_0$	$\beta_0$
$\alpha_1$	$\beta_1$
$\alpha_2$	$\beta_2$
$\alpha_3$	$\beta_3$
$\alpha_4$	$\beta_4$
$\alpha_5$	$\beta_5$
$\alpha_6$	$\beta_6$
$\alpha_7$	$\beta_7$
$\alpha_8$	$\beta_8$
$\alpha_9$	$\beta_9$
$\alpha_{10}$	$\beta_{10}$
$\alpha_{11}$	$\beta_{11}$
$\alpha_{12}$	$\beta_{12}$
$\alpha_{13}$	$\beta_{13}$
$\alpha_{14}$	$\beta_{14}$
$\alpha_{15}$	$\beta_{15}$
$\alpha_{16}$	$\beta_{16}$

FIG. 8.12 - THE SUNTHESIS PROCESE ACCORDING TO METHOD B.



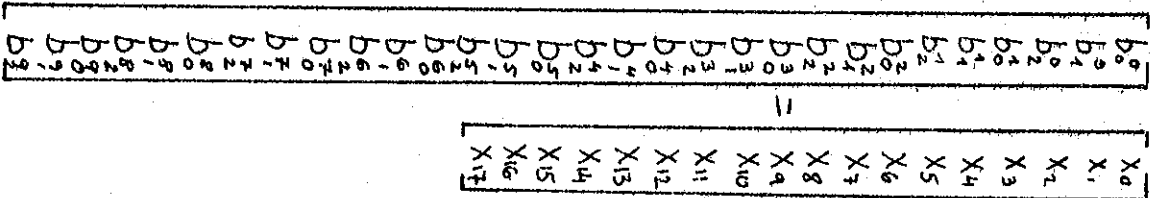
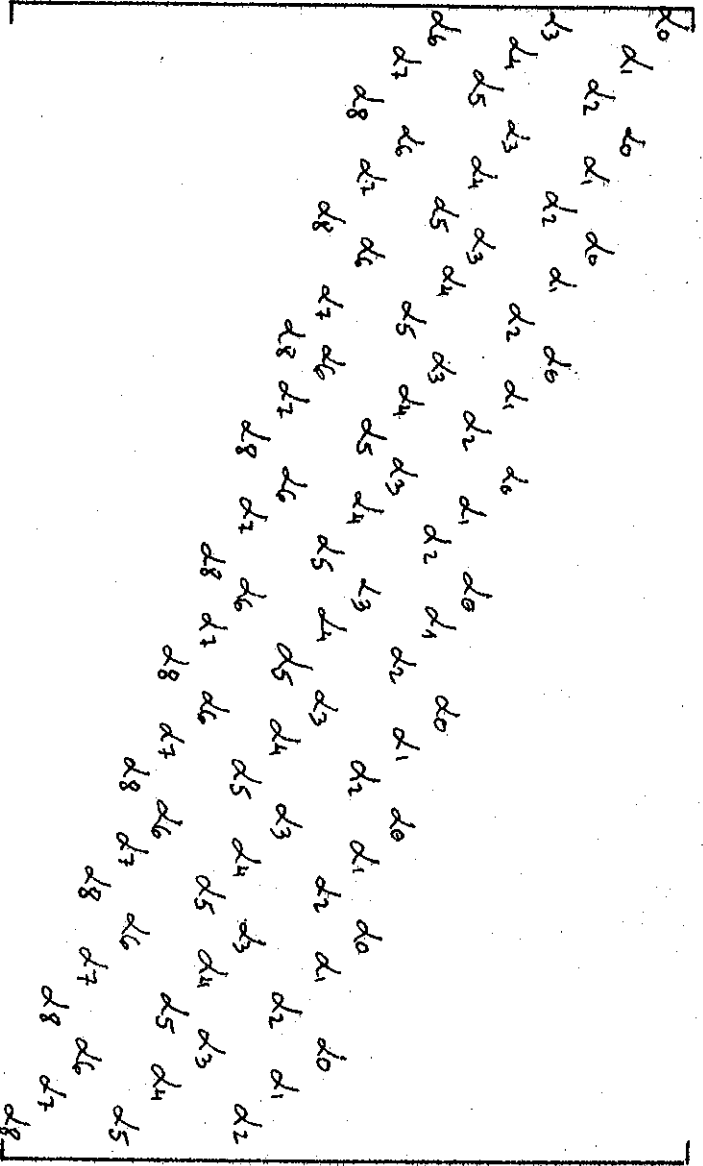


FIG 8.13 - THE SYNTHESIS PROCESS ACCORDING TO WOLA METHOD

אם נבחר היטב תאור זה ונשווהו לתאור בחרשים 8.12 כאשר נתיחס רק לקטעים המקווקים בתאור - ניראה שהתאורים זהים מבחינת צורתם. אם נבחר בקפדנות את שחזור  $x_8$  ו-  $x_9$  נקבל שבשיטה שלנו

$$x_8 = \sum_{i=0}^8 \beta(i) b_i^8 \quad (8.48)$$

וב- WOLA נקבל:

$$x_8 = \sum_{i=0}^8 \alpha(8-i) b_i^8 \quad (8.49)$$

וברור שאם נבחר מסנן סינטיזה  $\alpha(i) = \beta(8-i)$  אזי ניתן לממש את שיטת הסינטיזה שהוצגה לעיל ע"י WOLA עם הרחבה מחזורית השווה למספר הקיפולים וחשוב מסנן סינטיזה ע"י הפוך הסדר בשורה האמצעית של ה- INVERSE GENERALIZED של מטריצת האנליזה המצומצמת  $\hat{A}$ .

חסרונה של שיטה זו בכך שאינה ה- GENERALIZED INVERSE ומבחינה מתמטית אין בידי כלים להעריך כמה היא רחוקה מהפתרון האופטימלי. מבחינה היוריסטית ניתן להציג את חסרונה של השיטה בכך שהיא משערפת כל אחד מאברי  $\underline{x}$  בלי להתחשב בעובדה שחלק מהם נקבעו כבר קודם לכן. מבחינה מתמטית ניתן להציג זאת כך: בעת שערוך  $x_j$  ע"י הפוך המטריצה  $\hat{A}$  קבענו למעשה את כל אברי הוקטור  $\underline{\hat{x}}_j$   $\underline{\hat{x}}_j = \{ \dots, x_{j-m}, x_j, x_{j+m}, \dots \}$  המקוימים  $\hat{A}\underline{\hat{x}}_j = \underline{\hat{y}}_j$ , בעוד שחישבנו רק את  $x_j$  עצמו. נחשב, למשל גם איבר נוסף  $x_{j+m}$ . בשלב הבא נשערך את  $x_{j+m}$  מתוך מערכת המשוואות  $\hat{A}\underline{\hat{x}}_{j+m} = \underline{\hat{y}}_{j+m}$ . לא ברור (ובד"כ גם לא נכון, שהערך שחושב בשלב הקודם והערך שחושב בשלב זה זהים. (הם זהים כאשר ה- MDSTFT הוא חוקי). לכן שיטה זו מבטיחה, גם היא, מערכת יחידה כלומר  $[S][A]=[I]$ .

8.3.4 - שיטה ג'

ניתן להתגבר בצורה חלקית על חסרון זה בכך שנתחשב באותם  $x_{i-j}$  ( $j \geq 1$ ) שכבר ניקבעו לפני חשוב  $x_i$  ומשפיעים על שיחזורו. נממש רעיון זה באופן הבא: (ההטבר מתבסס על הדוגמא בחרשים 8.9  $\hat{A}\underline{x}^i = \underline{\hat{y}}^i$ )

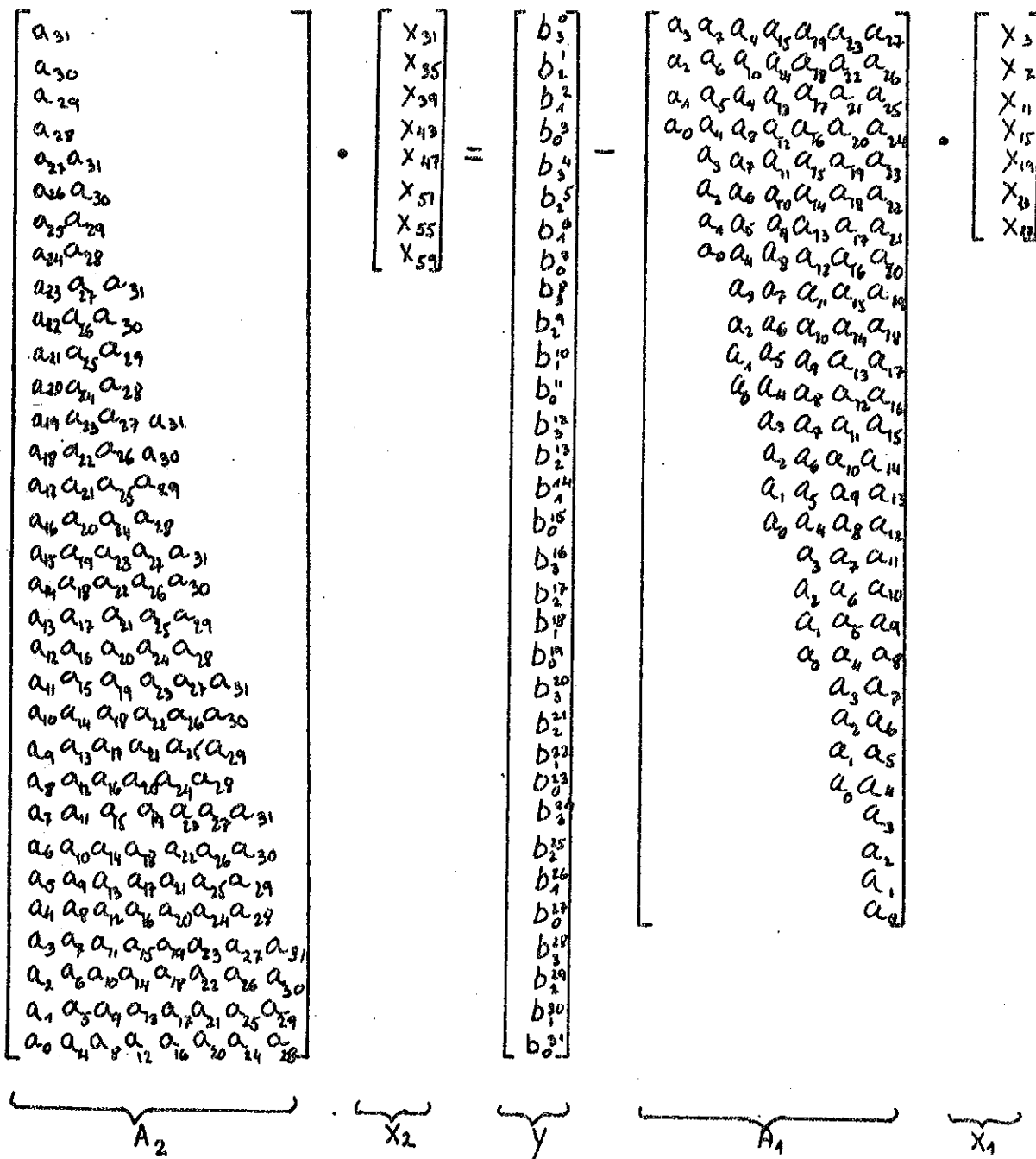
נחלק את  $\hat{A}$  לשני בלוקים  $7-A_1$  העמודות השמאליות, ו- $8-A_2$  העמודות הימניות ובאופן כללי  $(\frac{A_1}{M} - 1) - A_1$  עמודות שמאליות המכילות את כופלי ה- $x_k$  כך ש-  $k < j$  ו-  $\frac{A_1}{M} - A_2$  העמודות הימניות המכילות את כופלי ה- $x_k$  כך ש-  $k \geq j$ . בצורה דומה נחלק את  $\underline{x}^j : x_1^j, \dots, x_k^j$  אלן כל ה- $x_k$ -ים השייכים ל- $\underline{x}^j$  כך ש-  $k < j$ , ו-  $x_2^j, \dots, x_k^j$  אלן כל ה- $x_k$  השייכים ל- $\underline{x}^j$  כך ש-  $k \geq j$ . נסמן זאת:

$$[A_1 \mid A_2] \begin{bmatrix} x_1^j \\ \vdots \\ x_k^j \end{bmatrix} = \underline{y}^j \quad (8.50)$$

ושחזור ה- $x_j$  לכל  $j \geq 1$  בהסתמך על ערכי  $x_k$   $k < j$  שכבר נקבעו מתבסס על פתרון המערכת הבאה:

$$[A_2] \underline{x}_2^j = \underline{y}^j - [A_1] \underline{x}_1^j \quad (8.51)$$

תרשים 8.14 מתאר הצגה זו של הבעיה עבור הדוגמא בתרשים 8.9.



תרשים 8.14 - תאור מטריצי של שיטה ג.

FIG 8.14 - AN ALGEBRAIC DESCRIPTION OF METHOD C.

מכיון ש-  $[A_2]$  מלבנית, פתרון המערכת יהיה

$$\underline{x}_2^i = [A_2]^\dagger (\underline{y}^i - [A_1] \underline{x}_1^i) \quad (8.52)$$

עפ"י אותם נימוקים שכבר הוזכרו בשיטה בי ברצוננו לשערך רק את  $x_2$  עצמו וזהו האבר העליון ב-  $\underline{x}_2$  נסתפק בהוצאת השורה העליונה מ-  $A_2^\dagger$  ושחזור  $x_2$  על פיה. ז"א נקבל:

$$x_2 = [A_2^{\dagger 1}] \cdot (\underline{y}^1 - [A_1] \underline{x}_1^1) \quad (8.53)$$

כאשר  $A_2^{\dagger 1}$  פרושו שורה ראשונה של  $A_2^\dagger$ .

$x_{2+m}$  שזהו האיבר הבא בוקטור  $\underline{x}_2^i$  לאחר  $x_2$ , ישוחרר עפ"י:

$$x_{2+m} = A_2^{\dagger 1} (\underline{y}^{i+m} - [A_1] \underline{x}_1^{i+m}) \quad (8.54)$$

כלומר קיבלנו שלשם שיחזור כל איבר עלינו לבצע את הכפל  $[A_1] \underline{x}_1$  ולהחסירו מ-  $\underline{y}$  פעולה לכאורה מאוד מסובכת וארוכה. כדי לפשט פעולה זו, נבחן שיטה אדיפטיבית למתשה. לשם כך נבחן שנית את הדוגמא בתרשים 8.14.

$$[A_2] \underline{x}_2^{31} = \underline{b}^{31} - [A_1] \underline{x}_1^{31} \quad (8.55)$$

נסמן את אגף ימין ב  $\underline{b}^{31}$

$$[A_2] \underline{x}_2^{31} = \underline{b}^{31} \quad (8.56)$$

נבחן כעת את שחזור ה- $x$  הבא בוקטור  $\underline{x}^{31}$  שזהו  $x_{35}$ . לגביו נקבל את התאור המופיע בתרשים 8.15:

$$[A_2] \underline{x}_2^{35} = \underline{b}^{35} - [A_1] \underline{x}_1^{35} = \underline{b}^{35} \quad (8.57)$$

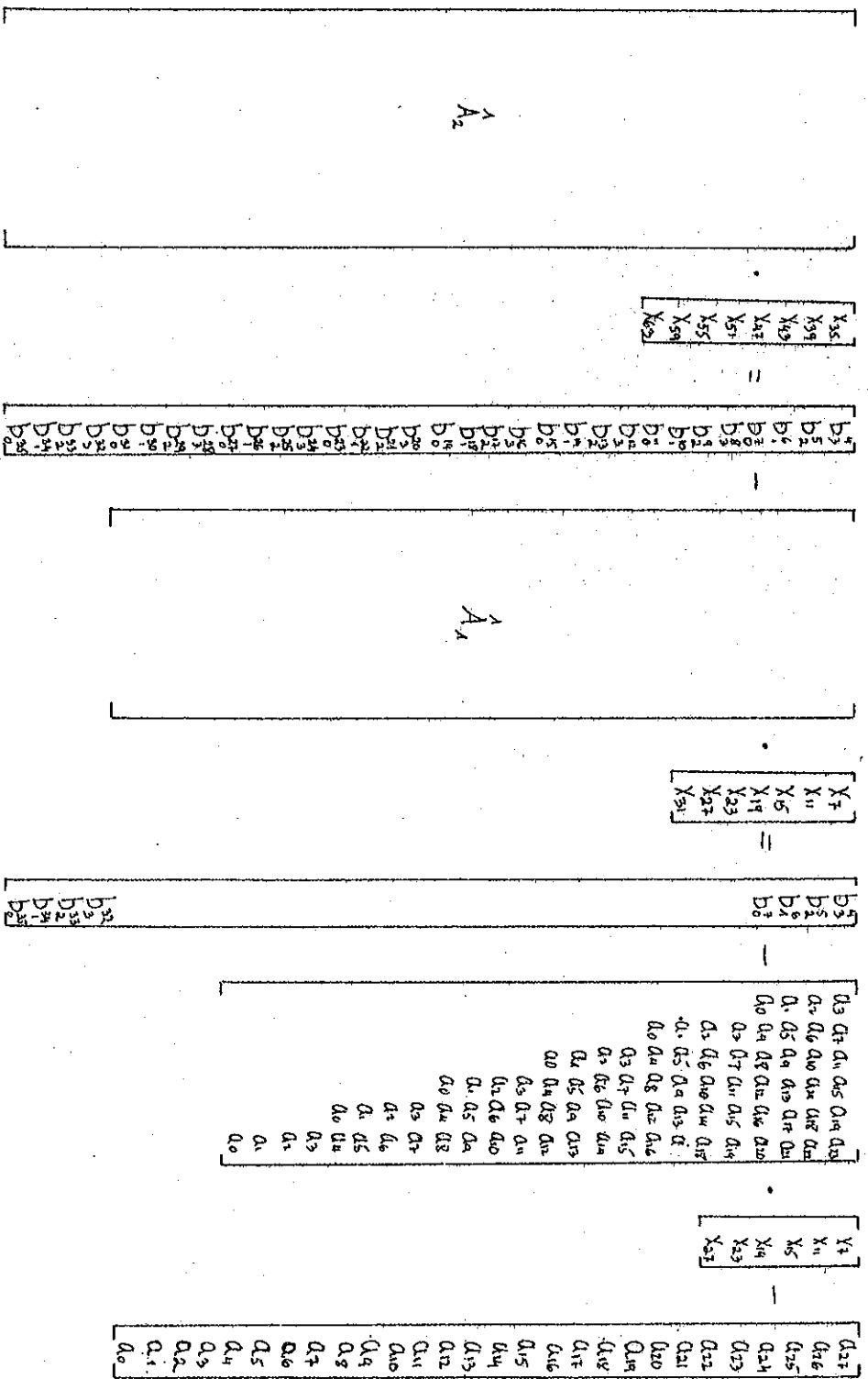


FIG 8.15 - RECONSTRUCTION OF X35 ACCORDING TO METHOD C.

ננסה לבטא את  $\underline{b}^{35}$  כפונקציה של  $\underline{b}^{31}$ . לפי התרשים נקבל

$$\underline{b}^{35} - [A_1^1] x_1^{35} = \hat{b} \hat{A} x_{31} \quad (8.58)$$

$$\hat{A} = [a_{27}, a_{26}, \dots, a_0]^T \text{ כאשר}$$

נגדיר אופרטור  $\hat{u}$  כאשר  $([C])x_i$  פרושו העלאת המטריצה  $C$   $\lambda$  שורות כלפי מעלה זי"א נניח חימא:  $1 - C_j$  זהו וקטור השורה ה-  $j$  נקבל:

$$\begin{aligned} C_0 &\leftarrow C_i \\ C_1 &\leftarrow C_{i+1} \\ &\vdots \\ C_{m-i-1} &\leftarrow C_{m-1} \end{aligned} \quad (8.59)$$

כאשר  $[C]$  סופית נקבל:

$$\begin{aligned} C_{m-i} &\leftarrow 0 \\ &\vdots \\ C_{m-1} &\leftarrow 0 \end{aligned} \quad (8.60)$$

אם  $[C]$  הינה חלק ממטריצה אינסופית  $\tilde{C}$  - נקבל ב-  $\lambda$  השורות האחרונות את  $\lambda$  השורות העוקבות למטריצה  $[C]$  מתוך  $\tilde{C}$ . כלומר אם

$$C_{m-i-1} = \tilde{C}_k \text{ אזי נקבל:}$$

$$\begin{aligned} C_{m-i} &= \tilde{C}_{k+1} \\ C_{m-i-1} &= \tilde{C}_{k+2} \\ &\vdots \\ C_{m-1} &= \tilde{C}_{k+i} \end{aligned} \quad (8.61)$$

השיטה שהוצעה בסעיף 8.33 SOLA ניתנת להצגה עפ"י הגדרות אלו בצורה הבאה:

$$\begin{aligned} [A]x^i &= b^i && \text{בצעד ה- } i \text{ נחשב} \\ [A]x^{i+1} &= b^{i+1} && \text{ובצעד ה- } i+1 \text{ נחשב} \end{aligned}$$

$$\underline{x}^{i+1} = u_1 \{ \underline{x}^i \} \quad \text{כאשר}$$

$$\underline{b}^{i+1} = u_4 \{ \underline{b}^i \}$$

לכאורה עולה התמיהה למה על  $\underline{x}$  אנו מפעילים  $u_1$  ואילו על  $\underline{y}$   $u_4$  לקבלת מערכת המשוואות הבאה, אולם בחינה של וקטור  $\underline{x}$  מוכיחה שהאיברים  $x_k$  בוקטור  $\underline{x}$  אלו למעשה  $x_k$  המקיימים  $k = 4 \cdot m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ) ולכן האיבר הבא אחרי  $x_i$  הוא  $x_{i+4}$  בעוד שה-  $b$  זהו "וקטור רציף" ולכן  $\mu_4\{\underline{x}\}$  שקול ל  $\mu_4\{\underline{y}\}$ .

נבחן כעת את השיטה החדשה שתוארה ב-8.51.

בצעד ה-  $i$  נחשב:

$$[\hat{A}_2] \underline{x}_2^i = \underline{b}^i - [\hat{A}_1] \underline{x}_1^i - b_M^i \quad (8.62)$$

בצעד ה-  $i+1$  נחשב:

$$[\hat{A}_2] \underline{x}_2^{i+1} = \underline{b}^{i+1} - [\hat{A}_1] \underline{x}_1^{i+1} \quad (8.63)$$

$$\begin{aligned} \underline{x}^{i+1} &= u_1\{\underline{x}^i\} & \text{כאשר} \\ \underline{b}^{i+1} &= u_4\{b^i\} \end{aligned}$$

נציב ונקבל:

$$[\hat{A}_2] \underline{x}_2^{i+1} = u_4\{b^i\} - [\hat{A}_1] u_1\{\underline{x}_1^i\} \quad (8.64)$$

להמשך הפתוח נזדקה לשלושה משפטי עזר:

(א) הזזה כלפי מעלה של הכופל

$$[A_1] \underline{x}_2^i = \mu_4 \left\{ \begin{bmatrix} -\phi \\ -\hat{A}_1 \end{bmatrix} \right\} \cdot \underline{x}_2^i = \mu_4 \left\{ \begin{bmatrix} -\phi \\ -\hat{A}_1 \end{bmatrix} \cdot \underline{x}_2^i \right\} \quad (8.65)$$

כאשר  $\phi$  הינה מטריצה הכוללת 4 וקטורי שורה.

(ב) הזזה כלפי מעלה של הנכפל -

$$[A]_1 u_1\{\underline{x}_1^i\} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{x_1^i}{x_i} \end{bmatrix}$$



כאשר  $\phi$  זוהי עמודת וקטור האפס.

$$-x_i \text{ זהו האבר הנוסף במעבר ביו } u_1(x_1^i) - x_1^i$$

(ג) סכום של הזרות.

$$u_i([A]) + u_i([B]) = u_i([A]+[B]) \quad (8.67)$$

לכן ניתן לקבל:

$$\begin{aligned} [A]_2 x_2^{i+1} &= u_4 \{b^i\} [A]_1 u_1(x_1) = \\ &= u_4(b^i) - [0 \mid A_1] \begin{bmatrix} x_1^i \\ x_i \end{bmatrix} = \\ &= u_4 \{b^i\} - u_4 \left\{ \begin{bmatrix} -\phi \\ 0 \mid A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -x_1^i \\ x_i \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (8.68)$$

נבחר את  $\phi$  כמתואר בתרשים 8.16.

$$\phi = \begin{bmatrix} a_3 & a_7 & a_{11} & a_{15} & a_{19} & a_{23} & a_{27} & a_{31} \\ a_1 & a_6 & a_{10} & a_{14} & a_{18} & a_{22} & a_{26} & a_{30} \\ a_1 & a_5 & a_9 & a_{13} & a_{17} & a_{21} & a_{25} & a_{29} \\ a_0 & a_4 & a_8 & a_{12} & a_{16} & a_{20} & a_{24} & a_{28} \end{bmatrix}$$

תרשים 8.16 - תרשימה  $\phi$ .

FIG 8.16 -  $\phi$  MATRIX.



$$B = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A \\ \vdots \\ [0] \end{bmatrix} \quad (8.69)$$

ולכן הכפל ניתן גם לפרוק באופן הבא:

$$[B] \cdot \begin{bmatrix} x_{\lambda}^1 \\ \vdots \\ x_{\lambda}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ [0] \end{bmatrix} [x_{\lambda}^2] + \underline{B} \cdot x_{\lambda} = [A_1] x_{\lambda}^1 + \underline{B} x_{\lambda} \quad (8.70)$$

וכן קיבלנו:

$$\begin{aligned} [A_2] x_2^{i+1} &= u_4 \{ b^i \} - u_4 \{ B \cdot \begin{bmatrix} x_{\lambda}^1 \\ \vdots \\ x_{\lambda}^1 \end{bmatrix} \} = u_4 \{ b^i - B \begin{bmatrix} x_{\lambda}^1 \\ \vdots \\ x_{\lambda}^1 \end{bmatrix} \} = \\ &= u_4 \{ b^i - A_1 x_{\lambda}^1 - \underline{A} \cdot x_{\lambda} \} = u_4 \{ b_M^i - \underline{A} x_{\lambda} \} \quad (8.71) \end{aligned}$$

בעוד שב- WOLA דגימה קיבלנו:

$$[\tilde{A}_2] x_2^{i+1} = u_4 (b^i) \quad (8.72)$$

ז"א קיבלנו שבצעד ה- $\lambda$  לאחר חישוב  $x_{\lambda}^i$  עלינו לבצע את החסור  $b_M^i - \underline{A} x_{\lambda}^i$  לפני העתקת הוקטור  $b$  ארבעה מקומות כלפי מעלה. כאשר  $\underline{A}$  זהו וקטור אברי חלון האנליזה בסדר הפוך. לכן שיטה זו דומה ל-WOLA עם עדכון הוקטור  $b$  לאחר כל חישוב  $x_{\lambda}^i$  (מבחינת כושר חישוב נידרשים לחישוב כל  $x_{\lambda}^i$  עוד י"א כפלים ו- $N$  פעולות חסור).

השלב ה- $\lambda$  ב WOLA ו- AWOLA (ADAPTIVE WOLA) יכלול

$\hat{A} x^i = b^i$	$\hat{A}_2 x_2^i = b_M^i$	א:
$b^{i+1} = u_4 (b^i)$	$b_M^{i+1} = u_4 (b_M^i - \underline{A} x_{\lambda}^i)$	ב:
$x^{i+1} = u_1 (x^i)$	$\hat{x}_2^{i+1} = u_1 (\hat{x}_2^i)$	ג:

השלב ה- $\lambda+1$  יכלול:

$\hat{A} x^{i+1} = b^{i+1}$	$\hat{A}_2 x_2^{i+1} = b_M^{i+1}$	א
-----------------------------	-----------------------------------	---

וחוזר חלילה

WOLA

AWOLA

ממוש שיטה גי מחייב ידיעת וקטור  $y$  בכל שלב ושלב. כדי למצא וקטור זה ולעדכנו בכל שלב יש להגדיר טריג סופי שיאתר את ה- $y$  ים הללו מתוך וקטור  $\underline{y}$  האינסופי.

האיבר ה- $\lambda$  בסריג יוגדר עיין:

$$\text{KEY}(\lambda) = M^\lambda I + (M^\lambda - 1) - ((I))_M \quad \lambda = 0, 1, \dots, (N-1) \quad (8.73)$$

אברי הטריג אלו אינדקסי האיברים בוקטור  $\underline{y}$  המתואר במערכת המורחבת כלומר:

$$\underline{y} = [y_0^0, y_1^0, y_2^0, \dots, y_{M-1}^0, y_0^1, y_1^1, \dots, y_0^{N-1}, y_1^{N-1}, \dots, y_{M-1}^{N-1}]^T$$

והמגדירים את אברי הוקטור  $\hat{y}^i$  במערכת המצומצמת:

$$\hat{A}x^i = \hat{y}^i \quad i=0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

### 8.3.5 הרחבת השיטות עבור צעד הגדול מדגימה אחת

עד כה טיפלנו במטריצות מינימליות ( $R=1$ ) אולם התוצאות שהתקבלו נכונות באופן עקרוני גם עבור  $R > 1$ . במקרה זה כל איבר בחלון האנליזה  $\alpha_i$  הופך לבלוק של מטריצה אלכסונית

$$\begin{bmatrix} \bar{a}_0^i & & & \\ & a_1^i & & \\ & & \dots & \\ & & & a_{R-1}^i \end{bmatrix}$$

כל  $x_k$  הופך לוקטור  $\underline{x}^k = [x_0^k, x_1^k, \dots, x_{R-1}^k]^T$

וכל  $y_j^i$  הופך לוקטור  $\underline{y}_j^i = [y_{j,0}^i, y_{j,1}^i, \dots, y_{j,R-1}^i]^T$

נבחן את השפעת הרחבה זו על כל אחת משיטות הפתרון שהוצגו.

#### שיטה א

בשיטה א פתרנו את המערכת

$$[A]x^i = y^i \quad (8.74)$$

לכן שתה עלינו לפתור

$$[A_B] \underline{x}_B = \underline{y}_B \quad (8.75)$$

כאשר האינדקס B בא לסמן שזוהי מטריצת בלוקים.

במהלך הפיתרון עלינו לחשב את  $[A_B]^\dagger$  פעולה הדורשת היפוך מטריצה. נניח

$$\hat{A} : [N \times M] \times [2 \frac{N}{M} - 1] \text{ נקבל } R-1 \text{ מ, } N, R$$

$$\hat{A}^\dagger : [N \times R] \times [(2(\frac{N}{M}) - 1) \times R] - 1 \text{ לשם חישוב } \hat{A}^\dagger \text{ נידרש להפוך מטריצה}$$

$$C : [(2(\frac{N}{M}) - 1) \times (2(\frac{N}{M}) - 1)] \text{ נידרש להפוך מטריצה}$$

$$D : [(2(\frac{N}{M}) - 1) * R] \times [(2(\frac{N}{M}) - 1) * R] \text{ מכיון שהפוך מטריצה } N \times N \text{ באופן כללי הוא}$$

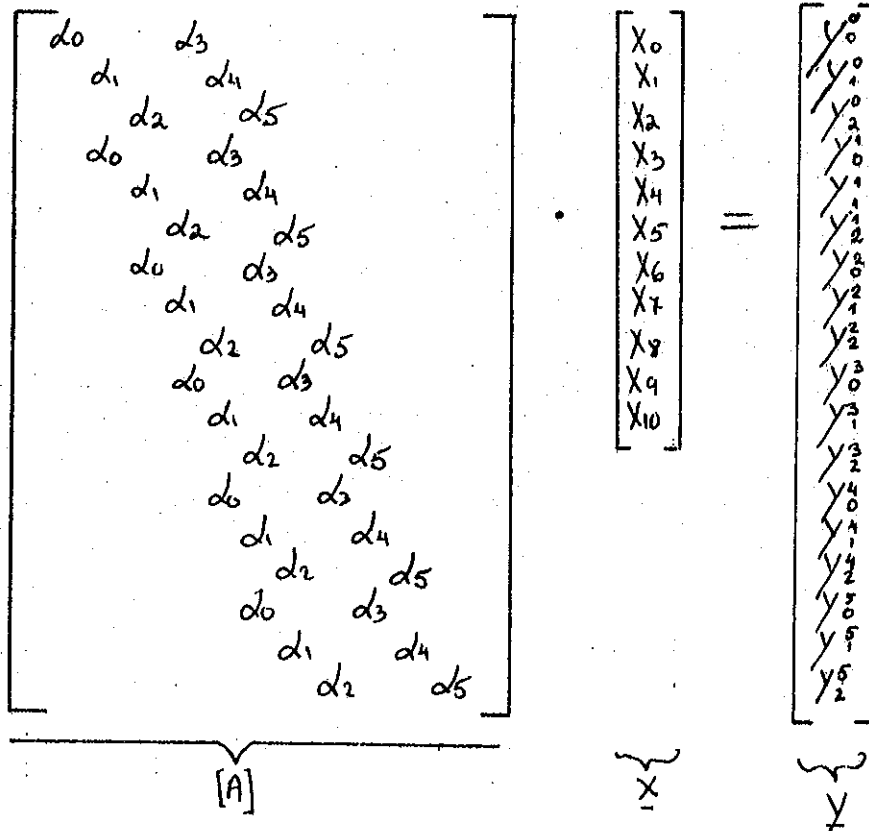
$$R^3 \text{ מקיבוכיות } (R^3) \text{ נקבל שהפוך מטריצה } D \text{ דורש בערך פי } R^3 \text{ אמצעי חישוב}$$

$$\text{מהפוך מטריצה } C. \text{ (עבור } R \text{ בדוגמא שזוהו } R \text{ מעשי } R=32 \text{ נקבל } R^3=32768).$$

מכיון שזוהו פקטור שאין להתעלם ממנו נחפש שיטות להקטין. נבחן את המערכת

$$[A] \underline{x} = \underline{y} \text{ עבור } [A \text{ min}] \underline{x} = \underline{y} \text{ בחרשים 8.18, } [\hat{A}] \underline{x} = \underline{y} \text{ בחרשים 8.19 ו-}$$

$$[A_B] \underline{x}_B = \underline{y}_B \text{ בחרשים 8.20 כאשר } R=3, N=6, M=3-1.$$



תרשים 8.18 - תאור הכפל  $[A \text{ min}] \underline{x} = \underline{y}$ .

FIG 8.18 - PRODUCT OF  $[A \text{ min}] \underline{x} = \underline{y}$ .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d_2 & d_5 \\ d_1 & d_4 \\ d_0 & d_3 \\ d_2 & d_5 \\ d_1 & d_4 \\ d_0 & d_3 \end{bmatrix}}_{\hat{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \\ x_8 \end{bmatrix}}_{\underline{X}} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_2 \\ y_1 \\ y_0 \\ y_3 \\ y_2 \\ y_1 \\ y_0 \end{bmatrix}}_{\underline{Y}}$$

תרשים 8.19 - תאור הכפל  $[\hat{A}] \underline{X} = \underline{Y}$   
 FIG 8.19 - PRODUCT OF  $[\hat{A}] \underline{X} = \underline{Y}$ .

$$\underbrace{\begin{bmatrix} d_0^2 & d_1^2 & d_2^2 & d_0^5 & d_1^5 & d_2^5 \\ d_0^1 & d_1^1 & d_2^1 & d_0^4 & d_1^4 & d_2^4 \\ d_0^0 & d_1^0 & d_2^0 & d_0^3 & d_1^3 & d_2^3 \\ d_0^2 & d_1^2 & d_2^2 & d_0^5 & d_1^5 & d_2^5 \\ d_0^1 & d_1^1 & d_2^1 & d_0^4 & d_1^4 & d_2^4 \\ d_0^0 & d_1^0 & d_2^0 & d_0^3 & d_1^3 & d_2^3 \\ d_0^2 & d_1^2 & d_2^2 & d_0^5 & d_1^5 & d_2^5 \\ d_0^1 & d_1^1 & d_2^1 & d_0^4 & d_1^4 & d_2^4 \\ d_0^0 & d_1^0 & d_2^0 & d_0^3 & d_1^3 & d_2^3 \\ d_0^2 & d_1^2 & d_2^2 & d_0^5 & d_1^5 & d_2^5 \end{bmatrix}}_{\hat{A}_B} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_0^2 \\ x_1^2 \\ x_2^2 \\ x_0^5 \\ x_1^5 \\ x_2^5 \\ x_0^8 \\ x_1^8 \\ x_2^8 \end{bmatrix}}_{\underline{X}_B} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{2,0} \\ y_{2,1} \\ y_{2,2} \\ y_{1,0} \\ y_{1,1} \\ y_{1,2} \\ y_{0,0} \\ y_{0,1} \\ y_{0,2} \\ y_{3,0} \\ y_{3,1} \\ y_{3,2} \\ y_{4,0} \\ y_{4,1} \\ y_{4,2} \\ y_{5,0} \\ y_{5,1} \\ y_{5,2} \end{bmatrix}}_{\underline{Y}_B}$$

תרשים 8.20 - תאור הכפל  $[A_B] \underline{X}_B = \underline{Y}_B$   
 FIG 8.20 - PRODUCT OF  $[A_B] \underline{X}_B = \underline{Y}_B$

המערכת  $[A_B]X_B = Y_B$  ניתנת לפרוק ל-R תת-מערכות שונות כמתואר בתרשים 8.21.

$$\begin{bmatrix} d_0^2 & d_0^5 \\ d_0^1 & d_0^4 \\ d_0^0 & d_0^3 \\ & d_0^1 & d_0^5 \\ & d_0^1 & d_0^1 \\ & d_0^0 & d_0^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_0^2 \\ X_0^5 \\ X_0^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{2,0}^0 \\ b_{1,0}^1 \\ b_{0,0}^2 \\ b_{2,0}^3 \\ b_{1,0}^4 \\ b_{0,0}^5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_1^2 & d_1^5 \\ d_1^1 & d_1^4 \\ d_1^0 & d_1^3 \\ & d_1^2 & d_1^5 \\ & d_1^1 & d_1^1 \\ & d_1^0 & d_1^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_1^2 \\ d_1^5 \\ d_1^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{2,1}^0 \\ b_{1,1}^1 \\ b_{0,1}^2 \\ b_{2,1}^3 \\ b_{1,1}^4 \\ b_{0,1}^5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} d_2^2 & d_2^5 \\ d_2^1 & d_2^4 \\ d_2^0 & d_2^3 \\ & d_2^2 & d_2^5 \\ & d_2^1 & d_2^1 \\ & d_2^0 & d_2^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} d_2^2 \\ d_2^5 \\ d_2^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{2,2}^0 \\ b_{1,2}^1 \\ b_{0,2}^2 \\ b_{2,2}^3 \\ b_{1,2}^4 \\ b_{0,2}^5 \end{bmatrix}$$

תרשים 8.21 - פרוק המערכת  $[A_B]X_B = Y_B$  ל-R תת מערכות.  
 FIG 8.21 - DESCRIPTION OF THE PRODUCT  $[A] X = Y$   
 AS R SUBSYSTEMS.

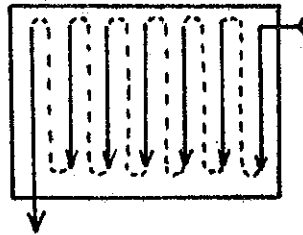
נבחר מ- $A_B$  כל פעם N שורות כשהמרחק בין שתי שורות סמוכות הוא R. נקבל מטריצות כל אחת  $[R \times ((\frac{N}{M}) - 1) \times N]$ . כל אחת מהמטריצות שהתקבלה מכילה עבור כל R עמודות עוקבות, R-1 עמודות אפסים ועמודה אחת של מקדמים שונים מאפס. נצמצם את עמודות האפסים ונקבל R מטריצות  $[N \times ((\frac{N}{M}) - 1) \times N]$ . הוכחה מפורטת של הליך זה היא פשוטה וארוכה ולכן אסתפק בהסבר זה. נסמן את המערכות שהתקבלו:

$$[A_{B,i}^A] X_{0,i} = Y_{B,i} \quad (8.76)$$

וכעת הפתרון מחייב פתרון R מערכות אלו כאשר  $[A_{B,i}^A]$  היא במימדים של  $[A]$ . ולכן הפתרון הכולל הוא מטיבונכיות של  $[R \times ((\frac{N}{M}) - 1) \times N]$  בעוד שמקודם קיבלנו  $[R^3 \times ((\frac{N}{M}) - 1) \times N]$  וזהו חיטכון משמעותי בכמות החישובים.

שיטה בי

בשיטה זו ננצל את התוצאות שהוצגו לעיל ונבחר את 32 השורות האמצעיות של  $[A_{B_x}]^T$ . נראה כיצד מרכיבים מהם את מסנן הסינטיזה עבור שיטת WOLA. כאשר היתה לנו מטריצה אחת אזי מסנן הסינטיזה היה שווה לוקטור השורה האמצעית בסדר הפוך כעת אם נסדר את וקטורי השורות האמצעיות במטריצה כמתואר בתרשים 8.22 כאשר השורה המתקבלת מ-  $[A_{B_0}]^T$  עליונה ומ-  $[A_{B_R}]^T$  תחתונה אזי מסנן הסינטיזה יורכב מהאיברים לאורך המסלול המתואר כאשר האבר הראשון הוא  $f(0)$ , השני  $f(1)$  וכוי.



תרשים 8.22 - הרכבת מסנן הסינטיזה עפ"י שיטה ב.

FIG 8.22 - BUILDING THE SYNTHESIS FILTER FROM THE R POLYPHASES.

שיטה ג'

בשיטה זו נשתמש בתוצאות שהוצגו עבור שיטה בי כאשר בכל פעם יש להקפיד לעדכן את ה-b ים הנכונים. עתה עדכון ה-b ים יתבצע עפ"י R סריגים שונים אשר יוגדרו באופן הבא:

אם נסמן ב  $KEY(I,K)$  את האבר ה-I בסריג ה-K נקבל:

$$KEY(I,K) = KEY(I) * R + K \tag{8.77}$$

$$I = 0, \dots, N-1$$

$$K = 0, \dots, R-1$$

1-  $KEY(I)$  הוגדר עבור המטריצה המינימלית ב-(8.73).



8.3.6 סכום ודוגמאות

בפרק זה הוצגה הבעיה של חישוב  $A^{-1}A^T$  כאשר A מטריצת כפל בחלון אנליזה ופרישת הסיגנאל המתארת גם בצווע קיפולים בזמן. נסיון לטפל בבעיה בכלים שפותחו עבור מטריצת אנליזה שאינה כוללת קיפולים בזמן לא הצליח והוצגה גישה שונה המבוססת על השלמת המטריצה ל-CIRCULANT MATRIX.

מכיון שפתרון הבעיה מסובך הצגתי שלוש שיטות פתרון אלטרנטיביות. כל אחת משחזרת במדויק MDSTFT חוקי ומקרבת את הסינטיזה לסינטיזה האופטימלית לפי מושג ה- GENERALIZED INVERSE. כנסויים שערכתי עבור מודיפיקציה מסוג ערבול [10-13] כמעט לא היו הבדלים בשחזור אות בין שיטה ב לשיטה ג מבחינת SNR (במישור הזמן ובמישור התדר) ומבחינת שמיעה ומכיון ששיטה ג דורשת אמצעי חישוב רבים יותר השיטה המומלצת מביניהן היא ב.

יתרונותיה של שיטה ב על שיטה א ברורים ומכיון ששיטה ב ניתנת למימוש עפ"י המודל הסנטדרטי של WOLA עם קיפולים, זוהי השיטה המומלצת למימוש. מבחינת אמצעי חישוב שיטה ב דורשת אוחס אמצעי חישוב לשם שחזור כמו ב- WOLA מלבד תכנון המסנן שהוא מסובך יותר במקרה זה אולם מתכצע דק פעם אחת לפני תחילת החשוב.

בתרשימים הבאים מתוארים מסנני סינטיזה עפ"י שיטת ה-WOLA שתוכננו עפ"י שיטה ב' שהוצגה בפרק זה.

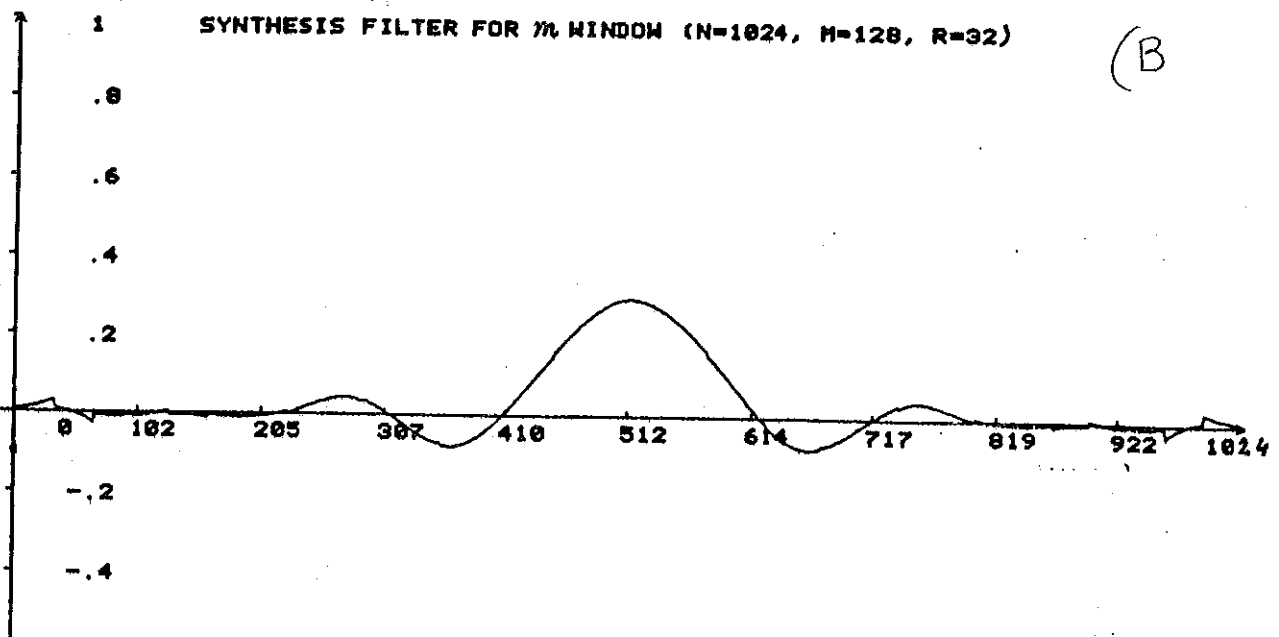
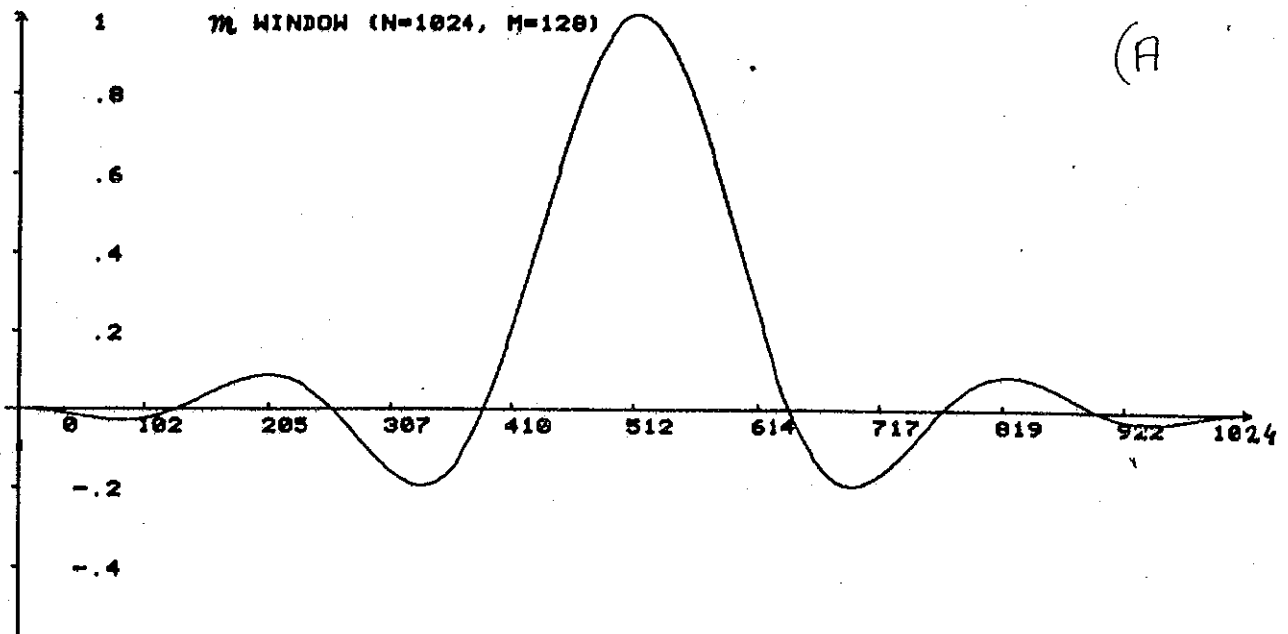
בחרשים 8.23 מתואר מסנן אנליזה "m-WINDOW" שהוגדר ע"י מלאך [36]

$$h_m(i) = \begin{cases} M/N \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{M}\right) \cos\left(\frac{\pi \cdot n}{N}\right) & |n| \leq N/2 \\ 0 & |n| > N/2 \end{cases} \quad (8.78)$$

כאשר  $N=1024$ ,  $M=128$ ,  $R=32$ , ומסנן הסינטיזה שהתקבל עבורו.  
בחרשים 8.24 מתואר מסנן אנליזה  $\text{SIN}(X)/X$  המגודר:

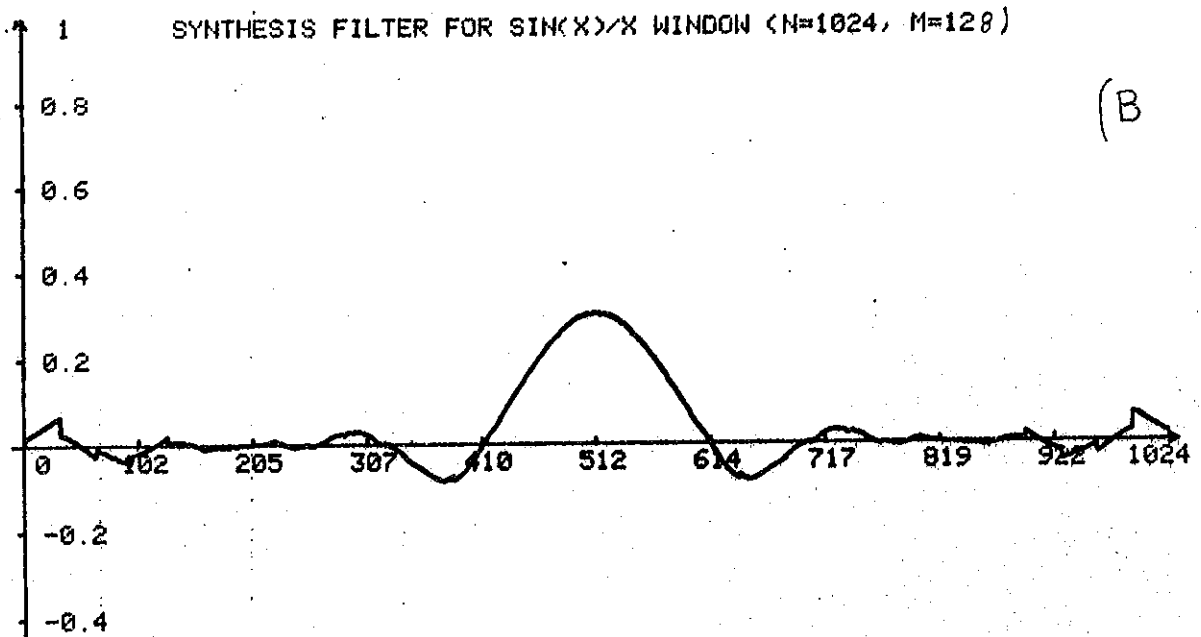
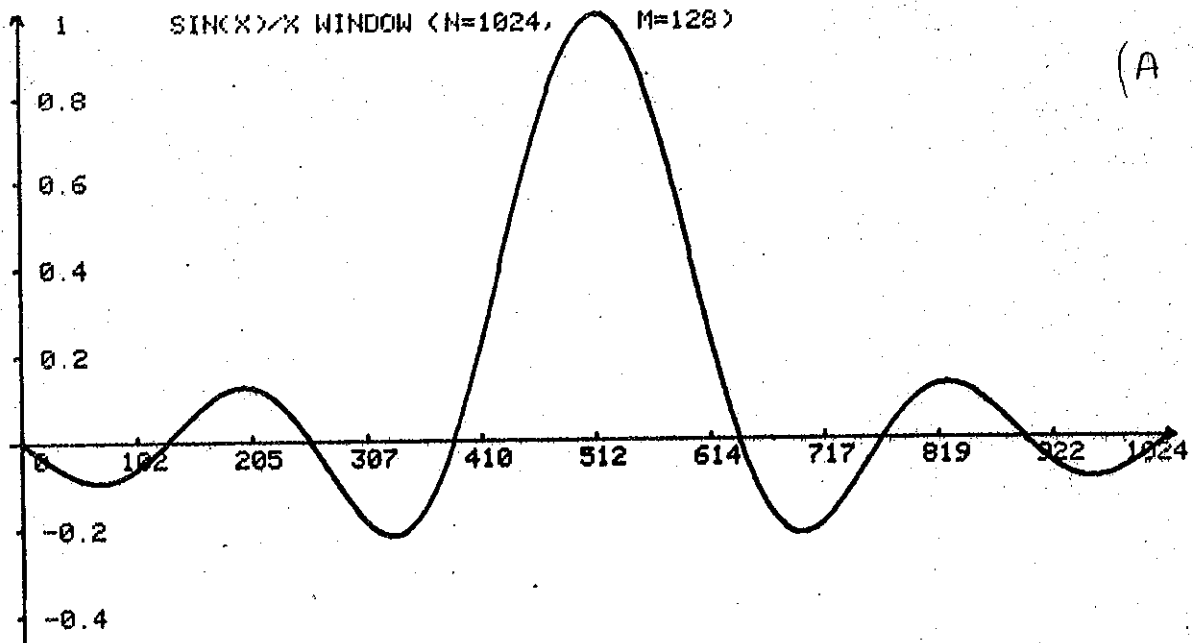
$$h(i) = \begin{cases} \sin\left(\frac{\pi \cdot n}{M}\right) / \frac{\pi \cdot n}{M} & |n| \leq N/2 \\ 0 & |n| > N/2 \end{cases} \quad (8.79)$$

עבור  $N=1024$ ,  $M=128$ ,  $R=32$ , ומסנן הסינטיזה עבורו.



תרשים 8.23 - (A) מסנן אנליזה מסוג  $m$ , (B) מסנן הסינטיזה עבורו.

FIG 8.23 - (A) ANALYSIS FILTER -  $m$  WINDOW,  
(B) ITS SYNTHESIS FILTER.



תושים 8.24 - (A) מסנן אנליזה  $\text{SIN}(X)/X$ , (B) מסנן הסינטיזה עבורו.

FIG 8.24 - (A) ANALYSIS FILTER -  $\text{SIN}(X)/X$ ,  
(B) ITS SYNTHESIS FILTER.

9. ערבול אנלוגי באמצעות DSTFT על פי הגישה האלגברית

9.1 נסויים עם סינטיזה אופטימלית

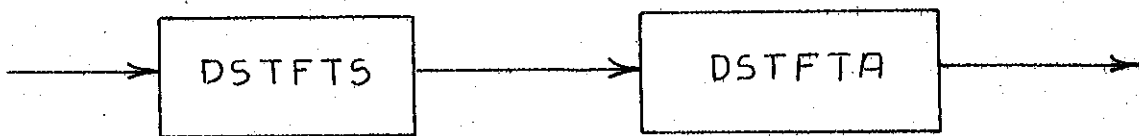
פרק זה בוחן את השלכות המסקנות המתקבלות מפיתוח הגישה האלגברית לתיאור אנליזה וסינטיזה של התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר לגבי מערבליים אנלוגיים באמצעות DSTFT. בסעיף זה מתוארים נסויים הבוחנים את השפעת השימוש בסינטיזה אופטימלית לשחזור אות מ-DSTFT לעומת השימוש בסינטיזה המקובלת כאשר המודיפיקציה כוללת עירבול אקראי של דגמי האות. בנסוי הראשון נבחנה מערכת DSTFT הכוללת אנליזה עם חלון HANNING (בעל רוחב סרט של  $\frac{4C}{M}$ ) באורך 128 נקודות וגודל צעד של 32 דגימות. לאחר העירבול האות שוחזר פעם אחת עם מסנן סינטיזה אופטימלי שחושב על פי נוסחה (7.22) ותואר בתרשים 7.3 ופעם שניה עם מסנן סינטיזה מקובל שזהו חלון מלבני. איכות הדיבור המשוחזר במקרה של מסנן סינטיזה אופטימלי הייתה טובה יותר אולם עדיין הוא התקבל מלווה ברעש מחזורי חזק. הדיבור המשוחזר עם סינטיזה אופטימלית הושווה לאחר מכן גם לדיבור משוחזר כאשר מערכת ה-DSTFT כללה מסנן אנליזה מסוג  $m$  (כמוגדר בנוסחה 4.9) (בעל רחב סרט של  $\frac{2C}{M}$ ) ומסנן סינטיזה מקובל, והסתבר שאיכות האחרון טובה יותר. לכן הדרישה לגבי רוחב הסרט של מסנן האנליזה שישווה ל- $\frac{2C}{M}$ , כפי שפורטה בסעיף 4.3 הינה דרישה חזקה שהתעלמות ממנה פוגמת במידה רבה באיכות הדיבור המשוחזר.

הנסוי השני כלל השוואה של דבור משוחזר כאשר האנליזה התבצעה עם מסננים ברוחב סרט של  $\frac{2C}{M}$  קבצי הדבור המשווים התקבלו ממערכת DSTFT הכוללת מסנן אנליזה מסוג  $m$  באורך 512 נקודות, בצוע התמרה של 128 נקודות וגודל צעד של דגימה בודדת. מערכת הסינטיזה כוללת במקרה הראשון מסנן סינטיזה מסוג  $m$  השווה למסנן האנליזה וגורם הגבר של  $\frac{1}{128}$  (זהו לא בדיוק מסנן הסינטיזה המקובל שזהו מסנן אינטרפולציה המכיל אפס כל  $R$  דגימות, ולכן במקרה של גודל צעד השווה לדגימה בודדת זהו מסנן המורכב מפונקצית  $\delta$ ). במקרה השני מומשה סינטיזה אופטימלית כלומר סינטיזה עם מסנן  $M$  השווה למסנן האנליזה ולאחר מכן העברת האות המתקבל דרך מסנן לינארי קבוע בזמן המיצג את בצוע הכפל ב- $(A^T A)^{-1}$ . הערבול שמומש כלל פרמוטציה של אמפליטודת מקדמי ההתמרה בלבד (ערבול  $M$  שפורט בסעיף 4.5). תוצאות הנסוי היו שהסינטיזה האופטימלית לא שיפרה בהרבה את איכות הדיבור המשוחזר, יחס אות לרעש עלה בכ-108 - שפור שכלל לא ניתן להבחין בו בשמיעה, והדיבור נשמע עדיין בלויט רעש חזק.

מכיוון שהנסוי כוצע עבור  $R=1$ , כלומר יחס הדיצימציה המינמלי האפשרי, ברור שבמערכת מעשית שבה אנו נדרשים לעבוד עם יחס דיצימציה גבוה ככל האפשר (כד שטייין יקיים את תנאי נייקווסט לגבי דגימת האות במוצא כל אחד מהערוצים), איכות הדיבור המשוחזר יכולה להשאר קבועה או לכל היותר לרדת אולם אינה יכולה לעלות. מכאן שתוצאות נסוי זה יכולות ללמד על איכות הדיבור המשוחזר שניתן לקבל במערכת עירבול אנלוגי פפי שמתוארת בתרשים 4.7, והן מעוררות ספקות לגבי כדאיות השימוש ב-DSTFT לשם עירבול אנלוגי.

9.2 יחידות של מערכת סינטיזה אנליזה להתמרת פוריה לזמן קצר

הדרישה למערכת יחידה במערבלים אנלוגיים באמצעות DSTFT עבור ערוץ שקוף כפי שפורטה בסעיף 4.4, ניתנת להצגה בבעיה של קבלת מערכת יחידה עבור מערכת סינטיזה ואנליזה כמתואר בתרשים 9.1.



תרשים 9.1 - מערכת סינטיזה ואנליזה של DSTFT.

FIG 9.1 - DSTFT SYNTHESIS AND ANALYSIS SYSTEM.

עפ"י הגישה האלגברית ניתן להציג בעיה זו בצורה הבאה: האם קיימות מטריצות סינטיזה  $[S]$  ואנליזה  $[C]$  כך ש-  $[I] = [S][C]$  ? כאשר האנליזה מוגדרת כמפורט במקרים 1 ו-3 בטבלה 4.1, כלומר גודל הצעד קטן ממספר פסי התדר בהתמרה, התשובה שלילית.

נוכיח טענה זו: תהי מטריצת  $[C]$  מטריצת אנליזה בעלת מימדים  $(M \times N)$  ומדרגה  $N$ . תהי  $[S]$  מטריצת סינטיזה בעלת מימדים  $(M \times M)$  מדרגה  $M$ . נפרק את  $[C]$  למכפלת שתי מטריצות.

$$[C] = [Z][A] \tag{9.1}$$

[A] מטריצת כפל בחלון אנליזה ופרישת האות, מטריצה מלבנית מאומצת מדרגה  $N$  ו-[Z] מטריצה ריבועית מאומצת, מטריצה BLOCK DIAGONAL מסדר  $M$ , המתארת את ביצוע ה-DFT לכל סידרה ותיקון הפאזה לפי CROCHIERE [14]. בצורה דומה נפרק את [C] למכפלת שתי מטריצות.

$$[D] = [s][\hat{Z}] \tag{9.2}$$

[s] מטריצת כפל בחלון סינטיזה ובצוע שחזור האות בפעולת OVERLAP ADD, מטריצה מלבנית מאומצת מדרגה  $N$ .  $[\hat{Z}]$  מטריצה ריבועית מאומצת, מטריצה BLOCK DIAGONAL מסדר  $M$ , המתארת את ביצוע IDFT לכל סידרה ותיקון הפאזה לפי CROCHIERE. מעצם בנית המטריצות [Z] ו-[ $\hat{Z}$ ] כפי שמתואר בפרק 5 ניתן לקבל ש-

$$[\hat{Z}] = [Z]^{-1} \tag{9.3}$$

לכן נבחן את הכפל

$$[C][D] = [Z][A][s][\hat{Z}] = [Z][A][s][Z]^{-1} \stackrel{?}{=} [I]$$

אם נכפול את שני האגפים ב-[ $Z$ ]<sup>-1</sup> משמאל ו-[Z] מימין נקבל תנאי שקול:

$$[A][s] \stackrel{?}{=} [I] \tag{9.4}$$

המטריצה המתקבלת כתוצאה מהכפל  $[A \cdot s]$  היא במימדים מאומצת. מכיון ש-A ו-s כל אחת מדרגה  $N$ , דרגת  $[A \cdot s]$ , לפי משפט הדרגות, היא לכל היותר  $N$  ו- $M < N$ . מכיון ש- $I$  הינה מטריצה מדרגה  $M$  נקבל ש- $[A][s] \neq [I]$  תמיד. למעשה ניתן היה להסתפק בדרישה חלשה יותר לגבי המטריצה  $[A \cdot s]$ , שתהיה אלכסונית עם אלכסון קבוע, פרט לתופעת מעבר בתחילת האלכסון ובסופו. אולם למעשה מתקבל אלכסון קבוע לכל אורכו (שאינו כולל אפסים) ומכיון שדרגת המטריצה קטנה מממדיה, מתקבלים איברים מחוץ לאלכסון כך שגם דרישה זו אינה מתקימת.

10. סכום ומסקנות

10.1 ערבול אנלוגי באמצעות DSTFT.

עבודה זו סקרה שיטות ערבול אנלוגי באמצעים ספרתיים במישור הזמן, והבעיות המתעוררות בשיטות אלו כאשר הדבור המערבל מועבר ברשת הטלפון הקימת כגון הגדלת רוחב סרט ורגישות להסחת פאזה של הערוץ. כדי להתגבר על חסרונות אלו הוצע בספרות לערבול את אות הדבור בתחום התדר באמצעות התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר. במהלך העבודה בוצעו סמולציות לשיטת ערבול זו כאשר ניבחנו דרגות החופש השונות בתכנון מערכת DSTFT והשפעתן על מידת ההסחה של הדבור המערבל ואיכות המשוחזר.

מסקנות נסויים אלו מפורטות בפרק 4 אולם בכל המקרים איכות הדבור המשוחזר היתה נמוכה. תוצאות אלו עוררו את המחשבה שיכול להיות ששיטת ערבול זו מבוססת על מערכת הנחות שלא כולן נכונות. חחילה ניבחנה האפשרות לקבלת מערכת ערבול כמערכת יחידה עבור ערוץ שקוף. מסתבר שגם במקרה זה איכות הדבור המשוחזר נמוכה והדבר גובע מחוסר היכולת לקבל מערכת יחידה לסינטיזה ואנליזה של MDSTFT. עפ"י הגישה האלגברית לתאור אנליזה וסינטיזה של DSTFT שפותחה במהלך העבודה, ניתן להוכיח שלא ניתן לקבל מערכת יחידה כזו, ובכך מתערער אחד היסודות בבסיס הערבול באמצעות DSTFT. למרות שהמערכת אינה מערכת יחידה, יש להדגיש שבמקרה שה-MDSTFT הינו אות חוקי אזי לאחר סינטיזה ואנליזה הוא ישוחזר במדויק. הבעיה הינה שלאחר ערבול ה-MDSTFT המתקבל בדיכ אינו אות חוקי.

אחד היתרונות של ערבול בתחום ה-DSTFT הוא חסינותו לשגיאות פאזה לינארית כלומר אין צורך לסנכרן בין המשדר למקלט. כאשר אנו בוחנים את ה-DSTFT כפלט מערך מסננים טענה זו ניראת אינטואיטיבית נכונה, ואולם ההוכחה המתמטית המפורטת המתוארת ב-[13] מתבססת על ההנחה שהאות במוצא המשחזר, עם ערוץ אדיש, זהה לאות בכניסה למערבל. על בסיס הנחה זו הוכח שעם ערוץ התורם הסחת פאזה לינארית, עדיין נקבל שאות המוצא זהה לאות הכניסה. מכיון שהנחה זו אינה נכונה עבור ערבול שהוא פרמוטציה אקראית של דגמים כפי שהוכח בפרק 8, גם המסקנה הנובעת ממנה אינה נכונה. נסויים שערכתי אכן מאשרים שהערבול באמצעות DSTFT חסין יחסית לשיטות אחרות להסחת פאזה לינארית של הערוץ אולם אינו חסין באופן מוחלט וקימת ירידה באיכות הדבור המשוחזר בתלות בהשהיית הערוץ. לדעתי, המבוססת על סימולציות שערכתי והתאור המתמטי של מערכת ערבול כפי שפותח בעבודה זו, לא כדאי בטכניקות הערבול המקובלות להשתמש במערבלים מסוג זה, והמאמרים המפרטים את יתרונות השיטה [11-13] ניכתבו כנראה ללא בדיקת הטענות באופן מעשי או ע"י סימולציות.

10.2 הגישה האלגברית לתאור אנליזה וסינטיזה של DSTFT.

במהלך העבודה פותחה גישה אלגברית לתאור אנליזה וסינטיזה של התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר. גישה זו מאפשרת שימוש בכלים מתמטיים נוספים לאלו המקובלים בפתרון בעיות פתוחות בחחום ה-DSTFT. הגישה מבוססת על הצגת פעולת האנליזה ככפל בין מטריצת אנליזה ווקטור דגימות האות לקבלת וקטור ה-DSTFT, ופעולת הסינטיזה ככפל בין מטריצת סינטיזה ווקטור התמרה לקבלת האות המשוחזר. עד כה היה ידוע תנאי הכרחי ומספיק שעל מסנני האנליזה והסינטיזה למלא [34] על מנת להבטיח מערכת יחידה עפ"י המודלים הקיימים. בהתבסס על הגישה האלגברית פותחו שיטות לתכנון מסנני סינטיזה עבור שיטת אנליזה נתונה, מסננים - המבטיחים מערכת יחידה, (יש להדגיש ששיטות אלו תקפות גם עבור מסנני אנליזה שאורכם גדול ממספר פסי התדר בהתמרה). כמו כן, הוגדרו תנאים הכרחיים מערכת האנליזה (כלומר מסנן האנליזה, מסי הנקודות בהתמרה ויחס הדצימציה) למלא, על מנת לאפשר שחזור האות ללא תלות בשיטת הסינטיזה.

במקרים רבים משמשת התמרת פוריה לזמן קצר ככלי לשם בצוע מודיפיקציה של אות שנוח לממשה או להגדירה במשור התדר. במקרה זה מכוצעת אנליזה, מודיפיקציה וסינטיזה לקבלת אות מעובד בזמן. במקרים אלו בדיכ ההתמרה המתקבלת לאחר המודיפיקציה אינה התמרה "חוקית" כלומר לא קיים אות בזמן שזו התמרת פוריה שלו לזמן קצר, וכלל לא ברור שסינטיזה המבטיחה מערכת יחידה מתאימה גם במקרים אלו. במהלך העבודה הוגדר קריטריון לסינטיזה אופטימלית עבור סידרת התמרת פוריה דיסקרטית שעברה מודיפיקציה - קבלת סידרה בזמן שאם נבצע לה אנליזת התמרת פוריה דיסקרטית לזמן קצר אזי הסידרה המתקבלת תהיה הקרובה ביותר לסידרה הנתונה במובן של מינימום שגיאה רבועית. ברור שאם הסידרה המתקבלת לאחר המודיפיקציה היא סידרה חוקית אזי הסינטיזה האופטימלית מתלכדת עם סינטיזה המבטיחה מערכת יחידה.

על פי הגישה האלגברית בעית הסינטיזה הופכת לבעית פתרון מערכת משוואות לינארית. כאשר גודל הצעד באנליזה קטן ממספר פסי התדר בהתמרה מתקבלת מערכת משוואות הכוללת יותר משוואות מנעלמים. במקרה זה הסינטיזה האופטימלית שקולה לפתרון המערכת עפ"י ה- GENERALIZED INVERSE של מטריצת מקדמי המשוואות.



במהלך העבודה ניבחנו דרך לחשוב של מטריצה מסוג זה - פעולה הכרוכה בהפוך מטריצה מסדר השואף לאינסוף, כמו כן נבחנו האינטרפרטציה הפיסיקאלית של בצוע הסינטיזה על פי גישה זו. כאשר אורך מסנן האנליזה שווה למספר פסי התדר בהתמרה ניתן לחשב במדויק את מסנני הסינטיזה האופטימליים, ומודל הסינטיזה האופטימלי זהה למודל המקובל כאשר מסנני הסינטיזה האופטימליים מוצבים לתוכו. כאשר מסנן האנליזה ארוך ממספר פסי התדר בהתמרה הפתרון עפ"י קריטריון האופטימליות שהוגדר מסובך.

במקרה של גודל צעד השווה לדגימה בודדת הפתרון פשוט יותר וכולל הפוך של מטריצת טופליץ אינסופית. פעולה זו נוח לבצע לאחר השלמת המטריצה למטריצת CIRCULANT והוכח [45] שכאשר סדר המטריצה שואף לאינסוף המרחק בין הפתרונות שואף לאפס.

בעבודה מוצג פתרון למקרה זה, פתרון שהוא בעל אורך אינסופי אולם בעל אנרגיה חסומה ולכן כאשר אנו מממשים אותו בעזרת מחשבים בעלי דיוק סופי ניתן להתייחס אליו כפתרון מאורך סופי. האינטרפרטציה הפיסיקאלית של צורת פתרון זו מתלכדת ברובה עם המודל המקובל כפי שהוצע למקרה זה [36] כאשר ההרחבה המחזורית שווה למספר הקיפולים ומסנן הסינטיזה שווה למסנן האנליזה בתוספת שלב של תקון הסידרה המתקבלת על ידי העברתה דרך מסנן לינארי קבוע בזמן בעל תגובה להלם  $h(n)$ .

מכיון שהפתרון המדויק עבור צעד הגדול מדגימה בודדת מסובך, פותחו שלוש שיטות סינטיזה שהן תת אופטימליות במובן של סינטיזה עם מינימום שגיאה ריבועית עבור  $MOSTFT$  לא חוקי, אולם מבטיחות במקרה של  $MOSTFT$  חוקי קבלה של מערכת יחידה. השיטה הראשונה הינה הפשוטה ביותר מבחינה מתמטית אולם לא נוחה למוש, השיטה השנייה מתלכדת עם המודל הקיים לסינטיזה של אות שעבר אנליזה הכוללת קיפולים בזמן כאשר השיטה מפרטת דרך לחישוב מסנן הסינטיזה. השיטה השלישית הינה הרחבה של השיטה השנייה בצורה אדפטיבית ולכן ממושה מחייב הרחבת המודל הקיים להכנסת גורם האדפטיביות.

העבודה שהוצגה ניתנת להמשכה הרחבה והעמקה, ואציג מספר נקודות לדוגמא.

בפתוח הסינטיזה האופטימלית עבור גודל צעד של דגימה אחת הנחתי מספר הנחות כגון שניתן לבצע פעולת INVERSE על הוקטור  $(FY^T)$  (8.34) כלומר כל אחד מהאברים שונה מאפס ונותר לבחון האם תנאי זה מתקיים תמיד עבור כל מסנן אנליזה שהוא, כמו כן הוכחתי שהתוצאה המתקבלת מחשוב  $(A^T A)^{-1}$  הינה סידרה בעלת אנרגיה חסומה שאינה תלויה בסדר המטריצה. כדי להצדיק במלואו את הפתוח

שהצגתי יש להוכיח משפט חזק יותר והוא שלכל  $\epsilon > 0$  קיים  $N(\epsilon)$  ו-  $R(\epsilon)$  כך שלכל מטריצה מסדר  $N$ ,  $N(\epsilon) < N < \infty$  מתקיים  $h_n(\lambda) < \epsilon$  לכל  $\lambda > R(\epsilon)$  ו-  $|h_n(\lambda) - h_m(\lambda)| < \epsilon$  כאשר  $h_n(\lambda)$  זהו האיבר ה- $\lambda$  של המסנון, המחושב עפ"י מטריצה מסדר  $n$ . משמעות משפט זה הינה שהחל משלב מסוים הגדלת מטריצת האנליזה אינה משנה את אברי המסנון המחושב, והאיברים הנוספים למסנון עקב הגדלת סדר המטריצה קטנים מ- $\epsilon$ .

עפ"י השיטות שהוצגו ניתן גם להמשיך לקבלת פתרון עבור סינטיזה אופטימלית עם גודל צעד הגדול מאחד.

הכלים שפותחו עפ"י הגישה שהוצגה מאפשרים טפול במודיפיקציות כלליות של DSTFT ובמידוד מודיפיקציות לינאריות. ניתן למשל לבחון את השפעת חלונות אנליזה שונים על מודיפיקציה נתונה או את השפעת גודל הצעד באנליזה  $R$  על השחזור האופטימלי וכ"י. כאשר אנו מטפלים במודיפיקציה מסוג ערבול שבה מטרתנו העקרית הינה קבלת מערכת סינטיזה אנליזה שחהווה מערכת יחידה ניתן עפ"י הגישה שתוארה לחשב מסנון אנליזה שיתאים במיוחד לדרישה זו. נגדיר מטריצה  $[B]$  - מטריצה המתארת פעולת סינטיזה ואנליזה

$$[B] = [A]([A]^T[A])^{-1}[A]^T \quad (10.1)$$

ונמדוד את מרחקה ממטריצת היחידה ע"י הגדרת משתנה  $k$ :

$$k = \text{TRACE} (([B]-[I])^T([B]-[I])) \quad (10.2)$$

ובחירת שיטת אנליזה המבטיחה מינימום על  $k$ , מבטיחה קירבה מכסימלית של מערכת סינטיזה אנליזה למערכת יחידה.

על בסיס הגישה שהוצגה ניתן גם להמשיך למציאת שיטה נוחה לבדיקה האם סידרה היא DSTFT חוקי אם לאו, או לבחון כיצד תיראה הסינטיזה כאשר גודל הצעד  $R$  אינו מחלק שלם של מספר פסי התדר בהתמרה  $M$ .

הבעיות שהוצגו בעבודה זו ונמצא להן פתרון, יחד עם הבעיות שפורטו לעיל, שיש להמשיך לחקור ונראה שניתן לפתור על בסיס השיטה האלגברית, מעוררות את העניין להמשיך ולפתח את השיטה האלגברית ליצוג אנליזה וסינטיזה של DSTFT שעקרונותיה הוצגו בעבודה זו.

נספח א

נוכיח את תכונות ה- GENERALIZED INVERSE שפורטו בסעיף 5.6.

א.  $[c]^\dagger [c] = [I]$

$[c]^\dagger [c] = (([c]^* [c])^{-1} [c]^*) [c] = ([c]^* [c])^{-1} ([c]^* [c]) = [I]$

ב.  $E = \| [c] \hat{x} - b \|^2$  מביא למינימום את הפונקציה  $\hat{x} = [c]^\dagger b$

$E = ([c] \hat{x} - b)^T ([c] \hat{x} - b)$

ו-  $\hat{x}$  מביא את E למינימום אם יים  $\hat{x}$  מאפס את  $\frac{\partial E}{\partial \hat{x}}$

$\frac{\partial E}{\partial \hat{x}} = 2 [c]^* ([c] \hat{x} - b) =$  נבחן תנאי זה

נציב את  $\hat{x}$  לקבלת:

$= 2 [c]^* ([c] ([c]^* [c])^{-1} [c]^* b - b) =$

$= 2 [c]^* ([c] [c]^{-1} [c]^* b - b) =$

$= 2 [c]^* (b - b) = 0$  ח.ש.ל

REFERENCES - מקורות

- [1] "Special Issue on Communications Privacy", IEEE Communications Society Magazine, Vol. 16, No. 6, November 1978.
- [2] יציב עמיקם, "שיטות בקריפטוגרפיה לצרכי טודיות ופרטיות במטרנוח אורחיות", חבור על עבודת גמר, הטכניון חיפה, פברואר 77.
- [3] J. Michael NYE, "A Primer on Security", Mini Micro Systems, June 1981.
- [4] J.C. Bellamy, "Digital Telephony", John Wiley & Sons, 1982.
- [5] S. Asakawa, "A Voice Scrambler for Mobile Communication", IEEE trans. on Vehicular Technology, Vol VT-29, No. 1, pp. 81-86, February 1980.
- [6] R.V. Cox and J.M. Tribolet, "Analog Voice Privacy Systems Using TFSP Scrambling: Full Duplex and Half Duplex", BSTJ, Vol 62, No.1, pp 47-61, January 1983.
- [7] A.M. Mc Calmont, "Measuring Security in Analog Speech Communications Security Devices", Proc. Int. Conf. Commun., Seattle, WA, pp. 16.5.1 - 16.5.4, June 1980.
- [8] N.S. Jayant, "A Comparison of Four Methods for Analog Speech Privacy", IEEE trans. on Communications, Vol COM-29, No. 1, pp. 18-23, January 1981.
- [9] K.H. Kirchhofer, "Are Analog Voice Security Systems Absolute?", Proc. Int. Conf. Commun, Boston, MA, pp. 4.5.1-4.5.5, June 1979.
- [10] S.B. Weinstein, "Sampling - Based Techniques for Voice Scrambling", Proc. Int. Conf. Commun., Seattle, WA, pp. 16.2.1-16.2.6, June 1980.
- [11] L.S. Lee, Y.P. Harn, and Y.C. Chen, "A Simple Sample Value Scrambler Using FFT Algorithms for Secure Voice Communications", National Telecommunications Conference, Houston, TX, pp. 49.4.1-49.4.5, December 1980.

- [12] G.C. Chou and L.S. Lee, "A New Efficient and Practical DFT Scrambling System for Secure Speech Communications", National Telecommunications Conference, New Orleans, LA, pp. E 8.5.1-8.5.5, December 1981.
- [13] G.C. Chou and L.S. Lee, "An Efficient Time Domain Sample Value Scrambling Scheme Eliminating Frame Synchronization Requirement for Secure Speech Communications", Proc. of GLOBECOM 1982, pp. 468-472.
- [14] R.E. Crochiere, "A Weighted Overlap - Add Method of Short-Time Fourier Analysis/Synthesis", IEEE trans. Acoust. Speech Signal Processing, Vol. ASSP-28, No. 1, pp. 99-102, February 1980.
- [15] N.S. Jayant, R.V. Cox, "Analog Scramblers for Speech Based on Sequential Permutations in Time and Frequency", BSTT, Vol. 62, No. 1, pp. 25-46, January 1981.
- [16] S. Udalov, "Microprocessor - Based Techniques for Analog Voice Privacy", Proc. Int. Conf. Commun., Seattle, WA, pp. 16.4.1-16.4.5, June 1980.
- [17] רפי חנה ואבנר דיבון, "מערכות מרבול דבור", דו"ח טכום פרויקט ב' + מיוחד, מעבדה לעבוד אותות, הטכניון חיפה, יולי 1982.
- [18] E.R. Brunner, "Efficient Scrambling Techniques for Speech Signals", Proc. Int. Conf. Commun., Seattle, WA, pp.16.1.1-16.1.6, June 1980.
- [19] A. Papoulis and M.S. Bertran, "Digital Filtering and Prolate Functions", IEEE trans. on Circuit Theory, Vol. CT-19, No. 6, pp. 624-681, November 1972.
- [20] A.D. Wyner, "An Analog Scrambling Scheme which Does Not Expand Bandwidth, Part I: Discrete Time", IEEE trans. on Information Theory, Vol. IT-25, No. 3, pp. 261-274, May 1979.
- [21] S. Seneff, "A Real Time Digital Telephone Simulation on the Lincoln Digital Voice Terminal", Lincoln Laboratory, M.I.T., Technical Note, 1975-65, December 1975.

- [22] E.J. Ross, "Modern Digital Communication", The Book Blue Ridge Summit, PA. 17214, 1977.
- [23] "Group Delay Distortion", CCITT Volume III-1, Line Transmission, Rec. G.232, pp, 167, Orange Book 1977.
- [24] "Questions-Study Group XV", CCITT Volume III-3, Line Transmission, pp. 689, Orange Book 1977.
- [25] CCITT, AP VII - No. 73E, pp. 28.
- [26] "Attenuation Distortion", CCITT Volume III-1, Line Transmission, Rec. G. 132, pp. 63-64, Orange Book 1977.
- [27] Private Communication, *Rafi - Chana*.
- [28] D.H. Klatt, "A Digital Filter Bank for Spectral Matching", IEEE proc. ICASSP-76, pp. 573-576, April 76.
- [29] R.W. Schafer and L.R. Rabiner, "A Digital Signal Processing Approach to Interpolation", Proceedings of the IEEE, Vol. 61, No. 6, pp. 692-702, June 73.
- [30] L.R. Rabiner and R.W. Schafer, "Digital Processing of Speech Signals; Prentice-Hall inc., 1978.
- [31] R.W. Schafer and L.R. Rabiner, "Design and Simulation of a Speech Analysis - Synthesis System Based on Short-Time Fourier Analysis", IEEE trans. on AE, Vol. AU-21, No. 3, pp. 165-174, June 1973.
- [32] J.B. Allen, "Short Term Spectral Analysis, Synthesis, and Modification by Discrete Fourier Transform", IEEE trans. on ASSP, Vol. ASSP-25, No. 3, pp. 235-238, June 1977.
- [33] J.B. Allen and L.R. Rabiner, "A Unified Approach to Short-Time Fourier Analysis and Synthesis", Proc. of the IEEE, Vol. 65, No. 11, pp. 1558-1564, November 1977.

- X [34] M.R. Portnoff, "Time-Frequency Representation of Digital Signals and Systems Based on Short-Time Fourier Analysis", IEEE trans. on ASSP, Vol. ASSP-28, No. 1, pp. 99-102, February 1980.
- [35] R.E. Crochiere and L.R. Rabiner, "Multirate Digital Signal Processing", Prentice-Hall Inc., 1983.
- [36] D. Malah and J.L. Flanagan, "Frequency Scaling of Speech Signals by Transform Techniques", BSTJ, Vol. 60, No. 9, pp. 2107-2156, November 1981.
- [37] A.H. Nuttall, "Some Windows with Very Good Sidelobe Behaviour", IEEE trans. on ASSP, Vol. ASSP-29, No. 1, pp. 84-91, February, 1981.
- [38] D.W. Griffin and J.S. Lim, "Signal Estimation From Modified Short Time Fourier Transform", Proc. ICASSP, Boston, pp. 804-807, 1983.
- [39] J.H. McClellan, T.W. Parks and L.R. Rabiner, "A Computer Program for Designing Optimum FIR Linear Phase Digital Filters", IEEE trans. on AE, Vol AU-21, No. 6, pp. 506-526, December 1973.
- [40] M.H. Hayes, J.S. Lim and A.V. Oppenheim, "Signal Reconstruction from Phase or Magnitude", IEEE trans on ASSP, Vol. ASSP-28, No. 6, pp. 672-680, December 1980.
- [41] J.H. Roth Weiler, "Polyphase Quadrature Filters - A New Subband Coding Technique", Proc. ICASSP, Boston, pp. 1280-1283, 1983.
- [42] A. Ben-Israel and T.N.E. Greville, "Generalized Inverse Theory and Applications", John Wiley & Sons, 1974.
- [43] D. Meek, "The Inverses of Some Matrices Deviating Slightly from a Symmetric, Tridiagonal, Toeplitz Form", SIAM J. Numer. Anal., Vol. 17, No. 1, pp. 39-43, February 1980.
- [44] W.F. Trench, "Inversion of Toeplitz Band Matrices", Mathematics of Computation, Vol. 28, No. 128, pp. 1089-1095, October 1974.

[45] R.M. Gray, "On the Asymptotic Eigenvalue Distribution of Toeplitz Matrices", IEEE trans on Inform. Theory, Vol. IT-18, No. 6, pp. 725-730, November 1972.

[46] P.J. Davis, "Circulant Matrices", John Wiley & Sons, 1979.



Analog Speech Scrambling by Means of  
Discrete Short Time Fourier Transform

Research Thesis

Submitted in partial fulfillment of the requirements  
for the degree of Master of Science  
in Electrical Engineering

by

Zeev Shpiro

Submitted to the Senate of the Technion - Israel Institute of Technology

Kislev 5744

Haifa

November 1983

thesis was carried out in the Faculty of  
Electrical Engineering, Laboratory of Digital  
Signal Processing, under the supervision of  
David Malah.

I wish to thank Prof. D. Malah for his guidance  
and his devoted help throughout all my work on  
this thesis. I also would like to express my  
gratitude to Mr. Y. Ephraim for his assistance  
and encouragement at every stage. Finally, I am  
grateful for the help I received from Prof. A.  
Berman of the Mathematical Department of the  
Technion, and from everyone else who in some way  
helped me complete this work.

ABSTRACT:

In this thesis we discuss the concealment of information transmitted by speech through existing telephone lines. To this end we use analog scramblers implemented by digital means. The aim is to protect the privacy of information with minimal degradation of speech quality and intelligibility under the constraints that this information passes through normal telephone lines with their known disadvantages (e.g., certain frequency bandwidth, non-linear phase distortion, etc.). In order to overcome the disadvantage of frequency bandwidth it was suggested to protect the signal in the frequency domain by scrambling the samples of Discrete Fourier Transform (DFT) block by block, and then to reconstruct the appropriate time signal. The main disadvantage of this method is its sensitivity to phase distortion.

In this thesis we use the same principle; however, we employ Discrete Short Time Fourier Transform (DSTFT) in order to transform the signal to the frequency domain. The DSTFT can also be considered as a de-modulated narrow band filter bank. Scrambling is performed on the filters output, such that there is no need to synchronise the transmitter with the receiver.

This thesis discusses scrambling as a Modified Discrete Short Time Fourier Transform problem. The suggested modification is to permute the frequency samples. One of the major problems - as yet unsolved - is the synthesis of a signal from the Modified Discrete Short Time Fourier Transform (MDSTFT).

We attempted to overcome this problem with the usual methods, but were unsuccessful. Thus, a new algebraic approach for the analysis and the synthesis of DSTFT was developed: we consider the DSTFT vector  $\underline{b}$  to be the product of the signal vector  $\underline{x}$  and the analysis matrix  $[A]$  (i.e.,  $[A]\underline{x} = \underline{b}$ ). It should be noted that the dimensions of the matrix and the vector tend towards infinity. The synthesis process is described, in a similar manner, by considering the reconstructed signal vector  $\hat{\underline{x}}$  to be the product of the synthesis matrix  $[S]$ , and the DSTFT vector  $\underline{b}$ :  $[S]\underline{b} = \hat{\underline{x}}$ .

This representation enables us to use algebraic means in order to solve several as yet unanswered questions in the field of DSTFT.

The modified series can generally not be represented as a DSTFT of a signal in the time domain. Thus, an optimality criterion is defined in the following way: the synthesis is optimal if the distance between the original MDSTFT and the analysis vector of the reconstructed signal is minimal, in the sense of minimum squared errors. With the algebraic approach, this problem can be described as calculating  $\hat{x}$  for a given  $b$ , such that  $E$  is at a minimum, where  $E = || [A]\hat{x} - b ||$ . This is a well known problem whose solution is based on the Generalized Inverse of matrix  $[A]$ .

This thesis reviews the principles of the algebraic method and solves several open questions in the DSTFT field, some of which are relevant for the subject of analog scramblers.