הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
Technion – Israel Institute of Technology

ספריות הטכניון
The Technion Libraries

בית הספר ללימודי מוסמכים ע"ש ארווין וג'ואן ג'ייקובס
Irwin and Joan Jacobs Graduate School

תכנון מסננים ספרתיים דו ממדיים

עבודת גמר
לשם מילוי חלקי של הדרישות לקבלת התואר
מגיסטר למדעים
בהנדסת חשמל

מאת
רמי סגל

הוגש לסנט של הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
חשון - תשל"ו חיפה נובמבר-1975

עבודת הגמר נעשתה בהנחית דייר ד. מלאך
בפקולטה להנדסת חשמל

תודתי נתונה לדייר ד. מלאך על עזרתו
והנחיתו במהלך העבודה.

תוכן העניינים

1. תקציר

סינון ספרתי של אותות דו ממדיים מקנה לנו את היתרונות הטמונים בשימוש במחשב כגון גמישות, דיוק, והאפשרות להפעיל אלגוריתמים מסובכים ומתוחכמים. השימוש של מסננים ספרתיים דו ממדיים הוא בעיבוד תמונות כגון : תצלומי אויר, תצלומים רפואיים, ובעבוד נתונים גיאופיסיים.

כמו במקרה החד ממדי גם במקרה הדו ממדי נהוג לחלק את המסננים לשתי קטגוריות. אלו שתגובתם לדגם יחידה מכילה מספר סופי של אברים ולכן פונקצית התמסורת שלהם היא פולינום. סוג זה של מסננים נקרא (FINITE IMPULSE RESPONSE) F.I.R.

ואלו שמספר אברי התגובה לדגם יחידה הוא אינסופי ופונקצית התמסורת שלהם היא פונקציה רציונלית. מסננים אלו נקראים (INFINITE IMPULSE RESPONSE) I.I.R.

המימוש הטבעי של מסננים מסוג זה הוא הממוש הרקורסיבי.

מאחר ומסננים רקורסיביים חסכונים בזמן מחשב ובזכרון בהשואה למסננים שמימושם לא רקורסיבי, תתרכז העבודה במסננים רקורסיבים.

בתכנון מסננים רקורסיבים קימות שתי בעיות עקריות בעית היציבות ובעית הסיבטזה. מכיון שיציאת המסנן מחושבת על ידי אלגוריתם רקורסיבי קימת אפשרות שכביסה חסומה למסנן תגרום יציאה מתבדרת. מסנן כזה נקרא מסנן בלתי יציב.

הטכניקות הקימות לבדיקת יציבותו של מסנן רקורסיבי דו ממדי הן מסובכות ודורשות זמן מחשב רב ומבחינה מעשית אפשר להפעילם רק על מסננים מסדר נמוך.

בנושא היציבות קימים שני נושאים בעלי חשיבות :

(א) כיצד לייצב מסנן שאינו יציב כך שהעוותים בספקטרום של המסנן המקורי יהיו מינימלים.

(ב) כיצד לתכנן מסננים יציבים.

בעבודה מוצגות שלוש שיטות של יצוב מסנן בלתי יציב. הראשונה שבהם מתבססת על ההנחה ש - PLANAR LEAST SQUARES INVERSE של מערך דו ממדי הוא ברוב המקרים MINIMUM PHASE.

השיטה השניה משתמשת בהכללת התמרת הילברט הדיסקרטית אשר מובילה לשיטה המאפשרת יצוב מסננים בלתי יציבים.

על פי שיטה נוספת מקרבים את המסנן הבלתי יציב למסנן שיציבותו מובטחת, כך שהספקטרום של המסנן היציב יהיה קרוב עד כמה שאפשר לספקטרום של המסנן הבלתי יציב. השיטה המוצגת טובה עבור מסננים מסדר נמוך.

בעבודה מוצגות מספר שיטות לתכנון מסננים רקורסיבים דו ממדיים. השיטה הראשונה עוסקת בתכנון מסננים כאשר התגובה לדגם יחידה של המסנן הרצוי נתונה.

השיטות האחרות עוסקות בתכנון מסננים כאשר הספקטרום הרצוי של המסנן נתון.

לשיטות הקימות כיום לתכנון מסננים רקורסיבים מגרעות רבות והן נותנות תשובה חלקית בלבד לבעיה. יש להשקיע מאמצים נוספים על מנת למצוא פתרונות כלליים ויעילים יותר לבעית היציבות והאנליזה של מסננים רקורסיבים דו ממדיים.

2. <u>רשימת הסמלים והקצורים</u>

1. $\delta(m,n)=\begin{cases}1 & m=n\\ 0 & \text{בכל מקרה אחר}\end{cases}$ דגם יחידה.

2. $x(m,n) \quad \infty<m,n<\infty$ סידרה דיסקרטית דו ממדית.

3. $h(m,n) \quad \infty\leq m,n\leq\infty$ התגובה לדגם יחידה של מסנן דו ממדי.

4. $x(m,n)*h(m,n)$ קונבולוציה דיסקרטית דו ממדית.

5. $H(e^{jw_1},e^{jw_2})$ תגובת התדר של מסנן ספרתי דו ממדי.

6. $X(z_1,z_2)$ התמרת z של הסידרה הדו ממדית.

7. $H(z_1,z_2)$ התמרת z של המסנן $h(m,n)$.

8. $x_p(m,n)$ סידרה דסקרטית דו ממדית,מחזורית.

9. e שגיאה (error).

10. Φ פונקצית הקורלציה.

11. D.F.T התמרת פורה דיסקרטית (DISCRETE FOURIER TRANSFORM)

12. I.D.F.T - התמרת פוריה דיסקרטית הפוכה. (INVERSE D.F.T).

13. RE (H) החלק הממשי של H.

14. IM (H) החלק הדמיוני של H.

15. A* הצמוד של המספר המורכב A.

16. $A\cap B$ החיתוך של הקבוצה A והקבוצה B.

17. I.I.R - INFINITE IMPULSE RESPONSE

18. F.I.R - FINITE IMPULSE RESPONSE

19. P.L.S.I - PLANAR LEAST SQUARES INVERSE

3. מבוא

קימים תחומים רבים שבהם נדרש להשתמש בסינון ספרתי דו ממדי כגון : עבוד תצלומי אויר, תצלומים רפואיים, תצלומי מזג אויר, נתוח נתונים סטמיים ונתוח נתונים ממערכי מכ"ים וסונר.

קימות מספר שיטות לסינון אותות ספרתיים. השיטות המקובלות הם :

א. על המערך הנתון מבצעים התמרת פוריה דיסקרטית (דו ממדית). התוצאה מוכפלת בפונקציה המנחיתה את האברים הבלתי רצויים. מבצעים התמרת פוריה הפוכה ומקבלים מערך חדש בעל הספקטרום הרצוי.

ב. שימוש במסננים בעלי זכרון סופי (F.I.R FINITE IMPULSE RESPONSE) הצורה הפשוטה ביותר לממש מסננים מסוג זה היא בעזרת הקונבולוציה.

ג. שמוש במסננים בעלי זכרון אין סופי (I.I.R INFINITE IMPULSE RESPONSE) הממוש הרקורסיבי הוא הממוש הטבעי של סוג מסננים זה. במימוש זה תלויה יציאת המסנן בכניסות הקודמות, בכניסה הנוכחית, וביציאות הקודמות.

אפשר להראות ששיטת הסינון השלישית היא החסכונית מבין השלוש בזמן מחשב ובזכרון. תכונה זו מעלה חשיבותם של המסננים הרקורסיבים. במיוחד לאור העובדה שכיום כמעט כל מערכת ספרתית מכילה מיני מחשב המוגבל בגודל הזכרון.

מסיבה זו תתרכז העבודה בתכנון מסננים ספרתיים דו ממדים רקורסיבים.

בתכנון מסננים רקורסיביים קימות שתי בעיות עקריות האחת בעית היציבות, והשניה בעית הסינטזה.

לבעית היציבות לא נמצא עד כה פתרון מושלם, וזו אחת הסיבות שעד היום לא נעשתה הרבה עבודה בשטח תכנון מסננים רקורסיבים דו ממדיים. (בעית היציבות אינה קימת במסננים לא רקורסיבים). מסנן הוא יציב אם עבור כניסה חסומה למסנן היציאה מהמסנן חסומה גם היא.

שלוש שאלות מתעוררות כאשר דנים בבעית היציבות.

השאלה הראשונה היא כיצד לקבוע האם מסנן נתון יציב.

השאלה השניה היא כיצד לתכנן מסנן בצורה שנבטיח את יציבותו.

השאלה השלישית היא כיצד ליצב מסנן שאינו יציב כך שהספקטרום של המסנן המיוצב יהיה קרוב עד כמה שאפשר לספקטרום של המסנן המקורי.

בנושא הסינטזה, נציג שתי שיטות סינטזה שונות :

א. כאשר נתונה התגובה לדגם יחידה הרצויה.

ב. כאשר נתון הספקטרום הרצוי.

לבעיות הסינטזה אין עדין פתרונות מושלמים. רוב השיטות הקימות כיום מוגבלות, ונותנות פתרונות חלקיים בלבד.

4. מסננים ספרתיים דו ממדיים

4.1 מערכת דו ממדית ליניארית וקבועה במרחב

תהי $x(m,n)$ סידרה דו מימדית כאשר m ו-n הם משתנים שלמים. נגדיר דגם יחידה כ -

$$\delta(m,n) = \begin{cases} 1 & m=n=0 \\ 0 & \text{בכל מקרה אחר} \end{cases} \qquad (4.1)$$

סידרה דו ממדית ניתן לתאר ע"י

$$x(m,n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(k,r)\,\delta(m-k,n-r) \qquad (4.2)$$

מערכת מוגדרת כטרנספורמציה חד ערכית אשר ממפה את סידרת הכניסה $x(m,n)$ לסידרה $y(m,n)$ ביציאה. מסמנים זאת בצורה הבאה:

$$y(m,n) = T[x(m,n)]$$

במערכת קבועה במרחב עבור כניסה $x(m-k,n-r)$ נקבל ביציאה $y(m-k,n-r)$.

אם $h(m,n)$ הוא התגובה לדגם יחידה $\delta(m,n)$, אזי עבור מערכת קבועה במרחב, $h(m-k,n-r)$ היא התגובה ל- $\delta(m-k,n-r)$. מאחר ואנו דנים במערכות ליניאריות, תגובת המערכת לכניסה $x(m,n)$ תהיה :

$$y(m,n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} x(p,q)\,h(m-p,n-q) = \qquad (4.3)$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} h(p,q)\,x(m-p,n-q) = x(m,n) * h(m,n)$$

* מסמל את פעולת הקונבולוציה.

4.2 סבתיות, פריקות ויציבות

א. סבתיות

מסנן דו ממדי הנו סבתי אם תגובתו לדגם יחידה מקימת את התנאי

$$h(m,n) = 0 \qquad m \cup n < 0$$

ב. פריקות

מסנן הוא פריק אם תגובתו לדגם יחידה $h(m,n)$ נתנת להכתב כמכפלה של שתי פונקציות, האחת פונקציה של m והשניה פונקציה של n בלבד. כלומר

$$h(m,n) = g(m)\cdot f(n)$$

היתרון של מסנן פריק הוא שהקונבולוציה הדו ממדית כפי שמופיעה בנוסחה (4.3) מבוצעת בעזרת קונבולוציות חד ממדיות.

$$y(m\,n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} g(p)\cdot f(q)\cdot x(m-p,n-q) =$$

$$= \sum_{p=-\infty}^{\infty} g(p) \left[\sum_{q=-\infty}^{\infty} f(q)\cdot x(m-p,n-q)\right] = \sum_{p=-\infty}^{\infty} g(p)\cdot a(m-p,n)$$

כאשר $a(m-p,n)$ היא סידרה של קונבולוציות חד ממדיות. אם גם $x(m,n)$ וגם $h(m,n)$ פריקים היציאה $y(m,n)$ היא כפולה של שתי קונבולוציות חד ממדיות.

ג. יציבות

מסנן ספרתי דו ממדי הוא מסנן יציב במובן שכניסה חסומה גוררת יציאה חסומה אם ורק אם התגובה לדגם יחידה מקימת את אי השויון הבא :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|h(m,n)\right| < \infty \qquad (4.4)$$

אפשר להראות זאת בדרך הבאה.

ראשית נניח שמשואה (4.4) מתקימת. צריך להראות שאם הכניסה למסנן חסומה גם היציאה חסומה.

אם הכניסה חסומה אפשר למצוא M כזה כך שיתקיים $\left|x(m,n)\right| \leqslant M \;\; \forall\, m,n$

ולכן אפשר לרשום

$$\left|y(m,n)\right| = \left|\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} h(p,q)\cdot x(m-p,n-q)\right| \leqslant$$

$$\leqslant M \left|\sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} h(p,q)\right| < \infty$$

ולכן היציאה חסומה.

עתה נניח שמשואה (4.4) אינה מתכנסת צריך להראות שאפשר למצוא כניסה חסומה הגוררת יציאה מתבדרת.

נניח שהסידרה בכניסה תהיה

$$x(m,n)=\begin{cases} \dfrac{h^*(-m,-n)}{|h(-m,-n)|} & h(m,n)\neq 0 \\ 0 & h(m,n)=0 \end{cases}$$

כאשר $h^*(m,n)$ הוא הצמוד הקומפלכסי של $h(m,n)$. נתבונן ביציאת המערכת עבור $m=n=0$

מקבלים

$$y(0,0)=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}x(-p-q)\,h(p,q)=$$

$$=\sum_{p=-\infty}^{\infty}\sum_{q=-\infty}^{\infty}\frac{|h(p,q)|^2}{|h(p,q)|}=\infty$$

כלומר היציאה מתבדרת.

4.3 <u>משואות הפרש דו ממדיות</u>

כמו במקרה החד ממדי, קימים מסננים דו ממדיים שאפשר לתארם על ידי משואות הפרש לינאריות עם מקדמים קבועים.

התאור הכללי ביותר נתון ע"י המשואה

$$\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}b(m,n)\,y(p-m,q-n)=$$
$$=\sum_{s=0}^{S}\sum_{r=0}^{R}a(s,r)\,x(p-s,q-r) \tag{4.5}$$

מבלי לפגוע בכלליות הייצוג אפשר להניח ש - $b(0,0)=1$ ואז אפשר לרשום את המשואה באפיון הרקורטיבי שלה.

$$y(p,q)=\sum_{s=0}^{S}\sum_{r=0}^{R}a(s,r)\,x(p-s,q-r)-$$
$$-\sum_{m=0}^{M}\sum_{n=0}^{N}b(m,n)\,y(p-m,q-n) \tag{4.6}$$

m,n אינם שוים לאפס בו זמנית

4.4 <u>מרחב התדר</u>

נבחן את תגובתה של מערכת ספרתית דו מימדית לסידרה סינוסית מרוכבת

$$x(m,n) = e^{jw_1 m} \cdot e^{jw_2 n} \qquad (4.7)$$

אם נשתמש במשפט הקונבולוציה נקבל שיציאת המערכת תהיה :

$$y(m,n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(k,r) \cdot e^{jw_1(m-k)} \cdot e^{jw_2(n-r)} = \qquad (4.8)$$

$$= e^{jw_1 m} \cdot e^{jw_2 n} \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(k,r) \cdot e^{-jw_1 k} e^{-jw_2 r} = x(m,n) \cdot H(e^{jw_1}, e^{jw_2})$$

$H(e^{jw_1}, e^{jw_2})$ נקרא תגובת התדר של המערכת והוא מוגדר ע"י

$$H(e^{jw_1}, e^{jw_2}) \triangleq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(k,r)\, e^{-jw_1 k} e^{-jw_2 r} \qquad (4.9)$$

המשואה (4.9) מיצגת למעשה טור פוריה ולכן אפשר לחשב את המקדמים $h(k,r)$ לפי הנוסחה

$$h(k,r) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{+\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} H(e^{jw_1}, e^{jw_2})\, e^{jw_1 k} e^{jw_2 r} dw_1\, dw_2 \qquad (4.10)$$

לתגובת התדר מספר תכונות חשובות :

א. $H(e^{jw_1}, e^{jw_2})$ מחזורי ב- w_1 וב- w_2 כלומר

$$H(e^{jw_1}, e^{jw_2}) = H(e^{j(w_1 + l\cdot 2\pi)}, e^{j(w_2 + m\cdot 2\pi)}) \qquad (4.11)$$

עבור $-\infty \leq l,m \leq \infty$

ב. אם $h(m,n)$ מקבל ערכים ממשיים בלבד אזי מתקיים

$$H(e^{jw_1}, e^{jw_2}) = H^*(e^{-jw_1}, e^{-jw_2}) \qquad (4.12)$$

ולכן ידיעת התנהגות $H(e^{jw_1}, e^{jw_2})$ בתחום $0 \leq w_1 \leq \pi$, $0 \leq w_2 \leq \pi$ כלומר ברביע הראשון, מספיקה כדי לדעת את תגובת התדר ברביע השלישי, וידיעת התנהגות תגובת התדר ברביע השני, מספיקה כדי לדעת את התנהגות תגובת התדר ברביע הרביעי.

כמו במקרה החד מימדי אפשר להראות שאם

$$y(m,n) = x(m,n) * h(m,n)$$

אזי

$$Y(e^{jw_1}, e^{jw_2}) = X(e^{jw_1}, e^{jw_2}) \cdot H(e^{jw_1}, e^{jw_2}) \qquad (4.13)$$

כאשר $X(e^{jw_1},e^{jw_2})$ ו- $Y(e^{jw_1},e^{jw_2})$ הם התמרות פוריה של $x(m,n)$ ו- $y(m,n)$ בהתאמה.

4.5 התמרת z דו ממדית

שיטה שימושית ליצג סידרה דו מימדית $x(m,n)$, היא באמצעות התמרת z הדו מימדית המוגדרת כ -

$$X(z_1,z_2) \triangleq \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m,n)\, z_1^m z_2^n \qquad (4.14)$$

משואה (4.14) מוגדרת בתחום ההתכנסות. תחום ההתכנסות מוגדר ע"י תחום הערכים של z_1, z_2 שעבורם מתקיים :

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| x(m,n)\, z_1^m z_2^n \right| < \infty \qquad (4.15)$$

בדרך כלל קשה לחשב את תחום ההתכנסות. בבעיה זו נדון ביתר פרוט בפרק הבא הדן בבעית היציבות.

ההתמרה ההפיכה מוגדרת כ -

$$x(m,n) \triangleq \frac{1}{(2\pi j)^2}\int_{C_1}\int_{C_2} X(z_1,z_2)\, z_1^{-m+1}\, z_2^{-n+1}\, dz_1 dz_2 \qquad (4.16)$$

C1 ו-C2 הם מסלולים סגורים המכילים את הראשית ונמצאים בתוך תחום ההתכנסות.

התכונות הידועות עבור התמרת z חד ממדית נתנות להרחבה למקרה הדו ממדי.

אם: $y(m,n) = x(m,n) * h(m,n)$

אזי: $Y(z_1,z_2) = X(z_1,z_2)\cdot H(z_1,z_2)$

אם מתארים את z_1 ואת z_2 בקואורדינטות פולריות

$$z_1 = r_1 \cdot e^{-jw_1}$$

$$z_2 = r_2 e^{-jw_2}$$

התמרת z של הסידרה $x(m,n)$, נתונה ע"י הנוסחה:

$$X(r_1 e^{jw_1}, r_2 e^{jw_2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(m,n)\cdot r_1^m \cdot e^{-jw_1 m}\, r_2^n\, e^{-jw_2 n} \qquad (4.17)$$

עבור $r_1 = r_2 = 1$ מתלכדת נוסחה (4.17) עם נוסחת התמרת פוריה של הסידרה $x(m,n)$, נוסחה (4.9).

4.6 התמרת פוריה דיסקרטית דו ממדית (D.F.T)

סדרה מחזורית דו מימדית מוגדרת ע"י

$$x_p(m,n)=x_p(m+kM,n+rN)$$

כאן p מסמן את המחזוריות של הסדרה $x_p(m,n)$, M הוא המחזור עבור המימד הראשון, ו-N הוא המחזור עבור המימד השני. k ו-r הם מספרים שלמים.
כמו במקרה החד מימדי, סדרה מחזורית דו ממדית נתנת לבטוי במדויק כקומבינציה לינארית של מספר סופי של אקספוננטים, שתדריהם הם כפולות של $2\pi/M$ ו-$2\pi/N$

$$x_p(m,n)=\frac{1}{M\cdot N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{r=0}^{M-1}X_p(k,r)\,e^{j(2\pi/M)\cdot m\cdot k}\,e^{j(2\pi/N)\cdot n\cdot r} \qquad (4.18)$$

כאשר המקדמים בהתמרת פוריה $X_p(k,r)$, מיצגים את האמפליטודה של הסיגנל $x(m,n)$ בתדר הדו מימדי $w_1=\frac{2\pi}{M}m$, $w_2=\frac{2\pi}{N}n$.
את $X_p(k,r)$ אפשר לחשב ע"י חישוב התמרת פוריה הדו מימדית של הסיגנל המחזורי $x_p(m,n)$, בתדרים w_1, w_2 כפי שהוגדרו בדף זה. כלומר:

$$X_p(k,r)=X(z_1,z_2)\ :\ z_1=e^{-j\frac{2\pi}{M}k}\ ,\ z_2=e^{-j\frac{2\pi}{N}r}$$

$$=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}x_p(m,n)\,e^{-j(2\pi/M)mk}\,e^{-j(2\pi/M)nr} \qquad (4.19)$$

תהי $x(m,n)$ סידרה דו מימדית סופית אשר M·N איבריה הראשונים זהים לאברי מחזור אחד של הסידרה $x_p(m,n)$, ושאר האברים הנם אפס. התמרת z של סידרה זו בנקודות $z_1=e^{-j\frac{2\pi}{M}k}$, $z_2=e^{-j\frac{2\pi}{N}r}$, זהה ל- $X_p(k,r)$
מתקבל לכן שבעזרת ה-D.F.T המופעל על סידרה מחזורית $x_p(m,n)$ אפשר למצוא את הספקטרום של סידרה סופית $x(m,n)$ בתדרים הדיסקרטים W1 ו-W2.

4.7 מימוש לא רקורסיבי ומימוש רקורסיבי

נהוג לחלק את המסננים הספרתיים לשתי קטגוריות. אלו שתגובתם לדגם יחידה מכילה מספר סופי של איברים ופונקצית התמסורת שלהם היא פולינום. מסננים אלו נקראים מסנני F.I.R. ואלו שפונקצית התמסורת שלהם נתונה ע"י פונקציה רציונלית מסנני I.I.R.

יציבות מסנני F.I.R מובטחת. המימוש הטבעי של מסננים אלו הוא לא רקורסיבי ע"י קונבולוציה. יציאת המסנן נתונה על ידי הנוסחה:

$$y(m,n)=\sum_{p=0}^{P-1}\sum_{q=0}^{Q-1}h(p,q)\,x(m-p,\ n-q)$$

כאשר $h(m,n)$ הוא התגובה לדגם יחידה של המסנן ו-$x(m,n)$ הוא הכניסה למסנן.
הממוש הטבעי של מסנני I.I.R הוא הממוש הרקורסיבי.

סינון בעזרת מסננים רקורסיביים, חסכוני בזמן, ובזכרון יחסית לשיטות סינון אחרות [1] , למרות עובדה זאת לא משתמשים עדיין שימוש נרחב במסננים רקורסיביים דו מימדים, בגלל הקושי הרב בתכנונם.

שני קשיים עקריים בתכנון מסננים רקורסיביים דו מימדיים :

א. הקושי בבדיקת יציבות המסנן.

ב. הקושי לתכנן מסנן יציב עם ספסיפיקציות נתונות.

בעבודה זו נתרכז בעיקר בשתי בעיות אלו.

אפשר לאפיין מסנן רקורסיבי דו מימדי בשני אופנים האחד אפיון ע"י מנה של שני פולינומים ב- (z_1,z_2) , והשני ע"י משואות הפרש.

האפיון ע"י התמרת z נתון במשואה (4.20).

$$H(z_1,z_2)=\frac{A(z_1,z_2)}{B(z_1,z_2)}=\sum_{i=0}^{M_a}\sum_{j=0}^{N_a}a(i,j)z_1^i z_2^j\Big/\sum_{k=0}^{M_b}\sum_{l=0}^{N_b}b(k,l)z_1^k z_2^l \qquad (4.20)$$

אם נתונה כניסה $X(z_1,z_2)$ יציאת המסנן $Y(z_1,z_2)$ תהיה

$$Y(z_1,z_2)=H(z_1,z_2)\cdot X(z_1,z_2)$$

ואם נשתמש בנוסחה (4.20) נקבל

$$B(z_1,z_2)\cdot Y(z_1,z_2)=A(z_1,z_2)\cdot X(z_1,z_2) \qquad (4.21)$$

בהסתמכנו על התכונות של התמרת Z , אפשר לקבל את משואת ההפרש של המסנן מנוסחה (4.21). מבלי לפגוע בכלליות הדיון אפשר להניח $b(0,0)=1$, ואז משואת ההפרש המתאימה למסנן תהיה :

$$y(m,n)=\sum_{i=0}^{M_a}\sum_{j=0}^{N_a}a(i,j)x(m-i,n-j)-\sum_{k=0}^{M_b}\sum_{l=0}^{N_b}b(k,l)\,y(m-k,n-l) \qquad (4.22)$$

$$0=k\neq l=0$$

במשואה זו כוון הרקורסיביות הוא $(+m,+n)$ ולכן המסנן הוא טיבעי.

קימים שלושה כוונים נוספים שבהם אפשר להפעיל את עקרון הרקורסיביות.

הכוונים הם : $(+m,-n)$, $(-m,+n)$, $(-m,-n)$, והמסננים המתקבלים בצורה זו הם בלתי סבתיים.

5. בעית היציבות

נושא היציבות תופס מקום נכבד בתכנון מסננים רקורסיבים דו מימדים. אפשר לחלק את נושא היציבות לשלושה חלקים.

א. כיצד לבדוק אם מסנן נתון יציב.

ב. כיצד לתכנן מסנן יציב, עם ספציפיקציות נתונות.

ג. במידה והמסנן שתוכנן איננו יציב, כיצד לתכנן מהמסנן הבלתי יציב, מסנן יציב, כך שתגובת התדר של שני המסננים תהיה קרובה עד כמה שאפשר.

במקרה החד מימדי אפשר לתאר את פונקצית התמסורת ע"י הקטבים והאפסים. תאור זה מאפשר לקבוע האם המסנן יציב, ובמקרה ואינו יציב, קימת טכניקה ליצב את המסנן מבלי לפגוע בתגובת התדר שלו (ראה סעיף 5.2) המימוש של המסנן החד מימדי יכול להעשות ע"י חיבור בקסקדה של מסננים מסדר נמוך שקל לתכננם.

במקרה הדו ממדי לא קימת טכניקה לפרק את פונקצית התמסורת $H(z_1,z_2)$ לקטבים ואפסים, כך שבדרך כלל לא נתן לבטא את פונקצית התמסורת ע"י ביטויים מסדר נמוך. התוצאות העקריות של חוסר האפשרות לפרק את פונקציה התמסורת לאפסים וקטבים הם: ראשית חוסר היכולת לבדוק אם המסנן יציב. שנית מסנן לא יציב איננו יכול להיות מיוצב בשיטה הפשוטה המקובלת במקרה החד ממדי. שלישית אין אפשרות לממש את המסנן ע"י חיבור בקסקדה של מסננים מסדר נמוך.

5.1 בדיקת היציבות של מסנן רקורסיבי דו ממדי

המשפט היסודי הדן ביציבות מסנן רקורסיבי דו ממדי הוא

משפט 1 (SHANKS) [4]

מסנן רקורסיבי דו ממדי (I.I.R), סבתי בעל פונקצית התמסורת $H(z_1,z_2)=A(z_1,z_2)/B(z_1,z_2)$. הוא מסנן יציב אם ורק אם לא קימים ערכים כאילו של z1 ו-z2 כך ש- $B(z_1,z_2)=0$ $|z_1|\leqslant 1$, $|z_2|\leqslant 1$ בו זמנית.

הוכחה : מאחר והמסנן הוא I.I.R נרשום

$$H(z_1,z_2)=\frac{A(z_1,z_2)}{B(z_1,z_2)}=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}h(m,n)\,z_1^m z_2^n \qquad (5.0)$$

כדי שהמסנן יהיה יציב הכרחי ומספיק שיתקיים

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left|h(m,n)\right|<\infty$$

נראה שתנאי זה מתקיים אם ורק אם $H(z_1,z_2)$ אנליטית בתחום

$$D=[(z_1,z_2): |z_1|\leqslant 1 \cap |z_2|\leqslant 1]$$

אם $H(z_1,z_2)$ אנליטית ב-D אפשר למצוא $\varepsilon>0$ כזה כך ש- $H(z_1,z_2)$ אנליטית בתחום D1.

$$D_1=[(z_1,z_2): |z_1|<1+\varepsilon \cap |z_2|<1+\varepsilon]$$

דבר זה גורר ש-

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} h(m,n)\, z_1^m z_2^n$$

מתכנס באופן מוחלט בתחום D1 ולכן מתקיים

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |h(m,n)|<\infty$$

החלק השני של המשפט,("רק אם")מראה שאם

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} |h(m,n)|<\infty$$

אזי ע"י "מבחן M" (של התכנסות סדרות) הביטוי

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} h(m,n)\, z_1^m z_2^n$$

מתכנס באופן מוחלט בתחום D ולכן $H(z_1,z_2)$ אנליטית בתחום D.

אם ברצוננו לבדוק יציבות של מסנן, עלינו למפות את מעגל היחידה במישור z_2 לפי המשוואה $B(z_1,z_2)=0$ לתוך המישור z_1. אם המיפוי של מעגל היחידה במישור z_2 לתוך מישור z_1, חותך את מעגל היחידה במישור z_1, המסנן אינו יציב. אם המפוי של מעגל היחידה במישור z_2 לתוך מישור z_1, נמצא מחוץ למעגל היחידה במישור z_1, המסנן יציב.

כפי שרואים על מנת לבדוק יציבותו של מסנן לפי שיטה זו, יש למפות תאורטית אין סוף נקודות. למעשה אפשר למפות מספר רב של הנקודות על מנת לקבל איבדיקציה על יציבות המסנן.

בציור 5.1 רואים דוגמא של מסנן בלתי יציב. ובציור 5.2 רואים דוגמא של מסנן יציב. המיפוי נעשה בעזרת מחשב על מספר רב של נקודות, והוא נותן איבדיקציה על יציבותו, או אי יציבותו של המסנן הנבדק.

בהתבסס על משפט SHANKS פיתח HUANG [5] משפט אחר המפשט בהרבה את תהליך בדיקת היציבות.

משפט 2 (HUANG) [5]

מסנן סיבתי עם פונקצית תמסורת $H(z_1,z_2)=A(z_1,z_2)/B(z_1,z_2)$ הוא.
יציב אם ודק אם

א. המיפוי של $d_1=(z_1:|z_1|=1)$ במישור z_2 בהתאם לנוסחה $B(z_1,z_2)=0$ נמצא מחוץ ל- $d_2=(z_2:|z_2|\leq 1)$

ב. אין נקודה ב- $d_3=(z_1:|z_1|\leq 1)$ שממופת לנקודה $z_2=0$ ע"י הנוסחה $B(z_1,z_2)=0$

קימות מספר טכניקות לבדיקת קיום תנאים א ו-ב בעבודה זו לא נדון בפרוטרוט בטכניקות אלו, בגלל המורכבות שלהם, ומפני שהם יעילים רק במקרים פשוטים.
את התנאי השני במשפט, אפשר לבדוק בכמה שיטות. בתנאי זה צריך לודא שלפולינום $B(z_1,0)=0$ אין שורשים $|z_1|\leq 1$.
שיטה אחת בעזרת בהעתקה בילינארית $p=(1-z_1)/(1+z_1)$ העתקה זו מעתיקה את פנים מעגל היחידה לחלק הימני של המישור P והחלק הנותר של מישור z_1 ממופה לצד השמאלי של המישור P. לכן כדי שיתקיים תנאי בי עלינו לבדוק שלפולינום $H(p,0)=0$ לא יהיו שורשים ב- $Re(p)\geq 0$ בדיקה זו יכולה להעשות בעזרת קריטריון הורוביץ.
שיטה שניה מתוארת במאמר [6] ומתבססת על בנית טבלת JURY.
את תנאי אי של המשפט קשה יותר לבדוק מכוון שדנים בפולינום עם שני משתנים.
קימים מספר מאמרים העוסקים בשיטות שונות לבדיקת תנאי אי. מאמר [6] מציע בדיקה בעזרת טבלת JURY. מאמר [7] מציע בדיקה בעזרת מטריצת SCHUR-COHN.
קימות עוד מספר שיטות לבדיקת יציבות של מסנן רקורסיבי דו ממדי. אולם חוץ מאשר במקרים פשוטים, בדיקת היציבות היא ארוכה ומיגעת. לכן כדאי יותר להתרכז בשיטות לייצוב מסנן שאינו יציב מבלי לפגוע בעקום הענות התדר שלו, ובשיטות לתכנון מסננים יציבים עם עקום הענות רצוי.

5.2 שיטות ליצוב מסננים רקורסיביים דו מימדיים

בפרק זה נציג מספר שיטות לייצוב מסננים רקורסיביים דו מימדיים לא יציבים.
במקרה החד ממדי קימת שיטה ליצוב מסנן בלתי יציב מבלי לפגוע בעקום הענות התדר [2] עמי 349. אם נניח ש- z_0 הוא הקוטב הגורם לאי היציבות אפשר לרשום את הפולינום כ-

$$H(z)=\frac{1}{H_1(z)(z-z_0)}$$

כל השורשים של $H_1(z)$ נמצאים בתחום המותר ולכן $\frac{1}{H_1(z)}$ הוא יציב. כדי ליצב את הפולינום $H(z)$ נעשה את הפעולה הבאה.

$$H(z)=\frac{1}{H_1(z)(z-z_0)}\cdot\frac{z-\frac{1}{z_0^*}}{z-\frac{1}{z_0^*}}=\frac{1}{H_1(z)(z-\frac{1}{z_0^*})}\cdot\frac{z-\frac{1}{z_0^*}}{z-z_0}=\frac{1}{H_2(z)}\;\frac{z-\frac{1}{z_0^*}}{z-z_0}$$

ברור שהמסנן $\tilde{H}(z)=1/H_2(z)$ הוא מסנן יציב. כמו כן קים

$$\left|\tilde{H}(e^{jw})\right| = \left|H(e^{jw})\right|$$

זאת משום ש- $(z-\frac{1}{z_0^*})/(z-z_0)$ הוא מסנן שתגובת התדר שלו היא בעלת אמפליטודה 1.0 עבור כל w. (על מעגל היחידה)

המסקנה היא, שאם נתון לנו מסנן חד מימדי, עם קוטב z_0 הגורם לאי יציבות. אפשר להחליף את הקוטב בקוטב חדש $\frac{1}{z_0^*}$. המסנן החדש יהיה יציב ואמפליטודת תגובת התדר שלו תהיה זהה לאמפליטודות תגובת התדר של המסנן המקורי.

במקרה הדו ממדי, ברב המקרים אין אפשרות לכתוב את פונקצית התמסורת של המסנן. כמכפלות של ביטויים המכילים קטבים ואפסים. לכן שיטת היצוב הנהוגה במקרה החד ממדי אינה ישימה במקרה הדו ממדי.

קימות מספר שיטות ליצוב מסננים דו ממדיים. שלא כבמקרה החד ממדי, כל השיטות הנהוגות במקרה הדו ממדי, גורמות לעוות מסוים באמפליטודת הספקטרום של המסנן המקורי. שאיפתינו היא, להקטין עוות זה במידת האפשר.

5.3 יצוב מסנן רקורסיבי דו ממדי בשיטת P.L.S.I

מערך דו ממדי A הוא MINIMUM-PHASE אם ורק אם לפולינום $A(z_1,z_2)=0$ אין אפסים עבור $|z_1|\le 1$ ו- $|z_2|\le 1$ סימולטנית.

שיטת היצוב בפרק זה מבוססת על תכונות ה-

[4] (P.L.S.I) PLANAR LEAST SQUARES INVERSE FILTER

נניח שנתון לנו מערך דו ממדי D. אנו מעונינים למצוא מערך דו ממדי B, כך שהקונבולוציה של B עם D תקרב את דגם היחידה. כלומר $B * D = \delta$

בדרך כלל לא נתן למצוא מערך B כזה, שהקונבולוציה שלו ושל D, תתן בדיוק את דגם היחידה. למעשה נקבל $B * D = U$ ואנו נבחר את B כך שסכום ריבועי אברי המטריצה $\delta - U$ יהיה מינימלי כלומר

$$\min(e^2)=\min\left[|1-u(0,0)|^2+\sum_{\substack{m=0\\0=m\neq n=0}}^{M}\sum_{n=0}^{N}|u(m,n)|^2\right] \qquad (5.1)$$

למערך B המקיים את (5.1) נקרא P.L.S.I של D. מימד המערך D נתון. מימד המערך B נקבע לפי שקולינו. המערכים δ ו-U שווים במימדיהם הממדים נקבעים ע"י מימדי B ו- D . אם נניח שגודלו של המערך B הוא $(M_b+1)(N_b+1)$, גדולו של D הוא $(M_d+1)(N_d+1)$ אזי גודלם של δ ו-U יהיה $(M_b+N_b+1)\cdot(M_d+N_d+1)$
הטכניקה שבעזרתה מחשבים את המערך B נקראת הטכניקה של WIENER.
נכתוב את אברי המטריצה U בצורה מפורשת. מאחר ו-U מתקבל כתוצאה מהקונבולוציה בין B ו-D אפשר לרשום

$$u(m,n)=\sum_{i=0}^{M_b}\sum_{j=0}^{N_b} b(i,j)\cdot d(m-i,n-j) \qquad (5.2)$$

עבור: $m=0\cdots M_b+N_b$

$n=0\cdots M_d+N_d$

אם נציב זאת בנוסחה (5.1) נקבל

$$e^2=(1-b(0,0)\cdot d(0,0))^2+\sum_{\substack{m\\ 0=m\neq n=0}}\sum_{n}\left[\sum_{i=0}^{M_b}\sum_{j=0}^{N_b} b(i,j)\,d(m-i,n-j)\right]^2 \qquad (5.3)$$

לאחר סידור מקבלים

$$e^2=1-2\cdot b(0,0)\cdot d(0,0)+\sum_{m}\sum_{n}\left[\sum_{i=0}^{M_b}\sum_{j=0}^{N_b} b(i,j)\,d(m-i,n-j)\right]^2 \qquad (5.4)$$

כדי לקבל את המינימום של e^2 נגזור לפי $b(i,j)$ ומקבלים

$$\sum_{i=0}^{M_b}\sum_{j=0}^{N_b} b(i,j)\cdot\phi(k,l,i,j)=d(0,0) \qquad (5.5)$$

עבור $k=l=0$

$$\sum_{i=0}^{M_b}\sum_{j=0}^{N_b} b(i,j)\cdot\phi(k,l,i,j)=0 \qquad (5.6)$$

עבור $0=k\neq l=0$
$k=0,1,2,\ldots,M_b$
$l=0,1,2,\ldots,M_b$

כאשר

$$\phi(k,l,i,j)=\sum_{m}\sum_{n} d(m-i,n-j)\cdot d(m-k,n-l)$$

במישור החד ממדי אפשר להוכיח את הטענה שאם B הוא P.L.S.I של מערך D (D מערך ממשי וסופי) אזי המערך B הוא MINIMUM PHASE ולכן המסנן $H=1/B(z)$ הוא מסנן יציב [8]

במרחב הדו ממדי אי אפשר להוכיח את הטענה שאם מערך דו ממדי B הוא P.L.S.I של המערך הדי ממדי D אזי B הוא MINIMUN PHASE. זאת משום שנמצאה דוגמא סותרת [18] אולם בכל הדוגמאות האחרות שהורצו המערך שהתקבל היה MINIMUM PHASE [4] לכן בהשתמשנו בשיטה זו במקרה הדו ממדי עלינו לודא שהמערך שהתקבל הוא אמנם MINIMUM PHASE.

אם $B(z_1,z_2)$ הוא MINIMUM PHASE אזי המסנן $H=1/B(z_1,z_2)$ הוא מסנן יציב.

כפי שראינו $B*D=U\cong\delta$

אם נפעיל את התמרת Z על שני צידי המשואה נקבל

$$B(z_1,z_2)\cdot D(z_1,z_2)\cong 1$$

$$B(z_1,z_2)\cong 1/D(z_1,z_2) \tag{5.7}$$

עתה נראה כיצד נתן לישם את המתואר בפרק זה ליצוב מסנן שאינו יציב. נניח שנתון מסנן $H(z_1,z_2)=1/B(z_1,z_2)$. נמצא את ה-P.L.S.I של B ונסמנו ב- B1, נפעיל שוב את השיטה למציאת P.L.S.I של B1 שנסמנו ב-B2.

אם נפעיל את נוסחה (5.7) על B ועל B1 אפשר לרשום

$$B_2(z_1,z_2)\cong 1/B_1(z_1,z_2)$$

$$B_1(z_1,z_2)\cong 1/B(z_1,z_2)$$

ולכן

$$H_2(z_1,z_2) = 1/B_2(z_1,z_2)\cong 1/B(z_1,z_2) = H(z_1 z_2)$$

יצאנו ממסנן $H(z_1,z_2)$ שאינו יציב, וקבלנו מסנן חדש ויציב $H_2(z_1,z_2)$ שהתמרת Z שלו שווה כמעט ל- $H(z_1,z_2)$. מכיון שהספקטרום של מסנן מתקבל ע"י הצבה $z_1=e^{-jw_1}$, $z_2=e^{-jw_2}$, הספקטרום של המסנן H שממנו יצאנו והספקטרום של המסנן H2 יהיו כמעט שווים.

אם גודלו של המערך B הוא (MXN) חייב גם גודלו של המערך B2 להיות (MXN). גודלו של המערך B1 נתון לשיקול דעתנו. אם נתייחס לנוסחה (5.7) אנו מעונינים להגיע לשוויון $B_1(z_1,z_2)=1/D(z_1,z_2)$. ברוב המקרים הפולינום $1/D(z_1,z_2)$ הוא אין סופי לכן ככל שהמימדים של $B_1(z_1,z_2)$ יהיו גדולים יותר הוא יקרב טוב יותר את הפולינום $1/D(z_1,z_2)$ והספקטרום של המערך B2 יהיה קרוב יותר לזה של המערך B .

לשם בדיקת הרעיון ליצוב מסנן בלתי יציב בשיטת P.L.S.I נכתבה תוכנית מחשב המחשבת את המסנן $H_2=1/B_2$ מהמסנן הבלתי יציב $H=1/B$.
התוכנית מופיעה בנספח 2.

הורצו מספר תוכניות מחשב ולהלן שתי דוגמאות :

דוגמא אי

המערך A נתון על ידי

$$A=\begin{bmatrix}1.0 & -0.75 & 0.9\\ 1.5 & -1.2 & 1.3\\ 1.2 & 0.9 & 0.5\end{bmatrix}$$

המסנן $H=1/A(z_1,z_2)$ אינו יציב. ציור 5.1 מראה את מפוי שורשי $A(z_1,z_2)$ במישור z_1. המיפוי נעשה בצורה הבאה :
מסתכלים על המישור z_1 בתחום $|Re(z_1)|\leqslant 2$, $|Im(z_1)|\leqslant 2$
תחום זה חולק ל- 1025 נקודות. בכל אחת מנקודות אלו, חושב ערכו של $A(z_1\ z_2)$ עבור 100 נקודות שונות במעגל היחידה במישור z_2. באם ערכו המחושב של $A(z_1,z_2)$ היה קרוב לאפס, (סדר גודל של 10-4). סומן במקום המתאים במישור z_1 , x. הסימונים "ס" מסמנים את מעגל היחידה במשור z_1.
בציור אנו רואים את מפוי מעגל היחידה במישור z_2, למישור z_1 לפי הנוסחה $A(z_1,z_2)=0$. כמובן ששיטת המיפוי איבה מדוייקת באופן מוחלט, מכוון שהמיפוי נעשה בנקודות דיסקרטיות בלבד. אולם שיטה זו נותנת אידיקציה מספיק טובה על יציבותו או אי יציבותו של המסנן. (ככל שנגדיל את מספר נקודות הבדיקה נקבל מיפוי מדויק יותר של השורשים).
בציור 5.1, רואים שקיימים ערכים של $|z_1|\leqslant 1$ ו- $|z_2|\leqslant 1$ כך ש-$A(z_1,z_2)=0$
לכן לפי משפט 1 בסעיף 5.1 המסנן $H=1/A(z_1,z_2)$ אינו יציב.
בעזרת תוכנית המחשב (נספח 2) יוצב המסנן פעם דרך מערך ביניים A1 בגודל (3×3). ופעם דרך מערך ביניים A1 בגודל (8×8)
להלן התוצאות שהתקבלו :
כאשר מסנן הביניים A1 היה בגודל (3×3), התקבל המסנן המיוצב.

$$\hat{A}=\begin{bmatrix}6.761 & -1.248 & 1.258\\ 3.156 & -0.602 & 1.027\\ 0.706 & 0.209 & 0.368\end{bmatrix}$$

כאשר מסנן הביניים Al היה בגודל 8×8, התקבל המסנן המיוצב

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}6.501 & -1.401 & 1.742\\ 3.017 & -0.797 & 1.931\\ 0.439 & 0.900 & 0.441\end{bmatrix}$$

בציור 5.2 רואים את שורשי הפולינום $\bar{A}(z_1,z_2)$ ואמנם לא קיימים $1 \geq |z_1|$ ו $|z_2| \leq 1$ כך ש- $\bar{A}(z_1,z_2)=0$ ולכן המסנן $\bar{H}=1/\bar{A}(z_1,z_2)$ יציב.

נבדוק עתה כיצד השפיע היצוב על*הספקטרום של המסנן המקורי

הספקטרום של המסנן המקורי H, נראה בציור 5.3 . כל סימן מסמל אמפליטודה מסוימת, בהתאם לרשום בתחתית הציור. אוסף הטימנים מסמן לנו "קוי גובה" של ספקטרום המסנן.

ציור 5.4 מראה את ספקטרום המסנן $\hat{H}=1/\hat{A}(z_1,z_2)$
רואים את הדימיון בין ספקטרום זה לספקטרום בציור 5.3, אולם פעולת היצוב גרמה לעוות ניכר בספקטרום המקורי.

ציור 5.5 מראה את הספקטרום של המסנן $\bar{H}=1/\bar{A}(z_1,z_2)$
כאן פעולת הייצוב כמעט ולא עוותה את הספקטרום המקורי, ולכן אפשר להשתמש במסנן היציב $\bar{H}$ כתחליף למסנן הבלתי יציב H .

בדוגמא זו רואים שהגדלת מערך הביניים Al , הקטינה את העוותים בספקטרום של המסנן המיוצב יחסית לספקטרום המסנן המקורי. כשהמשכנו להגדיל את מערך הביניים Al מעל (8×8) לא חל שיפור ניכר בספקטרום המסנן המיוצב.

דוגמא ב'

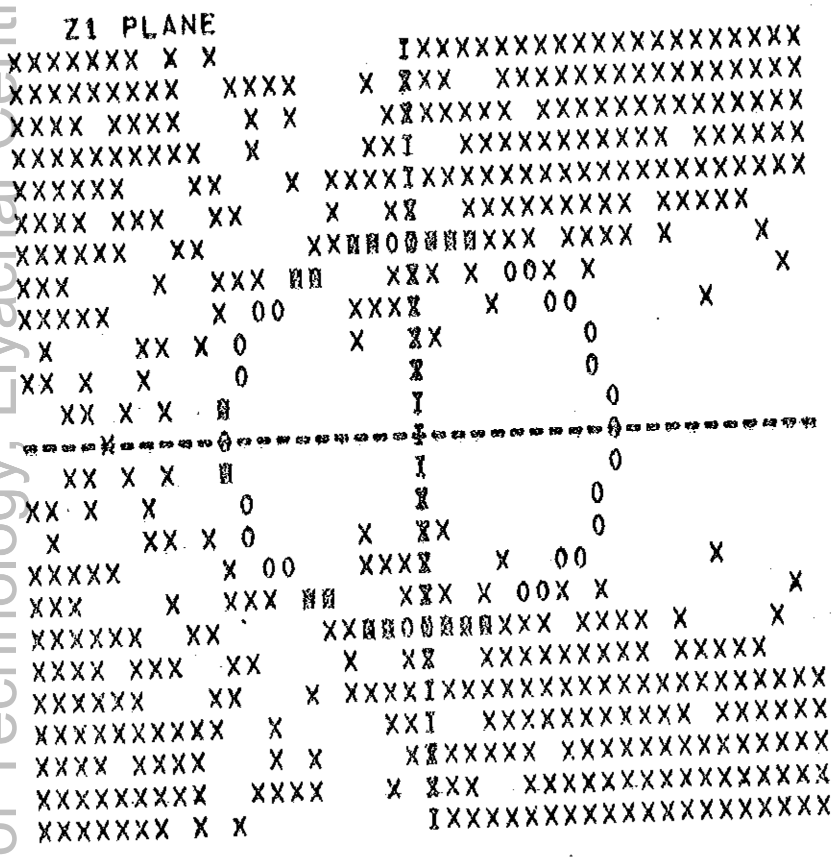
המסנן - $H=1/B(z_1,z_2)$ כאשר

$$B=\begin{bmatrix}1.0 & -1.20002759 & 0.40002239\\ -1.00003018 & 1.70007079 & -0.65005088\\ 0.40002035 & -0.70054880 & 0.25004387\end{bmatrix}$$

הוא בלתי יציב. הספקטרום של מסנן זה נראה בציור 5.6.
המסנן עבר תהליך יצוב דרך מערך ביניים Bl בגודל 8×8 המערך שהתקבל הוא:

$$\hat{B}=\begin{bmatrix}1.11574 & -1.23465 & 0.38270\\ -1.09342 & 1.68752 & -0.66807\\ 0.37595 & -0.65215 & 0.29754\end{bmatrix}$$

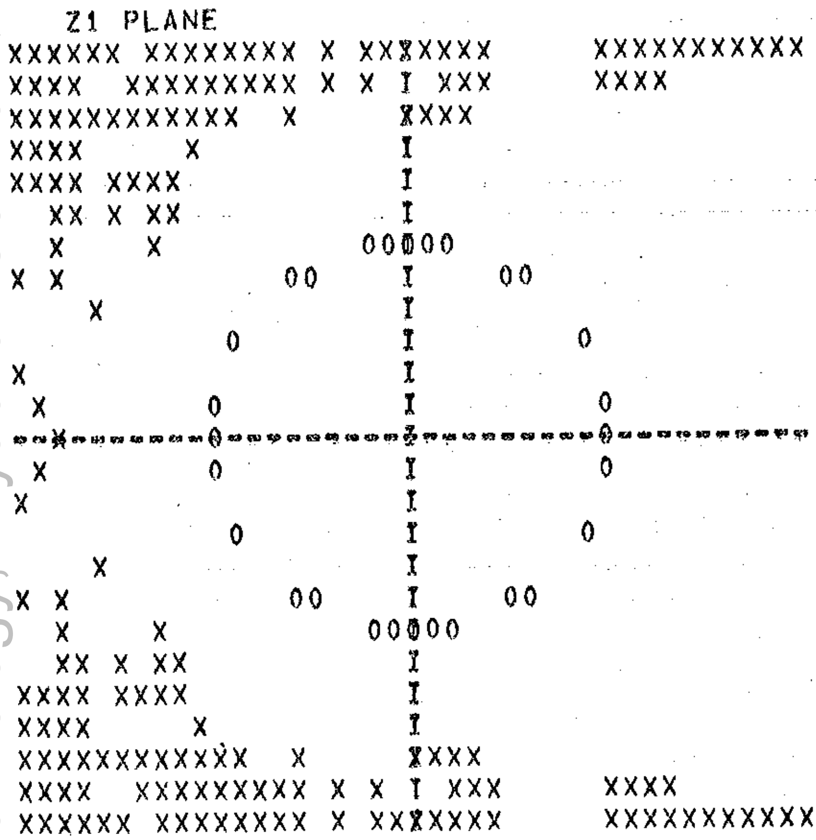
*הערה: בכל מקום שמופיעה המילה "ספקטרום" הכונה היא ל"אמפליטודת הספקטרום".



X=MAPPING OF Z2 UNIT CIRCLE
0=Z1 UNIT CIRCLE

ציור 5.1 השורשים של מערך A

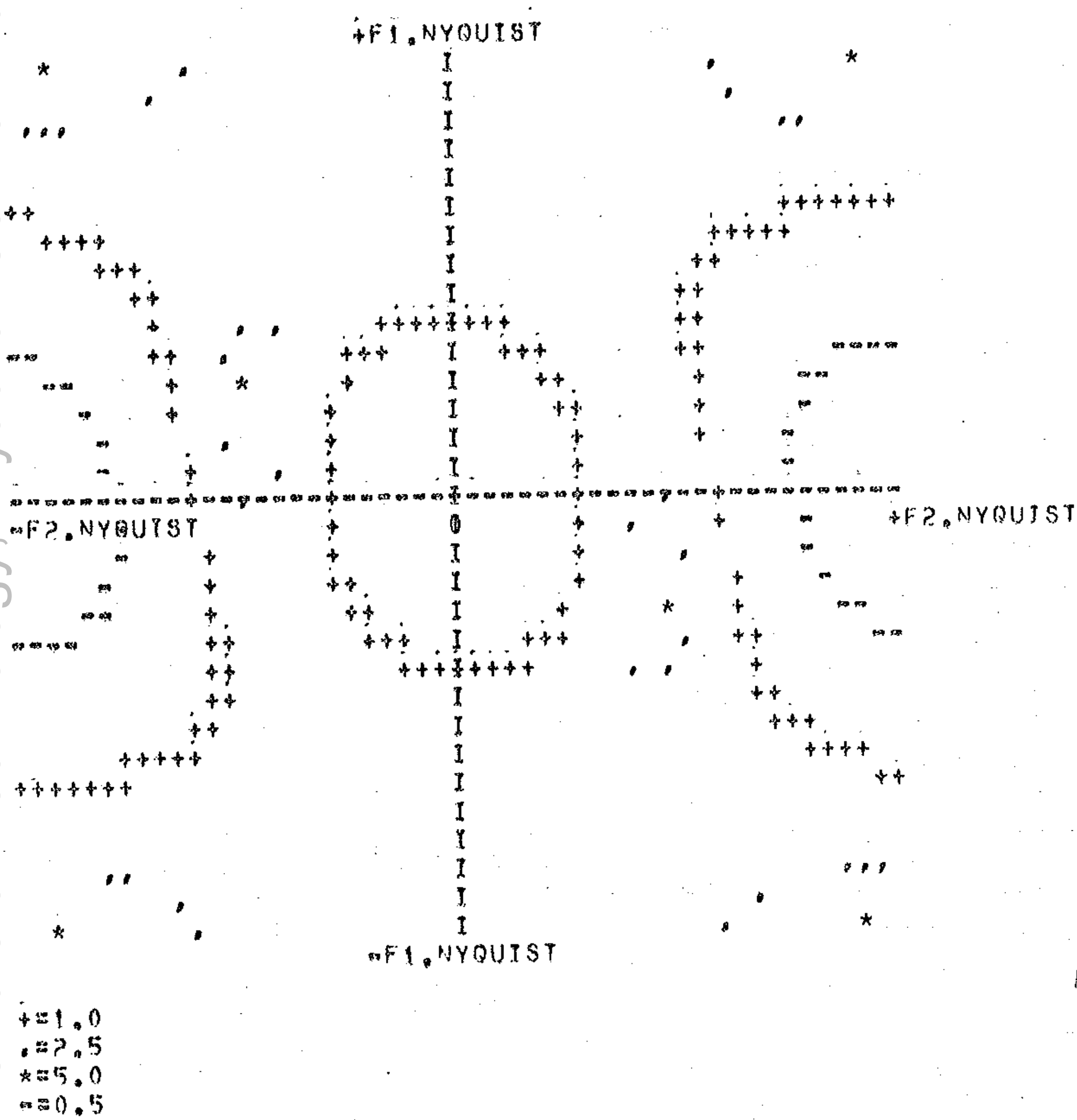
FIG. 5.1 THE ROOTS OF THE ARRAY A



X=MAPPING OF Z2 UNIT CIRCLE
0=Z1 UNIT CIRCLE

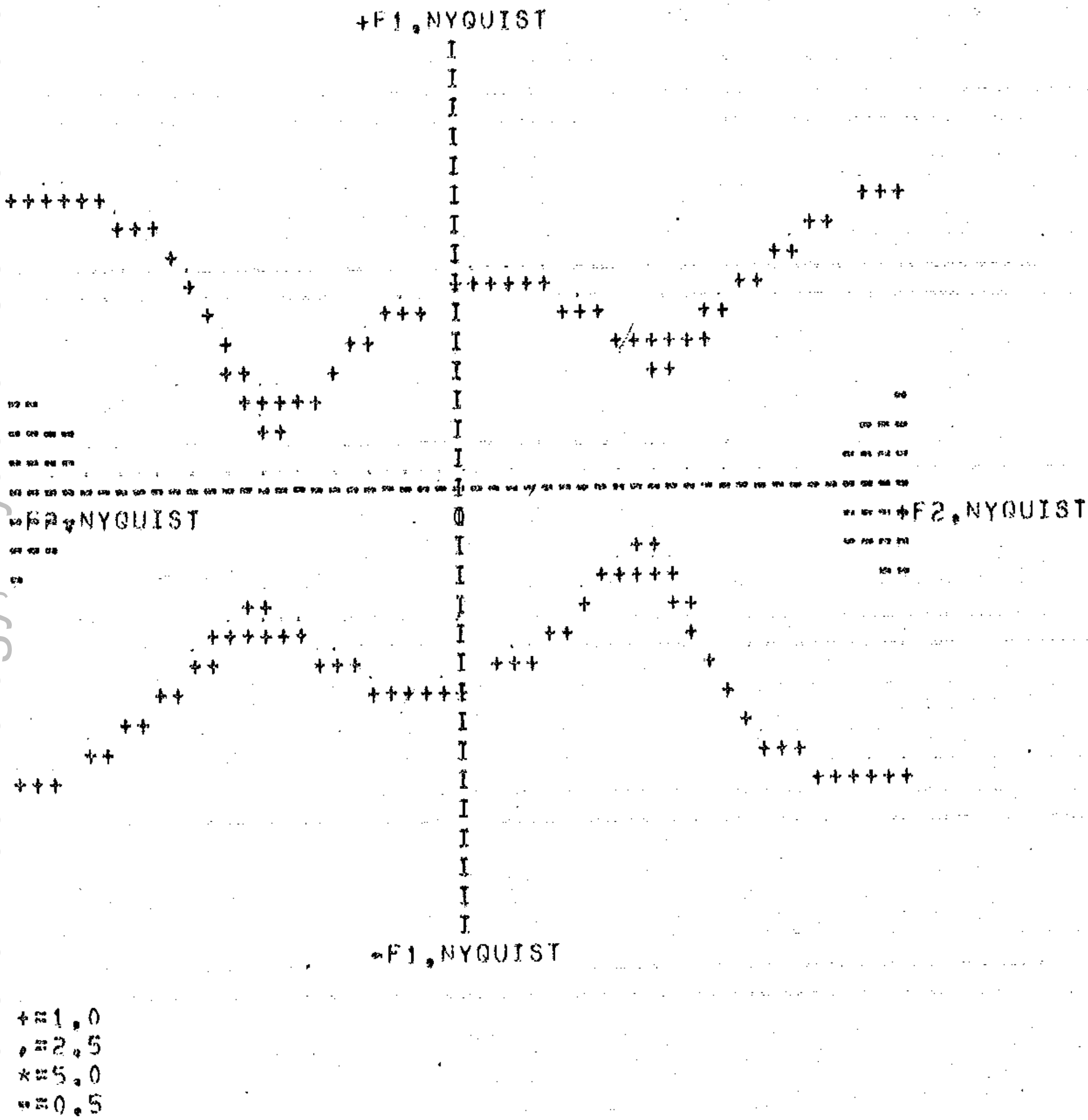
ציור 5.2 השורשים של המערך $\bar{A}$

FIG 5.2 THE ROOTS OF THE ARRAY $\bar{A}$



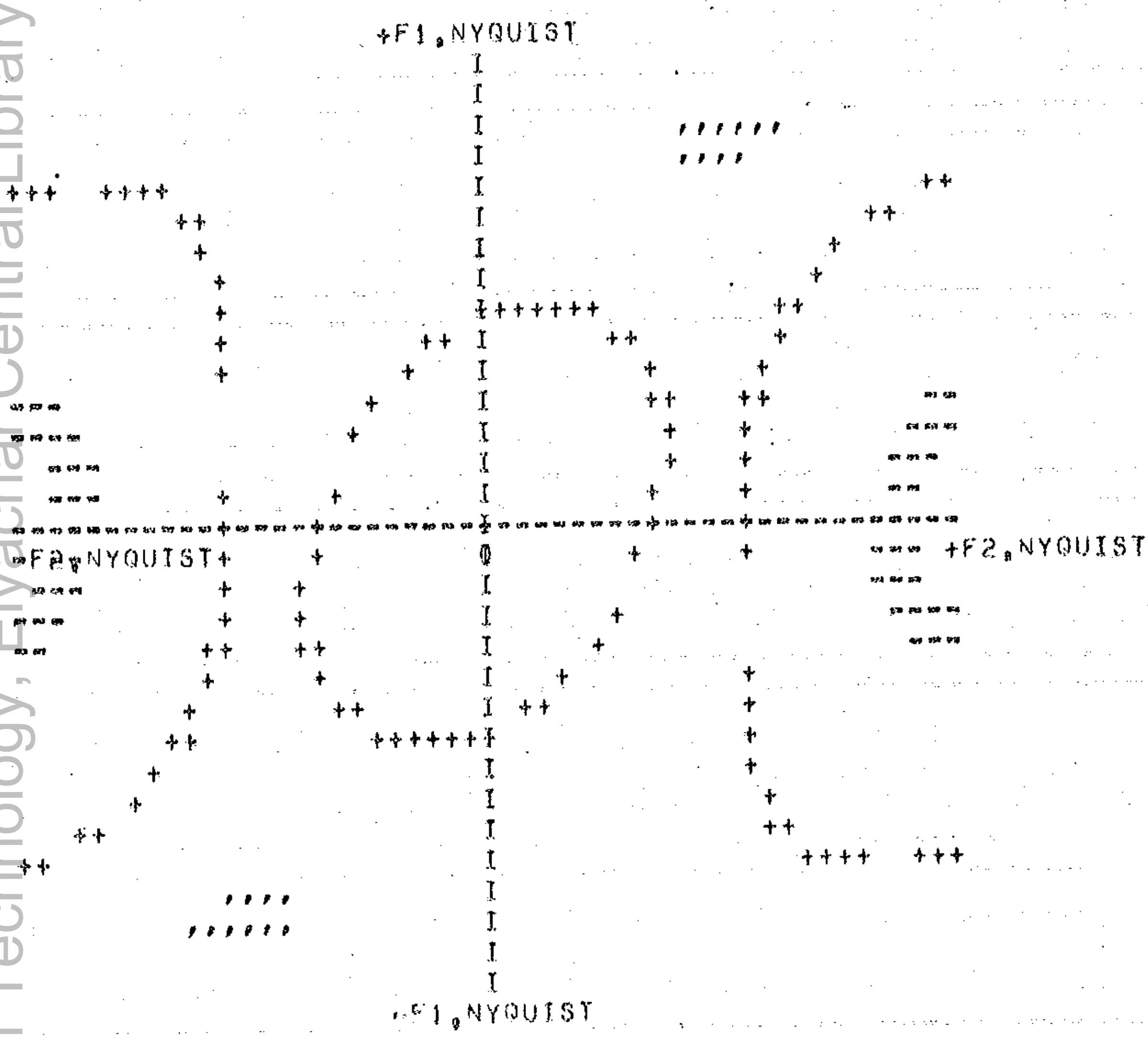
<u>ציור 5.3</u> ספקטרום המסנן $H(z_1,z_2)=\frac{1}{A(z_1,z_2)}$

<u>FIG 5</u>.3 THE SPECTRUM OF THE FILTER $H(z_1,z_2)=\frac{1}{A(z_1,z_2)}$



<u>ציור 5.4</u> ספקטרום של המסנן $\hat{H}(z_1,z_2)=\dfrac{1}{\hat{A}(z_1,z_2)}$

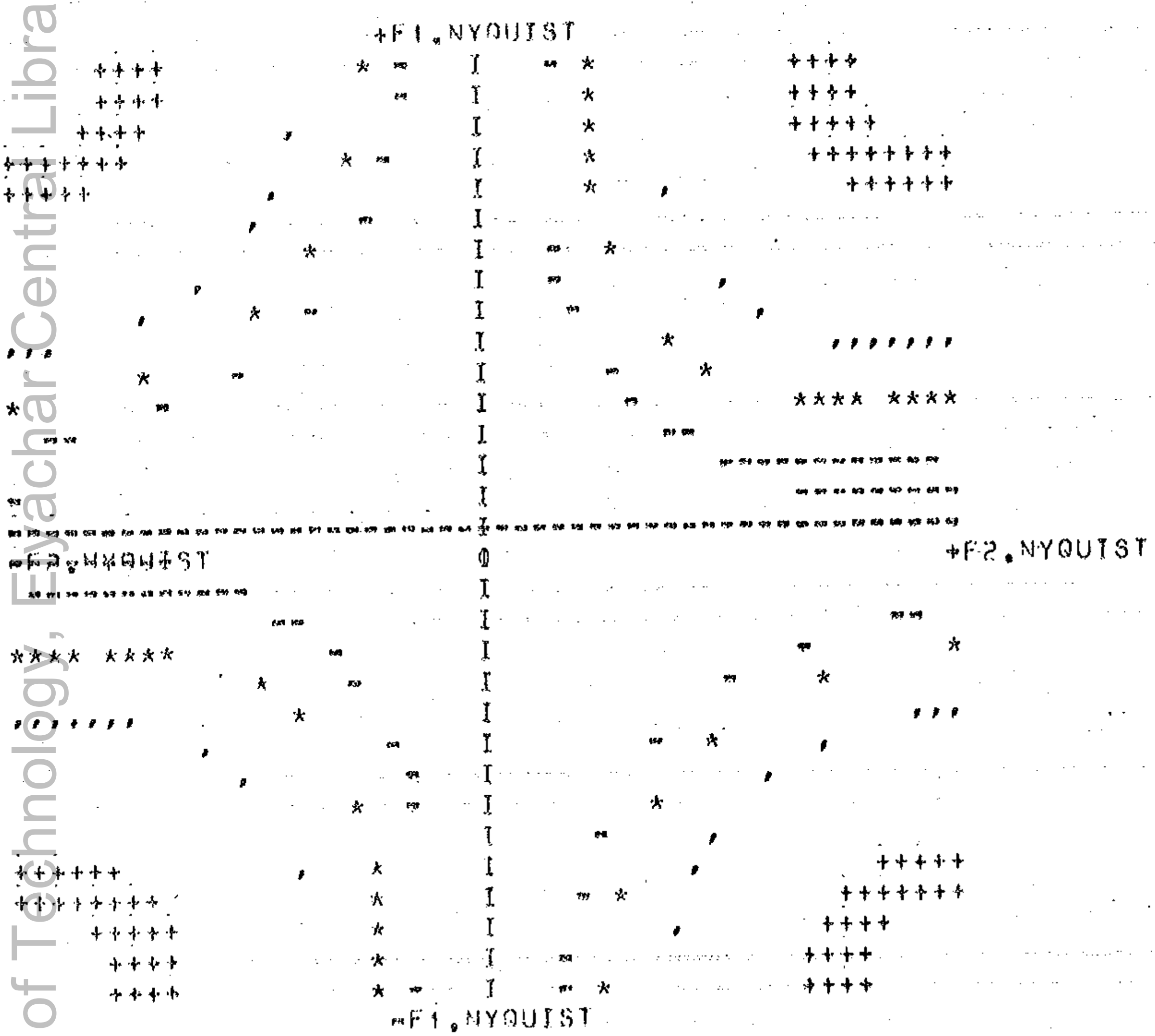
<u>FIG 5.4</u> THE SPECTRUM OF THE FILTER $\hat{H}(z_1,z_2)=\dfrac{1}{\hat{A}(z_1,z_2)}$



+=1.0
,=2.5
*=5.0
-=0.5

ציור 5.5 ספקטרום של המסנן $\bar{H}(z_1,z_2)=\dfrac{1}{\bar{A}(z_1,z_2)}$

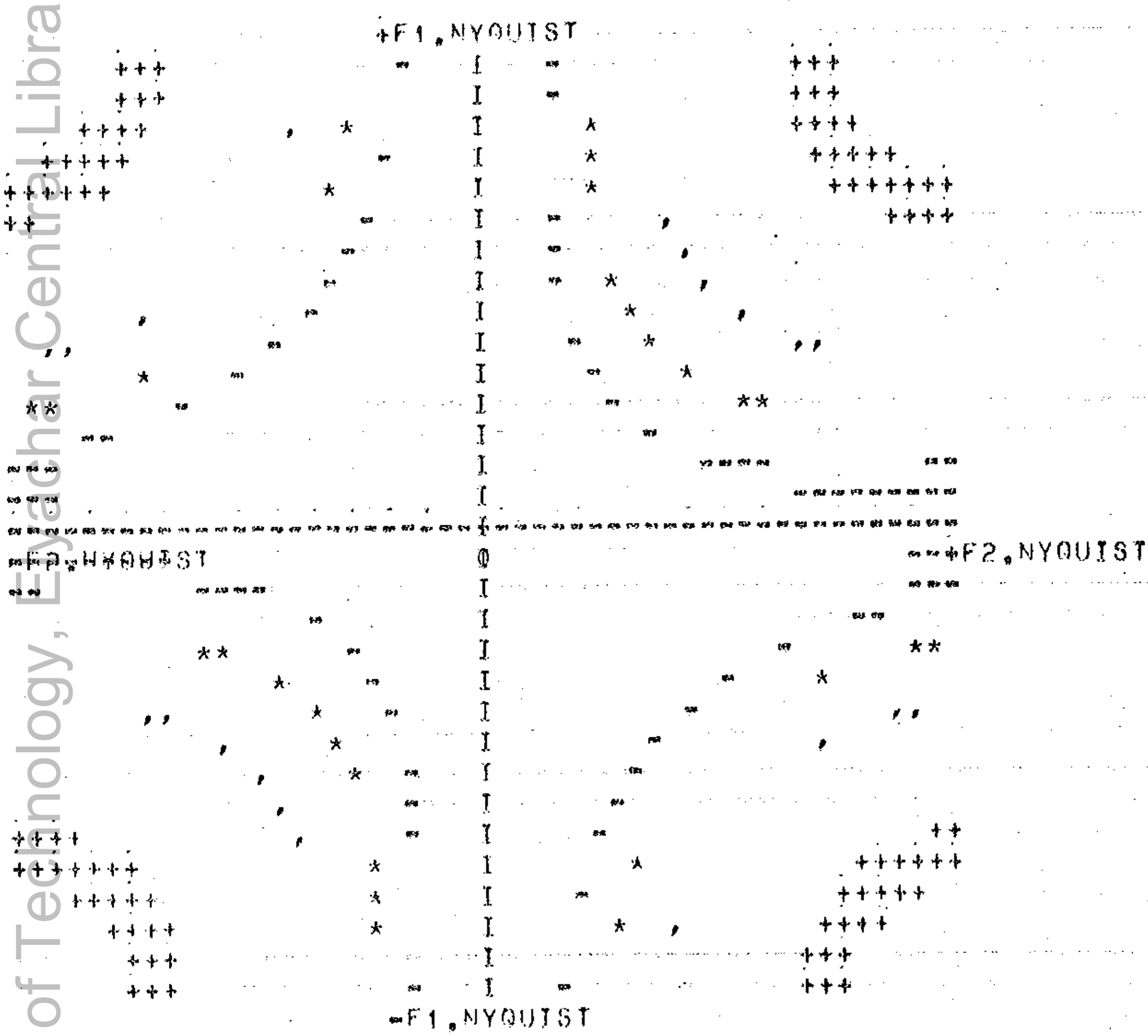
FIG 5.5 THE SPECTRUM OF THE FILTER $\bar{H}(z_1,z_2)=\dfrac{1}{\bar{A}(z_1,z_2)}$



+=1.0
,=2.5
*=5.0
-=10.

ציור 5.6 ספקטרום של המסנן $H(z_1,z_2)=\frac{1}{B(z_1,z_2)}$

FIG 5.6 THE SPECTRUM OF THE FILTER $H(z_1,z_2)=\frac{1}{B(z_1,z_2)}$



+=1.0
,=2.5
*=5.0
-=10.

ציור 5.7 ספקטרום של המסנן $\hat{H}(z_1,z_2)=\frac{1}{\hat{B}(z_1,z_2)}$

FIG 5.7 THE SPECTRUM OF THE FILTER $\hat{H}(z_1,z_2)=\frac{1}{\hat{B}(z_1,z_2)}$

בציור 5.7 נראה הספקטרום של המסנן $\hat{H}=1/B(z_1,z_2)$. רואים שספקטרום זה זהה כמעט לספקטרום של המסנן המקורי H.

5.4 יצוב מסנן רקורסיבי דו ממדי ע"י התמרת HILBERT [9]

בסעיף הקודם הוצגה אחת מהשיטות ליצוב מסנן בלתי יציב. ראינו שבמקרים מסוימים עלולים לקבל עוותים לא מבוטלים בספקטרום של המסנן המיוצב יחסית לספקטרום המקורי. שיטת הייצוב בעזרת התמרת הילברט מבטיחה עוותים קטנים יחסית בספקטרום הרצוי. כדי להבין ביתר קלות את השימוש בטרנספורמצית הילברט ליצוב מסנן דו ממדי. נסביר ראשית את השימוש בהתמרה במקרה החד מימדי. הסברים מפורטים למקרה החד ממדי אפשר למצוא ב-[2],[3].

$p(i)$ הוא אות דיסקרטי מחזורי אם מתקיים

$$p(i)=p(i+kN) \tag{5.8}$$

אורך המחזור הוא N. i מקבל את הערכים $0,1,2,\dots,N-1$. k יכול לקבל ערך שלם כלשהוא.

$p(i)$ יקרא סבתי אם עבור מחזור אחד באורך N מתקיים

$$p(i)=0 \qquad N>i\geq N/2$$

למעשה אפשר להפוך כל סידרה סופית לסיבתית ע"י הוספת אפסים בצורה מתאימה.
נגדיר את הפונקציה הזוגית והאיזוגית של הסידרה הסיבתית

$$p_{even}(i) \triangleq p_e(i)=\frac{1}{2}[p(i)+p(N-i)] \tag{5.9}$$

$$p_{odd}(i) \triangleq p_o(i)=\frac{1}{2}[p(i)-p(N-i)] \tag{5.10}$$

ולכן אפשר לרשום עבור הסידרה הזוגית

$$p_e(i)=\begin{cases} p(i) & i=0 \\ \frac{1}{2}p(i) & 0<i<N/2 \\ 0 & i=N/2 \end{cases} \tag{5.11}$$

וברור שלסידרה זו סימטריה זוגית כלומר

$$p_e(i)=p_e(N-i)$$

עבור הסידרה האיזוגית נרשום

$$p_o(i)=\begin{cases} 0 & i=0 \\ \frac{1}{2}p(i) & 0<i<N/2 \\ 0 & i=N/2 \end{cases} \tag{5.12}$$

לסידרה זו סימטריה אי זוגית כלומר

$$p_o(i) = -p(N-i)$$

נגדיר את $sgn(i)$ כ-

$$sgn(i) = \begin{cases} 0 & i = 0, N/2 \\ 1 & 0 < i < N/2 \\ -1 & N/2 < i < N \end{cases} \qquad (5.13)$$

נגדיר את $\delta_N(i)$ כ-

$$\delta_N(i) = \begin{cases} 1 & \text{עבור } i = kN \text{ מספר שלם } k \\ 0 & \text{בכל מקרה אחר} \end{cases}$$

אפשר לרשום

$$p_e(i) = sgn(i) \cdot p_o(i) + p(i) \cdot \delta_N(i) \qquad (5.14)$$

$$p_o(i) = sgn(i)\, p_e(i) \qquad (5.15)$$

ברור מנוסחאות (5.9) (5.10) שאפשר לרשום

$$p(i) = p_o(i) + p_e(i) \qquad (5.16)$$

נפעיל את התמרת פוריה הדיסקרטית על נוסחה זו ונקבל

$$D.F.T[p(i)] = D.F.T[p_o(i)] + D.F.T[p_e(i)] \qquad (5.17)$$

$p_e(i)$ ו- $p_o(i)$ ממשיים ולכן אפשר לבטא את החלק הממשי של התמרת פוריה כ -

$$PR(i) = D.F.T[p_e(i)] \qquad (5.18)$$

ואת החלק המדומה של התמרת פוריה כ -

$$j \cdot PI(i) = D.F.T[p_o(i)] \qquad (5.19)$$

ע"י הפעלת התמרת פוריה הפוכה על משואות (5.19), (5.18). נקבל

$$p_e(i) = I.D.F.T[PR(i)] \qquad (5.20)$$

$$p_o(i) = I.D.F.T[jPI(i)] \qquad (5.21)$$

נציב תוצאות אלו במשואות (5.14) ו-(5.15) ונקבל

$$p_e(i) = sgn(i) \cdot I.D.F.T[jPI(i)] + p(i) \cdot \delta_N(i) \qquad (5.22)$$

$$p_o(i) = sgn(i)\; I.D.F.T[PR(i)] \qquad (5.23)$$

נפעיל התמרת פוריה דיסקרטית על שתי המשואות וביחד עם משואות (5.18), (5.19)
נקבל את שתי המשואות החשובות :

$$PR(i) = D.F.T\left[sgn(i) \cdot I.D.F.T[jPI(i)] + P(i) \cdot \delta_N(i)\right]$$
$$PI(i) = -jD.F.T\left[sgn(i)\; I.D.F.T[PR(i)]\right] \qquad (5.24)$$

בהשתמשנו בעובדה ש- D.F.T של מכפלת סדרות שווה לקונבולוציה של התמרות פוריה הדיסקרטיות של הסדרות מקבלים ממשואה (5.24) את המשואה

$$PI(i)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} PR(k)[1-(-1)^{i-k}]\cot\frac{\pi}{N}(i-N) \qquad (5.25)$$

נוסחה זו נותנת את הקשר בין החלק הממשי והחלק הדימיוני של התמרת פוריה דיסקרטית של סידרה סיבתית.

ידוע שעבור סידרה $a(K)$ MININUM-PHASE אפשר לחשב את הפזה מאמפליטודת הספקטרום בעזרת התמרת HILBERT [2]

$$\theta(e^{jw})=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\left|A(e^{j\Omega})\right|\cot\frac{w-\Omega}{2}\,d\Omega \qquad (5.26)$$

משואה זו נובעת מכך שסידרה $a(K)$ היא MININUM-PHASE אם ורק אם טרנספורמצית z ההופכית של $\log[A(z)]$ היא סידרה סבתית [2]. מאחר וטרנספורמצית הילברט מקשרת בין החלק הממשי והדימיוני של התמרת פוריה של סדרות סבתיות, שמוש בהתמרת הילברט על $\log\left|A(e^{jw})\right|$ יתן את הפזה של $A(e^{jw})$.

על ידי שימוש בנוסחאות (5.24), (5.25) אפשר לקבל את הקשר בין הפזה $\theta(i)$ והאמפליטודה הדיסקרטית של D.F.T של סידרה $a(k)$ שהיא MININUM-PHASE

$$\theta(i)=-j\,D.F.T\left[\mathrm{sgn}(i)\ I.D.F.T[\log\left|A(i)\right|]\right] \qquad (5.27)$$

נוסחה זו היא למעשה קרוב של נוסחה (5.26) [19]

היצוב של מסנן בלתי יציב $H=1/P(z)$ יעשה בצורה הבאה:

נפעיל על המערך $p(i)$ D.F.T.

אם אמפליטודת הספקטרום היא $|A(i)|$ נחשב את הפזה החדשה לפי נוסחה (5.27).

נעבור בחזרה לקואורדינטות קרטזיות.

$$PR(i)=|A(i)|\cos(\theta(i))$$
$$PI(i)=|A(i)|\sin(\theta(i)) \qquad (5.28)$$

נפעיל התמרת פוריה דיסקרטית הפוכה ונקבל מערך $\overline{p(i)}$ שהוא MINIMUM-PHASE.

נראה עתה כיצד ניתן לישם שיטת ייצוב זו עבור מערכים דו ממדיים [9].

סידרה מחזורית דו ממדית תקרא סיבתית אם מתקיים

$$p(i_1,i_2)=\Big[\,0 \qquad i_1\geqslant N_1/2 \quad i_2\geqslant N_2/2 \qquad (5.29)$$

נגדיר את הסדרות הזוגית והבלתי זוגית על ידי

$$p_e(i_1,i_2)=\frac{1}{2}\left[p(i_1,i_2)+p(N_1-i_1,N_2-i_2)\right] \qquad (5.30)$$

$$p_o(i_1,i_2)=\frac{1}{2}\left[p(i_1,i_2)-p(N_1-i_1,N_2-i_2)\right] \qquad (5.31)$$

ע"י הכללת המקרה החד ממדי אפשר לראות שמתקיים

$$p_o(i_1,i_2)=\left[\operatorname{sgn}(i_1,i_2)+\operatorname{bdy}(i_1,i_2)\right]p_e(i_1\ i_2) \qquad (5.32)$$

$$\operatorname{sgn}(i_1,i_2)=\begin{cases}1 & 0<i_1<N_1/2\,,\ 0<i_1<N_2/2\\ -1 & N_1/2<i_1<N_1\,,\ N_2/2<i_2<N_2\\ 0 & \text{בכל מקרה אחר}\end{cases} \qquad (5.33)$$

הפונקציה bdy, מתקנת את המשואה בגבולות.

$$\operatorname{bdy}(i_1,i_2)=\begin{cases}1 & i_2=0\,,\ 0<i_1<N_1/2\\ -1 & i_2=0\,,\ N_2/2<i_1<N_1\\ 1 & i_1=0\,,\ 0<i_2<N_2/2\\ -1 & i_1=0\,,\ N_2/2<i_2<N_2\\ 0 & \text{בכל מקרה אחר}\end{cases} \qquad (5.34)$$

$$p_e(i_1,i_2)=p_e(N_1-i_1,N_2-i_2) \qquad (5.35)$$
$$p_o(i_1,i_2)=-p_o(N_1-i_1,N_2-i_2)$$

$$p(i_1,i_2)=p_e(i_1,i_2)+p_o(i_1,i_2) \qquad (5.36)$$

ע"י הפעלת D.F.T על שני צידי משואה (5.36) נקבל

$$\text{D.F.T}\left[p(i_1,i_2)\right]=\text{D.F.T}\left[p_e(i_1,i_2)\right]+\text{D F T}\left[p_o(i_1,i_2)\right] \qquad (5.37)$$

אם נסמן ב- $PR(i_1,i_2)$ את החלק הממשי של התמרת פוריה הדיסקרטית של הסידרה $p(i_1,i_2)$. וב- $PI(i_1,i_2)$ את החלק הדמיוני נוכל לרשום

$$
\begin{aligned}
PR(i_1,i_2) &= D.F.T[p_e(i_1,i_2)] \\
PI(i_1,i_2) &= -j\,D.F.T[p_o(i_1,i_2)]
\end{aligned}
\qquad (5.38)
$$

ממשואות (5.38) וממשואה (5.32) אפשר לקבל ע"י פעולות פשוטות את המשואה.

$$PI(i_1,i_2) = -j D.F.T([sgn(i_1,i_2) + bdy(i_1,i_2)] \cdot I.D.F.T[PR(i_1,i_2)]) \qquad (5.39)$$

נוסחה זו היא הבסיס ליצוב מסננים רקורסיבים דו ממדיים לא יציבים. השיטה דומה לזו הנהוגה במסננים חד ממדיים.

בגיח שפונקצית התמסורת של המסנן הבלתי יציב היא

$$H(z_1,z_2) = D(z_1,z_2) / B(z_1,z_2)$$

מכיון שהמסנן בלתי יציב המערך B אינו MINIMUM PHASE.

מטרתנו היא לבנות מ - B מערך $\bar{B}$ שיהיה MINIMUM PHASE והספקטרום של $\bar{B}$ יהיה זהה לזה של B.

לכן המסנן $\bar{H}(z_1 z_2)=D(z_1,z_2)/\bar{B}(z_1,z_2)$ יהיה יציב והספקטרום שלו יהיה קרוב מאוד לספקטרום של המסנן המקורי.

$B(i_1,i_2)$ היא אמפליטודת הספקטרום של המערך סיבתי נתון. נחשב את הזוית $\Theta(i_1,i_2)$ של הספקטרום לפי הנוסחה [9]

$$\Theta(i_1,i_2) = -j D.F.T([sgn(i_1,i_2) + bdy(i_1,i_2)]\ I.D.F.T[\log|B(i_1,i_2)|]) \qquad (5.40)$$

המערך $\bar{B}$ שאמפליטודת הספקטרום שלו זהה לזו של המערך B, ופזת הספקטרום שלו היא $\Theta(i_1,i_2)$, הוא מערך MINIMUM-PHASE. לכן המסנן $\bar{H}(z_1,z_2)=D(z_1,z_2)/\bar{B}(z_1,z_2)$ יהיה יציב, ואמפליטודת תגובת התדר קרובה מאוד לזו של המסנן H.

נסכם את הצעדים שיש לעשות כדי ליצב מסנן בלתי יציב.

א. מוסיפים אפסים למערך הנתון כך שיהפוך למערך סיבתי. במידה וגודלו אינו מתאים לתוכנית HARM[17] מוסיפים אפסים נוספים (HARM היא סברוטינת מחשב המחשבת את התמרת פוריה הדיסקרטית של מערך. ממדי המערך חייבים להיות חזקה של 2).

ב. מחשבים את ה- DFT של המערך. מחשבים את הלוגריתם הטבעי של אמפליטודת הספקטרום בנקודות הדיסקרטיות.

ג. מחשבים את $\Theta(i_1,i_2)$ לפי הנוסחה (5.40)

ד. עוברים מהקורדינטות הפולריות $|A(i_1,i_2)|$, $\Theta(i_1,i_2)$ לקואורדינטות קרטזיות $PI(i_1 i_2), PR(i_1,i_2)$

ה. מפעילים על PR ו- PI IDFT ומקבלים מערך חדש. למערך זה ספקטרום שווה לספקטרום של המערך שממנו יצאנו. המערך החדש הוא MINIMUM-PHASE.

נכתבה תוכנית מחשב המופיעה בנספח 3. תוכנית זו מבצעת את הכתוב בסעיפים הכתובים מעלה.

הכניסה של התוכנית הוא מערך שאינו MINIMUM-PHASE והיציאה הוא מערך חדש, MINIMUM PHASE, הספקטרום של המערך המחושב קרוב מאוד לספקטרום המקורי.

הורצה תוכנית מחשב על המערך שאינו MINIMUM PHASE

$$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.75 & 0.9 \\ 1.5 & -1.2 & 1.3 \\ 1.2 & 0.9 & 0.5 \end{bmatrix}$$

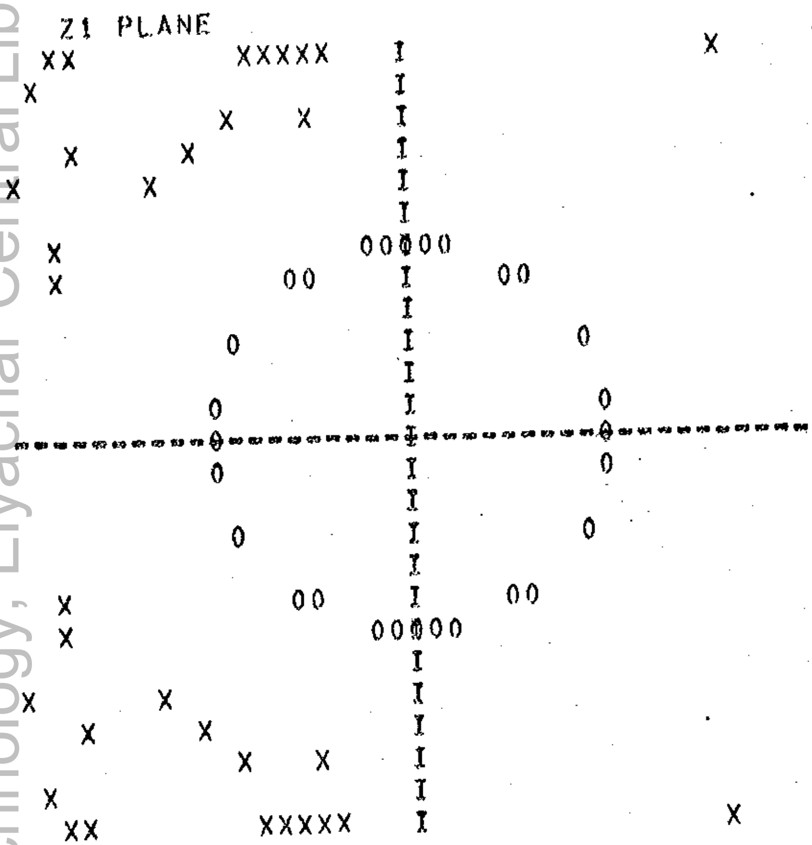
מערך זה זהה למערך A המופיע בסעיף 5.3 מיפוי שורשיו נראה בציור 5.1 . והספקטרום של המסנן $H(z_1 z_2)=1/A(z_1 z_2)$ נראה בציור 5.3.

מערך זה שימש ככניסה לתוכנית (נספח 3) התוצאה שהתקבלה היא מערך MINIMUM PHASE שנסמנו ב- A*

$$A^* = \begin{bmatrix} 2.4607 & 0.6192 & 0.8841 \\ 1.2927 & 0.4259 & 0.7720 \\ 0.2611 & 0.3276 & 0.2122 \end{bmatrix}$$

מיפוי שורשי A* נראה בציור 5.8, וברור כי לא קיימים $|z_1|\le 1$, $|z_2|\le 1$ כך שעבורם $A^*(z_1 z_2) = 0$. כלומר המסנן $H^*(z_1,z_2)=1/A^*(z_1,z_2)$ הוא מסנן יציב.

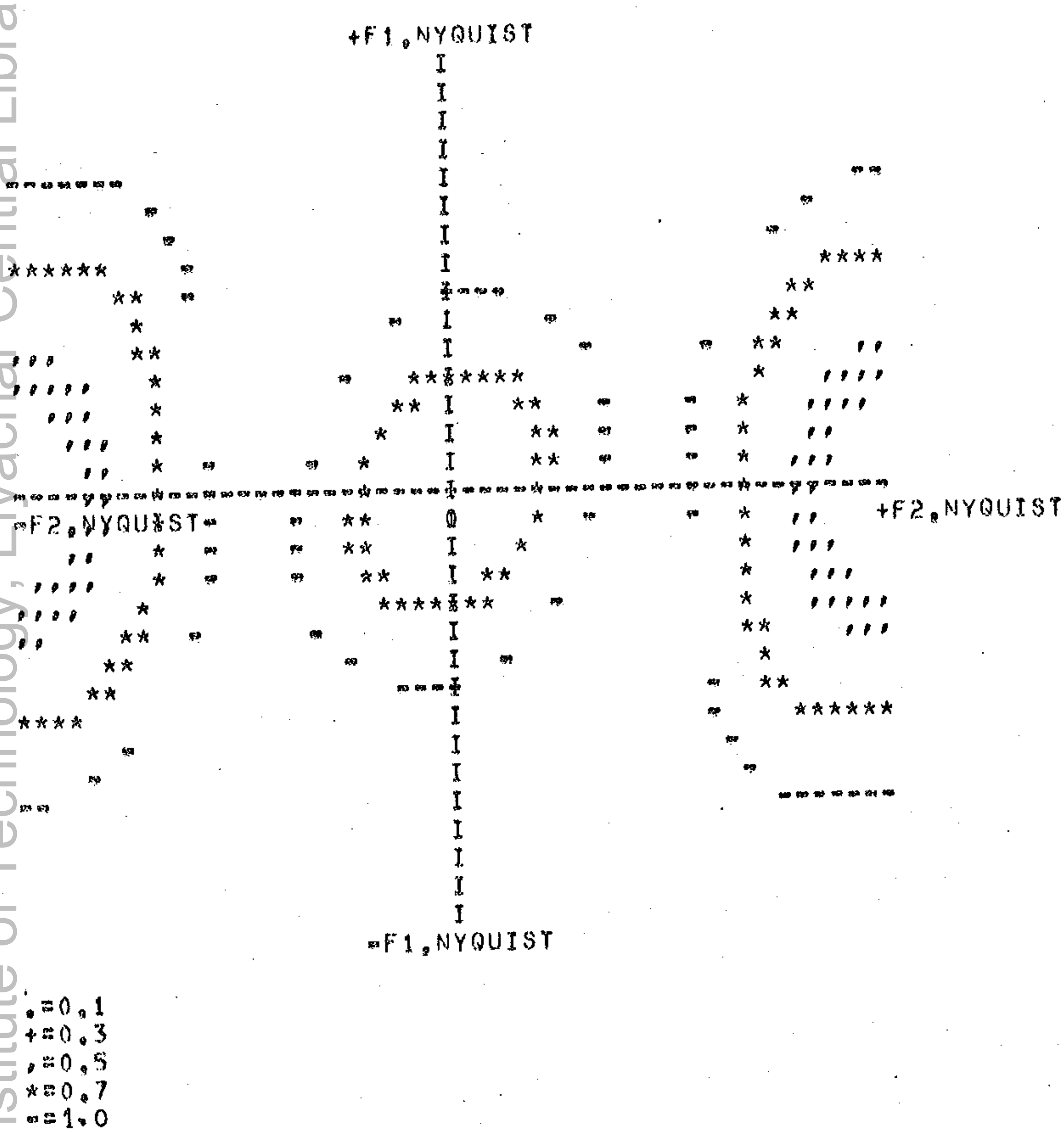
נסתכל עתה על הספקטרום של המסנן H* . הספקטרום נראה בציור 5.9 השואה בין ציור 5.9 לבין ציור 5.3 מראה שההבדל בין הספקטרום של שני המסננים מועט. (שים לב להבדל בסימונים בשני הציורים). תאורטית הספקטרום של H ושל H* צריכים היו להיות שווים. ההבדל בספקטרום נובע מהסיבה הבאה: A* צריך להתאפס עבור אברים שהאינדקסים שלהם גבוהים ממימדי A שממנו יצאנו. במציאות קבלנו שאיברים אלו קבלו ערכים קטנים יחסית לאברים שהאינדקס שלהם קטן או שווה לממדי A. אברים אלו אינם מתאפסים מאחר וטרנספורמצית הילברט הדיסקרטית היא קרוב של התמרת הילברט (נוסחה 5.26). מאחר שבתהליך היצוב חייבים A* ו-A להיות בעלי אותם מימדים מזניחים אברים אלו. זו הסיבה שהספקטרום של H ו-H* אינם זהים.



X=MAPPING OF Z2 UNIT CIRCLE
0=Z1 UNIT CIRCLE

ציור 5.8 מיפוי שורשי $A^*(z_1,z_2)=0$ במישור z_1

FIG 5.8 MAPPING OF $A^*(z_1,z_2)=0$ ROOTS ON z_1 PLANE



ציור 5.9 הספקטרום של המסנן $H^*(z_1,z_2)=\frac{1}{A^*(z_1,z_2)}$

FIG 5.9 THE SPECTRUM OF THE FILTER $H^*(z_1 z_2)=\frac{1}{A^*(z_1,z_2)}$

מחברי המאמר[9] מציינים שבכמה מקרים נכשלה התוכנית והמערכים שהתקבלו לא היו MINIMUM-PHASE. קימים מספר גורמים שעלולים לגרום זאת. ראשית עלינו לזכור שהתהליך המוצע איננו אלא קרוב של אינטגרל הילברט.
המחברים מציינים שבדוגמא שנכשלה המסנן היה בלתי יציב בצורה גבולית, ויתכן ומסיבה זו נגרמו קשיים נומריים.
התוצאות המתקבלות בשיטת ייצוב לפי הילברט טובות יותר מאלו המושגות בשיטת P.L.S.I .
אם נסמן ב- $|A^*(i_1,i_2)|$ את אמפליטודת הספקטרום הדיסקרטית של המערך המיוצב בשיטת הילברט. $|A(i_1,i_2)|$ יסמן את אמפליטודת הספקטרום הדיסקרטית של המערך המקורי. הביטוי $e(A^*,A)$ יסמן את סכום ריבועי ההפרשים בין אמפליטודת הספקטרום של המערך A^* לבין זו של המערך A.

$$e(A^*,A) = \sum_{i_1=0}^{N1-1} \sum_{i=0}^{N2-1} \left[|A^*(i_1,i_2)| - |A(i_1,i_2)| \right]^2$$

באותה מידה אפשר לחשב את $e(\hat{A},A)$ כאשר $\hat{A}$ הוא המערך המתקבל ע"י יצוב בשיטת P.L.S.I . מסתבר שבדוגמא המובאת בפרק זה.

$$e(\hat{A},A) \cong 18.5\, e(A^*,A)$$

עובדה מצביעה על היתרון בשימוש בשיטת הילברט ליצוב לעומת שיטת P.L.S.I .

5.5 ייצוב ע"י השואת ספקטרום של מסנן שאיננו יציב עם ספקטרום של <u>מסנן יציב[10]</u>

שיטה זו מתאימה ליצוב מסננים מסדר נמוך, (2×2), (3×3). עבור מסננים מסדר גבוה יותר קשה להפעיל שיטה זו מפאת סיבוכה.
נסביר שיטה זו באמצעות דוגמא.
נסתכל על המסנן $H(z_1,z_2) = 1/C(z_1,z_2)$ כאשר $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

מסנן זה איננו יציב משום שקימים $|z_2| \le 1, |z_1| \le 1$ כך שעבורם $C(z_1,z_2)=0$
כדי להבטיח שהמסנן יהיה יציב נקרב את $C(z_1,z_2)$ בעזרת
$\tilde{C}(z_1,z_2) = C_1(z_1)\cdot C_2(z_2)$ כאשר השורשים של C1 ו-C2
גדולים בערכם המוחלט מ-1.
במקרה הנידון נרשום

$$\tilde{C}(z_1,z_2) = (z_1 - x_1)(z_2 - x_2)$$

כאשר $|x_1|>1 \ , \ |x_2|>1$

עתה עלינו להבטיח שהספקטרום של שני המסננים $H=1/C \ , \ \bar{H}=1/\bar{C}$ יהיה קרוב ככל האפשר. נרשום את C בצורת מטריצה.

$$C=\begin{bmatrix} x_1 \cdot x_2 & -x_1 \\ -x_2 & 1 \end{bmatrix}$$

אם נסתכל על המערך B

$$B=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$$

אפשר לראות מיד שאמפליטודת התמרת פוריה הדיסקרטית שלו היא

$$|DFT(B)|=\begin{bmatrix} |b_1+b_2+b_3+b_4| & |b_1-b_2+b_3-b_4| \\ |b_1+b_2-b_3-b_4| & |b_1-b_2-b_3+b_4| \end{bmatrix}$$

אם נפעיל נוסחה זו על המערכים C ו-$\bar{C}$ נקבל

$$D.F.T(C)=\begin{bmatrix} 10 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D.F.T(\bar{C})=\begin{bmatrix} |1+x_1x_2-x_1-x_2| & |x_1x_2+x_1-x_2-1| \\ |-1+x_1x_2-x_1+x_2| & |x_1x_2+x_1+x_2+1| \end{bmatrix}$$

המטרה שלנו היא למצוא את x2, x1 עבורם מקבלים את

$$\min\Big[|DFT(C)|-|DFT(\bar{C})|\Big]^2=\min\Big[(|x_1x_2-x_1-x_2+1|-10)^2+$$

$$+(|x_1x_2+x_1-x_2-1|-4)^2+(|x_1x_2-x_1+x_2-1|-2)^2+$$

$$+(x_1x_2+x_1+x_2+1)^2\Big]$$

כך ש- $|x_1|>1 \quad |x_2|>1$

נכתבה תוכנית מחשב המתבססת על תוכנית ספריה המוצאת מינימום של פונקציה עם מספר משתנים.

התוצאה שהתקבלה היא

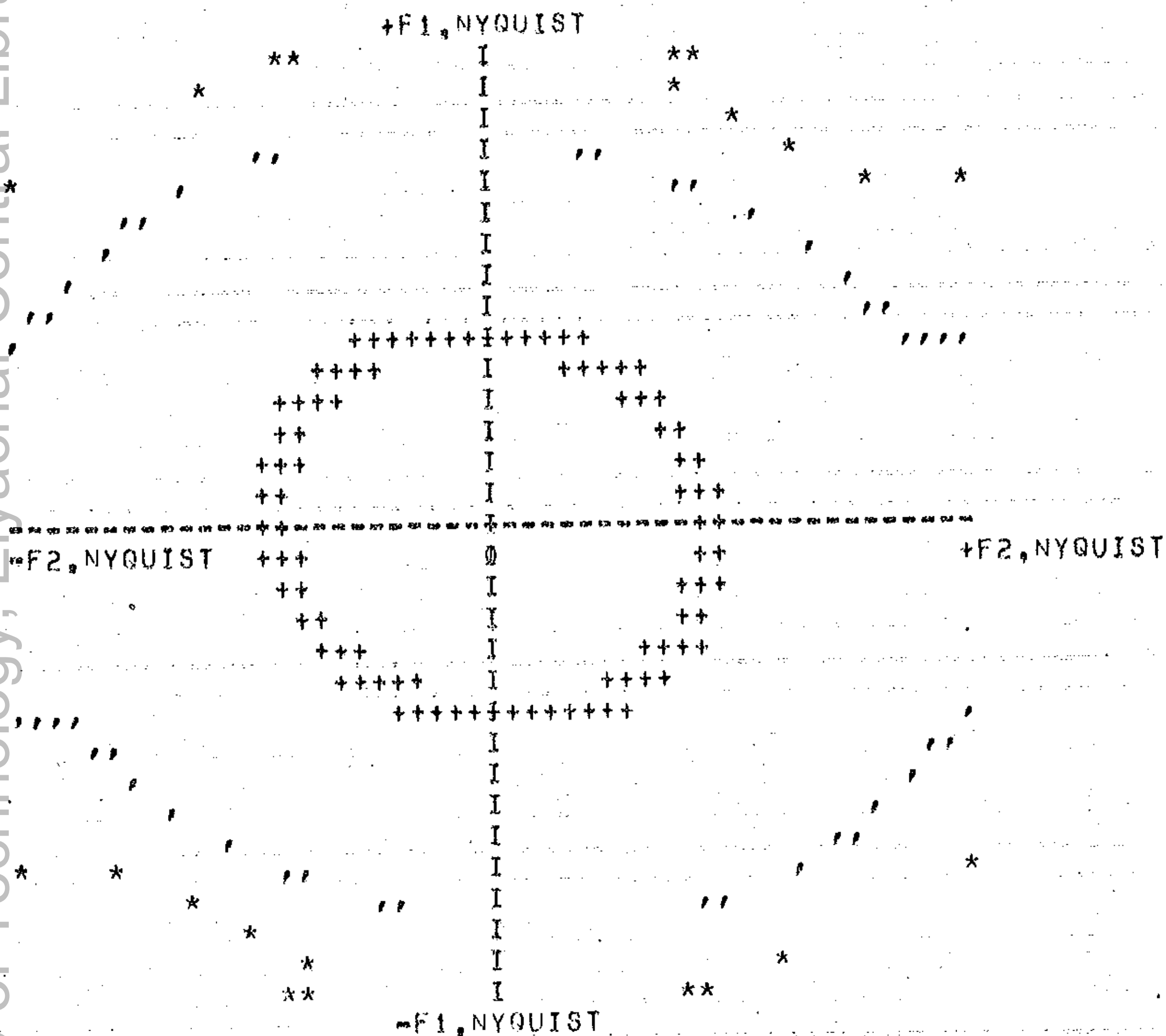
$$\bar{c}(z_1,z_2) = (z_1+1.5259)(z_2+2.735)$$

מטריצת אמפליטודת הספקטרום של המחושב היא

$$\left|D.F.T(\bar{C})\right| = \begin{bmatrix} 9.4344 & 4.3826 \\ 1.9643 & 0.9125 \end{bmatrix}$$

אם משווים תוצאה זו עם אמפליטודת הספקטרום של C, $|DFT(C)|$, רואים שהתוצאה משביעת רצון. כדי להווכח בזאת באופן מוחשי, ציור הספקטרום של המסנן $H(z_1,z_2)=1/C(z_1,z_2)$ ציור 5.10, ושל המסנן $\bar{H}(z_1,z_2)=1/\bar{C}(z_1,z_2)$ בציור 5.11. מציורים אלו רואים שעוותים בספקטרום של המסנן $\bar{H}$, יחסית לספקטרום של המסנן H קטנים ביותר.

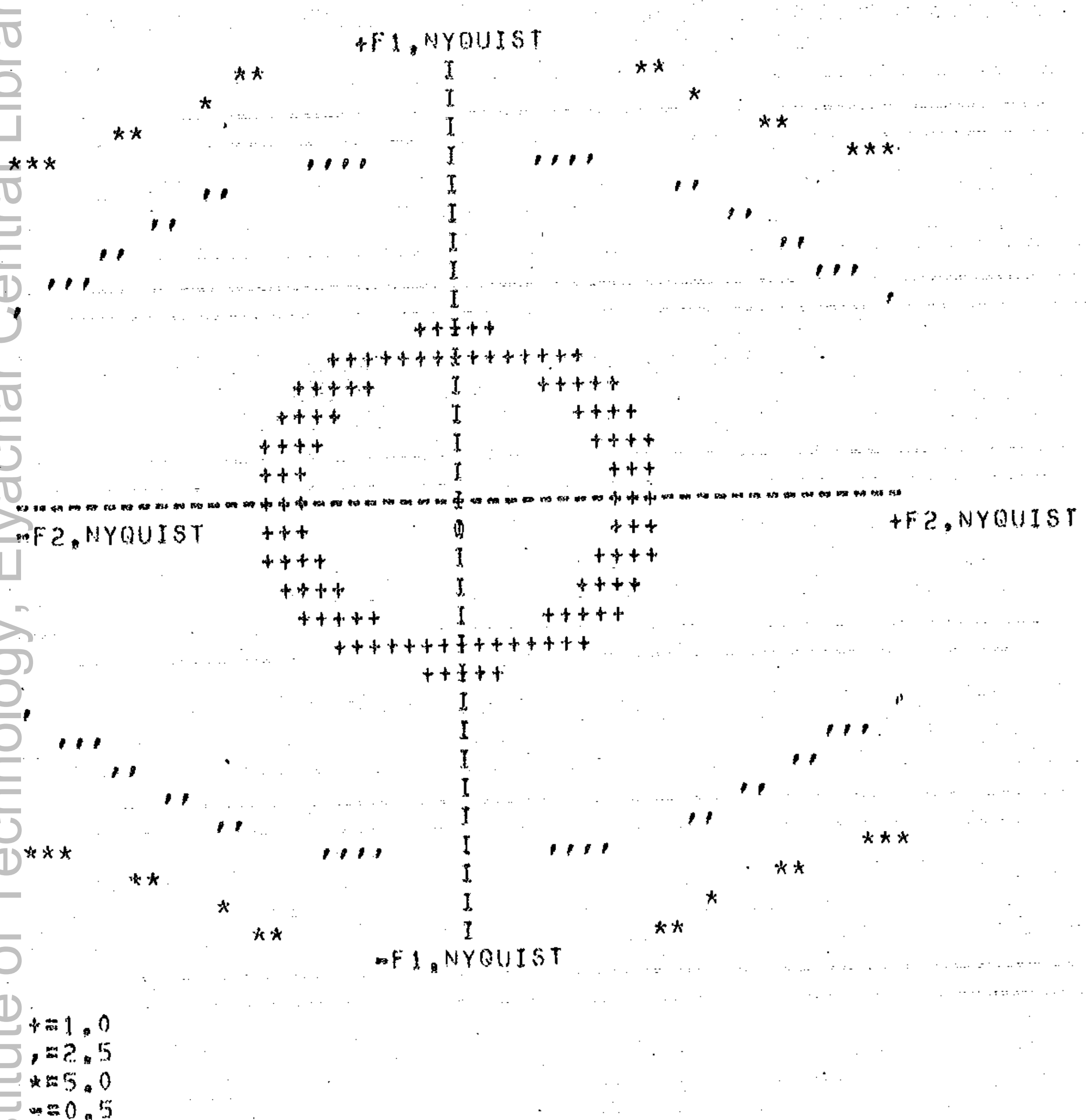
בדוגמא זו המערך היה מסדר 2×2. הקושי העיקרי בשיטה זו הוא לרשום את מטריצת אמפליטודת הספקטרום עבור מערך כללי, מסדר גבוה. נראה שעבור מערך מסדר (3×3) אפשר לחשב את המטריצה הכללית של אמפליטודת הספקטרום בקלות יחסית לפי נוסחה 4.19. המעריכים של האקספוננטים בנוסחה זו הם כפולות של $2\pi/3$ ולכן נתן לרשום את מטריצת הספקטרום בצורה כללית. עבור מערכים מסדר גבוה יותר העבודה הנדרשת לחשב את מטריצת הספקטרום היא רבה ולכן השיטה המוצגת בסעיף זה מתאימה למערכים קטנים מסדר (2×2), (3×3).



+=1,0
,=2,5
*=5,0
-=0,5

ציור 5.10 ספקטרום המסנן $H(z_1,z_2)=\frac{1}{C(z_1,z_2)}$

FIG 5.10 THE SPECTRUM OF THE FILTER $H(z_1\ z_2)=\frac{1}{C(z_1,z_2)}$



ציור 5.11 ספקטרום המסנן $\bar{H}(z_1,z_2)=\dfrac{1}{\bar{C}(z_1,z_2)}$

FIG 5.11 THE SPECTRUM OF THE FILTER $\bar{H}(z_1,z_2)=\dfrac{1}{\bar{C}(z_1,z_2)}$

6. תכנון מסנן רקורסיבי דו ממדי לפי התגובה לדגם יחידה.

נניח שנתונה לנו התגובה של מסנן לדגם יחידה. אם המסנן יציב כלומר תגובתו לדגם יחידה מתרסנת. אפשר ליצג את פעולת המסנן ע"י קונבולוציה. (לוקחים מספר סופי של אברים $h(m,n)$).

אפשרות אחרת היא לקרב את התגובה לדגם יחידה באמצעות מסנן רקורסיבי דו ממדי [4] . כפי שנאמר במבוא שיטה זו יעילה יותר (ברוב המקרים) מקונבולוציה ישירה.

נניח שהתגובה לדגם יחידה הרצויה היא :

$$d(i,j) \qquad \begin{array}{l} i=0,1,2 \ldots . M_d \\ j=0,1,2 \ldots . N_d \end{array}$$

התמרת z של התגובה לדגם יחידה תהיה

$$D(z_1,z_2) = \sum_{i=0}^{M_d} \sum_{j=0}^{N_d} d(i,j)\, z_1^i z_2^j \tag{6.1}$$

נניח שהמסנן הרקורסיבי הדו ממדי שמקרב תגובה זו הוא

$$F(z_1,z_2) = A(z_1,z_2) \big/ B(z_1,z_2) \tag{6.2}$$

$$A(z_1,z_2) = \sum_{i=0}^{M_a} \sum_{j=0}^{N_a} a(i,j)\, z_1^i z_2^j \tag{6.3}$$

$$B(z_1,z_2) = \sum_{i=0}^{M_b} \sum_{j=0}^{N_b} b(i,j)\, z_1^i z_2^j \tag{6.4}$$

הפרמטרים M_a, N_a , M_b, N_b . נתונים לבחירה על ידינו, אולם לאחר שנבחרו הם קבועים.

את הנוסחה (6.2) אפשר לרשום בצורה

$$F(z_1,z_2) \cdot B(z_1,z_2) = A(z_1,z_2) \tag{6.5}$$

וע"י התמרת z הפוכה מקבלים

$$a(m,n) = \sum_{i=0}^{M_b} \sum_{j=0}^{N_b} b(i,j) \cdot f(m-i,n-j) \tag{6.6}$$

$a(m,n)$ מוגדר עבור התחום I_a

$$I_a = \left[(i,j): \quad 0 \leq i \leq M_a \quad , \quad 0 \leq j \leq N_a \right] \tag{6.7}$$

מחוץ לתחום Ia מתקיים $a(m,n)=0$ נסמן תחום זה ב- $\hat{I}_a$

$$\hat{I}_a = \left[(m,n): \ m>0 \quad n>0 \quad (m,n) \notin I_a \right] \tag{6.8}$$

לכן אפשר לרשום

$$\sum_{i=0}^{M_b} \sum_{j=0}^{N_b} b(i,j)\, f(m-i,n-j) = 0 \qquad (m,n) \in \hat{I}_a \tag{6.9}$$

מבלי לפגוע בכלליות הפתרון נניח $b(0,0)=1$

$$f(m,n) = \sum_{\substack{i=0 \\ 0=i\neq j=0}}^{M_b} \sum_{j=0}^{N_b} -b(i,j)\, f(m-i,n-j) \qquad (m,n) \in \hat{I}_a \tag{6.10}$$

$f(m,n)$ הוא התגובה לדגם יחידה של המסנן שבחרנו. אם המסנן נבחר בצורה הנכונה, חייב להתקיים $f(m,n) \cong d(m,n)$, ואז נוסחה (6.10) תקבל את הצורה.

$$d(m,n) \cong \sum_{\substack{i=0 \\ 0=i\neq j=0}}^{M_b} \sum_{j=0}^{N_b} -b(i,j)\, d(m-i,n-j) \tag{6.11}$$

עבור $(m,n) \in [\hat{I}_a \cap I_d]$, I_d התחום שבו מוגדר $d(i,j)$ כלומר

$$I_d = \left[(m,n): \ 0 \leq m \leq M_d \ , \ 0 \leq n \leq N_d \right] \tag{6.12}$$

כדי שנוכל לרשום את הנוסחה (6.11) כשוויון, נגדיר את השגיאה $e(m,n)$, ונוסיפה לצד הימני של המשוואה.

$$d(m,n) = e(m,n) - \sum_{\substack{i=0 \\ 0=i\neq j=0}}^{M_b} \sum_{j=0}^{N_b} b(i,j)\, d(m-i,n-j) \qquad (m,n) \in [\hat{I}_a \cap I_d] \tag{6.13}$$

לאחר סידור המשוואה נקבל

$$(m,n) \in [\hat{I}_a \cap I_d] \qquad e(m,n) = \sum_{i=0}^{M_b} \sum_{j=0}^{N_b} b(i,j)\, d(m-i,n-j) \tag{6.14}$$

אנו מעוניינים שסכום ריבועי השגיאות יהיה מינימלי. סכום ריבועי השגיאות נתון ע"י

$$e^2 = \sum_m \sum_n \left[\sum_{i=0}^{M_b} \sum_{j=0}^{N_b} d(m-i,n-j)\, b(i,j) \right]^2 \tag{6.15}$$

$$(m,n) \in [\hat{I}_a \cap I_d]$$

על מנת לקבל את המינימום של e^2 נגדור את (6.15) לפי $b(i,j)$ ונשווה לאפס. מאחר והנחנו $b(0,0)=1$ יהיו לנו $(M_b+1)\cdot(N_b+1)-1$ משואות עם אותו מספר נעלמים.

המשואות שיתקבלו יהיו מהצורה

$$\sum_{i=0}^{M_b}\sum_{j=0}^{N_b} b(i,j)\cdot\Phi(k,l,i,j)=\Phi(k,l)$$

$$0=i\neq j=0$$

$$k=0.1.2.\ldots\ldots M_b$$

$$l=0.1.2.\ldots\ldots N_b$$

$$0=k\neq l=0 \tag{6.16}$$

$$\Phi(k,l,i,j)\triangleq\sum_m\sum_n d(m-i,n-j)\,d(m-k,n-l)$$

$$\Phi(k,l)\triangleq\sum_m\sum_n d(m,n)\,d(m-k,n-l)$$

$$(m,n)\in[\hat{I}_a\cap I_d]$$

פתרון משואות אלו יתן לנו את $b(i,j)$, שעבורם e^2 מקבל את ערכו המינימלי.

עתה נותר לנו לחשב את $a(i,j)$ עבור $(i,j)\in I_a$. דרך אחת לעשות זאת היא בעזרת מסנן WIENER הדיסקרטי, כלומר עלינו למצוא מסנן אופטימלי $A(z_1,z_2)$ כך שעבור הכניסה $1/B(z_1,z_2)$ תהיה יציאת המסנן קרובה עד כמה שאפשר לתגובה דגם היחידה הרצוי $D(z_1,z_2)$.

שיטה פשוטה יותר לקבל את המערך $a(i,j)$ היא באמצעות הנוסחה $A(z_1 z_2)=B(z_1,z_2)\cdot D(z_1,z_2)$ עבור $(i,j)\in I_a$.

אם המקדמים $b(i\ j)$ חושבו נכון, יהיו המקדמים של $B(z_1,z_2)\cdot D(z_1,z_2)$ קרובים מאוד לאפס עבור $(i,j)\in\hat{I}_a$.

כדי לבדוק שיטה זו לחישוב מסנן רקורסיבי דו ממדי, בעל תגובה לדגם יחידה נתונה. נכתבה תוכנית מחשב המופיעה בנספח 1.

כתגובה לדגם יחידה, בחרנו בתגובה של מסנן ידוע $H^*(z_1,z_2) = A^*(z_1,z_2)/B^*(z_1,z_2)$
אם התוכנית עובדת כראוי המסנן המחושב על ידה צריך להיות זהה ל- $H(z_1,z_2)$
או קרוב מאוד אליו.

כאשר התגובה לדגם יחידה הרצויה היתה בגודל (6×6) התקבלו התוצאות המסוכמות בטבלה מטה .

אינדקס האיבר	A*	A (מחושב)	B*	B (מחושב)
(1.1)	1.0	1.0000000	1.0	1.0
(1.2)	2.0	2.0000020	-1.50	-1.4999980
(1.3)	-1.0	-0.9999957	0.60	0.5999972
(2.1)	3.0	2.9999913	-1.20	-1.2000087
(2.2)	4.0	3.9999888	1.80	1.8000106
(2.3)	2.0	2.0000175	-0.72	-0.7200020
(3.1)	2.0	1.9999745	0.50	0.5000109
(3.2)	-1.0	-1.0000295	-0.75	-0.7500153
(3.3)	1.0	0.9999807	0.29	0.2900053

מהטבלה רואים שהמערכים B ו- A זהים כמעט למערכים * B ו- *A כאשר התגובה להלם יחידה הרצויה היתה בגודל (10×10), מקדמי המסנן המחושב הזדהו עם מקדמי המסנן המקורי. יש לציין שהתוצאות שהתקבלו כאן טובות יותר מן התוצאות שהושגו במאמר [4] . הדבר נובע כנראה, בגלל השימוש במחשבים שונים, ובסברוטינות שונות לפתירת h משוואת עם h נעלמים.

השימוש בתוכנית המחשב למציאת מסנן המקרב תגובה לדגם יחידה נתונה, אינו מבטיח שהמסנן המחושב יהיה יציב.

כדי להוכח בטענה זו, הרצתי תוכנית כאשר התגובה לדגם יחידה הרצויה היתה של מסנן בלתי יציב. המסנן שחושב היה זהה למסנן המקורי. בבעיות מימוש מעשיות, התגובה לדגם יחידה הרצויה מתרסנת עבור m,n גבוהים, ולכן אם נתכנן את המסנן נכון הוא יהיה מסנן יציב.

בדוגמא שלנו הקרוב הוא טוב היות וידענו את דרגות *A ו-*B וקבענו בהתאם את דרגות A ו-B . ברוב המקרים נתונה התגובה לדגם יחידה ועלינו לבחור את דרגות A ו-B. ברור שככל שדרגות אילו גבוהות יותר, יש לנו יותר דרגות חופש, לכן נוכל לשחזר ביתר דיוק את התגובה לדגם יחידה הרצויה.

למרות עובדה זו לא נוכל להגדיל את דרגות A ו-B כרצונינו משתי סיבות. האחת ככל שדרגות A ו-B יהיו גבוהות יותר המימוש יהיה מסובך יותר, והשניה ככל שהדרגות של A ו-B יהיו גבוהות יותר, מספר הנעלמים יעלה, (מספר הנעלמים עולה ביחס ישר לריבוע הדרגה של המערך). וזמן המחשב הדרוש לפתרון המשואות יעלה בצורה תלולה.

7. תכנון מסננים רקורסיביים דו ממדיים במישור התדר.

עבודה רבה הושקעה בפתוח שיטות לתכנון מסננים רקורסבים חד ממדיים, לעומת זאת, קימות מעט מאוד שיטות לתכנון מסננים רקורסיביים דו מימדיים בתחום התדר. יתרה מזאת לשיטות הקימות מגבלות רבות.

המקרה הפשוט ביותר של תכנון מסנן רקורסיבי דו-ממדי הוא כאשר אפשר לרשום את התמרת z הדו ממדית של המסנן הרצוי, כמכפלת שני התמרות z חד ממדיות, כלומר

$$H(z_1,z_2) = H_1(z_1)\cdot H_2(z_2) \tag{7.1}$$

$H(z_1)$ ו- $H(z_2)$ נתנות למימוש בעזרת השיטות לתכנון מסנן רקורסיבי חד ממדי.

המקרים בהם נתן לפרק את התמרת z הדו מימדית למכפלת שני התמרות z חד ממדיות הם נדירים ולכן עלינו לפתח שיטות לתכנון מסננים רקורסיבים דו ממדיים במישור התדר.

בפרק זה נעמוד על שלוש שיטות לתכנון מסננים רקורסיבים דו ממדיים. שיטה אחת נסקור בהרחבה בצרוף דוגמאות.

7.1 תכנון מסננים רקורסיביים דו ממדיים ע"י הזזת צירי התדר.

נניח שנתון מסנן אנלוגי חד מימדי הנתון לפי הנוסחה

$$H_1(s) = H_0\left[\prod_{i=1}^{m}(s-q_i) \Big/ \prod_{i=1}^{n}(s-p_i)\right] \tag{7.2}$$

כאשר $s=jw$ אפשר להסתכל על המסנן החד ממדי כעל מסנן דו ממדי המשתנה רק בתדר אחד כלומר אפשר לכתוב את נוסחה (7.2) בצורה הבאה :

$$H_2(s_1,s_2) = H_1(s_2) = H_0\left[\prod_{i=1}^{m}(s_2-q_i) \Big/ \prod_{i=1}^{n}(s_2-p_i)\right] \tag{7.3}$$

אם נסובב את הצירים (s_1,s_2) בזוית θ נקבל את הצירים החדשים (s'_1,s'_2) הקשר בין הצירים הישנים והחדשים הוא

$$\begin{aligned} s_1 &= s'_1\cdot\cos\theta + s'_2\cdot\sin\theta \\ s_2 &= s'_2\cdot\cos\theta - s'_1\cdot\sin\theta \end{aligned} \tag{7.4}$$

נקבל מסנן חדש (7.5) שתגובת התדר שלו תהיה מוזזת בזוית Θ- ביחס לעקומת התדר של המסנן המתואר בנוסחה (7.3)

$$H'_2(s'_1,s'_2) = H_0 \frac{\prod_{i=1}^{m}\left[(s'_2\cos\Theta - s'_1\sin\Theta)-q_i\right]}{\prod_{i=1}^{n}\left[(s'_2\cos\Theta - s'_1\sin\Theta)-p_i\right]} \tag{7.5}$$

נוסחה (7.5) מתארת את המסנן הרצוף בקורדינטות החדשות (s'_1, s'_2) על מנת לקבל את המסנן הדיסקרטי הדו ממדי נשתמש בהעתקה הבילינארית הדיסקרטית המוגדרת ע"י הנוסחאות הבאות

$$s'_1 = \frac{2}{T}\,\frac{1-z_1}{1+z_1}$$
$$s'_2 = \frac{2}{T}\,\frac{1-z_2}{1+z_2} \tag{7.6}$$

הנחנו שהמרווח בין דגימה לדגימה זהה בשני הכוונים וגודלו T. ע"י הצבה של נוסחאות (7.6) לתוך נוסחה (7.5) נקבל את הביטוי הבא.

$$H(z_1,z_2) = A\cdot\prod_{i=1}^{M}\frac{a^i_{11}+a^i_{21}z_1+a^i_{12}z_2+a^i_{22}z_1z_2}{b^i_{11}+b^i_{21}z_1+b^i_{12}z_2+b^i_{22}z_1z_2} \tag{7.7}$$

כאשר

$$A = H_0\left(\tfrac{1}{2}T\right)^{n-m}$$

$$M = \max(m,n)$$

$$\left.\begin{aligned}
a^i_{11} &= \cos\Theta - \sin\Theta - \tfrac{1}{2}Tq_i\\
a^i_{21} &= \cos\Theta + \sin\Theta - \tfrac{1}{2}Tq_i\\
a^i_{12} &= -\cos\Theta - \sin\Theta - \tfrac{1}{2}Tq_i\\
a^i_{22} &= -\cos\Theta + \sin\Theta - \tfrac{1}{2}Tq_i
\end{aligned}\right| \quad 1 \leqslant i \leqslant m \quad \text{עבור} \tag{7.8}$$

$$a^i_{11} = a^i_{21} = a^i_{12} = a^i_{22} = 1 \qquad m < i < M \quad \text{עבור}$$

$$\left.\begin{aligned} b^i_{11} &= \cos\theta - \sin\theta - \tfrac{1}{2}Tq_i \\ b^i_{21} &= \cos\theta - \sin\theta - \tfrac{1}{2}Tq_i \\ b^i_{12} &= -\cos\theta - \sin\theta - \tfrac{1}{2}Tq_i \\ b^i_{22} &= -\cos\theta + \sin\theta - \tfrac{1}{2}Tq_i \end{aligned}\right| \quad 1 \leqslant i \leqslant n \quad \text{עבור} \qquad (7.8)$$

$$b^i_{11} = b^i_{21} = b^i_{12} = b^i_{22} = 1 \qquad n \leqslant i \leqslant M \quad \text{עבור}$$

אפשר להסתכל על נוסחה (7.7) כעל שורה של מסננים המחוברים בטור. (במידה ואחד הביטויים מכיל שורש קומפלכסי , מכפילים אותו בביטוי המכיל את השורש הצמוד ומקבלים ביטוי ממשי).

עלינו לזכור שהקשר בין תדירות הקטעון של המסנן האנלוגי f_A ובין תדירות הקטעון של המסנן הדיגיטלי f_D נתון ע"י הנוסחה.

$$f_A = \frac{1}{\pi T}\tan(\pi \cdot f_D \cdot T) \qquad (7.9)$$

ולכן אם אנו מעוניינים ב- f_D תדירות קטעון מסוימת עלינו לצאת ממסנן אנלוגי שתדר הקטעון שלו f_A נתון לפי הנוסחה (7.9).

נתבונן כדוגמא במסנן האנלוגי $F(s_1,s_2) = 1/(s_2+a)$. ע"י שימוש בנוסחה (7.7) מקבלים את $F(z_1,z_2)$. אם נניח $a = 2\pi f_c f_N$, f_c תדירות הקטעון יחסית לתדירות ניקויסט כאשר $f_N = \frac{1}{2T}$

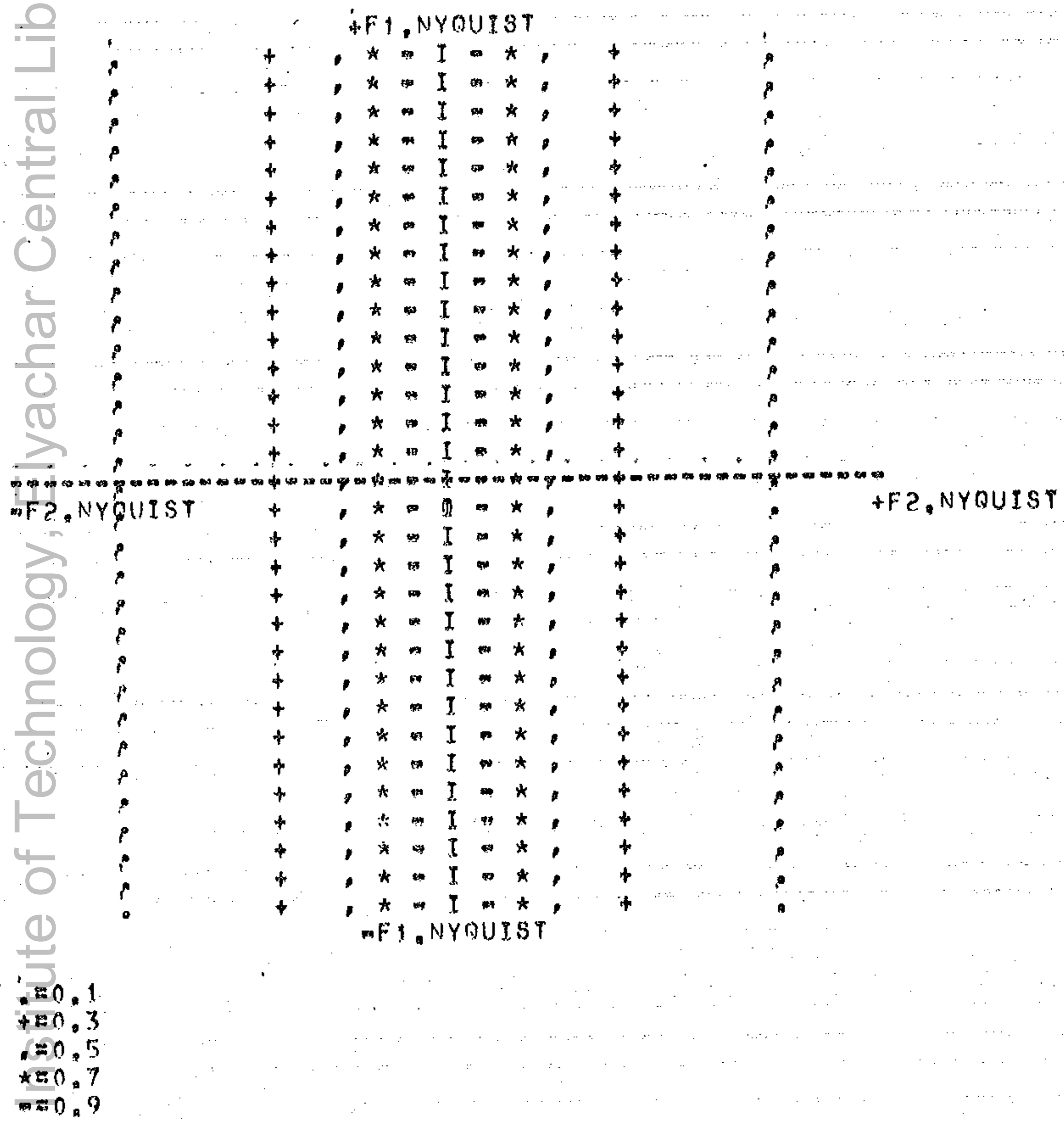
עבור $f_c = 0.15$ $\theta = 0^\circ$ מקבלים

$$F(z_1,z_2) = \frac{T^2}{2}\,\frac{1+z_2}{1-0.6186\cdot z_2}$$

בציור (7.1) רואים את האמפליטודת עקום הענות התדר של המסנן, כאשר השיא של האמפליטודה מנורמל ל - 1.0. מכיון ש- $\theta = 0^\circ$ תגובת המסנן אינה משתנה לאורך הציר F1. לאורך הציר F2 מתנהג העקום בעקום של מסנן מעביר נמוכים.

אם נניח עבור אותו מסנן אנלוגי $f_c = 0.15$, $\theta = 15^\circ$ נקבל את המסנן

$$F(z_1,z_2) = \frac{T^2}{2}\,\frac{(1+z_1)\cdot(1+z_2)}{1-0.3229\cdot z_2+0.6455\cdot z_1-0.6773\cdot z_2 z_1}$$



__ציור 7.1__ אמפליטודת עקום הענות התדר של המסנן הדו ממדי

$$F(z_1,z_2) = \frac{1+z_2}{1-0.6186\,z_2}$$

__FIG 7.1__ TWO DIMENSIONAL AMPLITUDE RESPONSE OF THE FILTER

$$F(z_1,z_2) = \frac{1+z_2}{1-0.6186\,z_2}$$

מסנן זה נראה בציור (7.2). רואים שהקוים שווי האמפליטודה שוב אינם קוים ישרים הם מתעותים במיוחד עבור (f_1, f_2) גבוהים.

אם נתבונן בביטוי של המסנן נראה שבמונהו הביטוי $(1+z_1)\cdot(1+z_2)$. הביטוי $(1+z_1)$ מתאפס עבור התדר $f_1 = f_{N1}$ והביטוי $F(z_1,z_2)$ מתאפס עבור התדר $f_2 = f_{N2}$ לכן המסנן $F(z_1,z_2)$ מתאפס גם הוא עבור תדרים אלו.

אם נסובב את המסנן ב- $\Theta = 45^\circ$ נקבל את המסנן

$$F(z_1,z_2) = \frac{(1+z_1)(1+z_2)}{1 + 0.1428 \cdot z_2 + 0.1428 \cdot z_2 - 0.7144 z_1 z_2}$$

עקום העבות התדר של מסנן זה נראה בציור (7.3).

אנו יכולים לסובב גם מסנן מעביר סרט. במקרה שלנו המסנן האנלוגי לקוח ממאמר [32] עמ' 37-41. המסנן הוא מסוג BUTTERWORTH בעל 8 קטבים. הקטבים הם :

$$s_{1,2} = -66.93 \mp 194.61 \cdot j$$
$$s_{3,4} = -50.24 \mp 146.08 \cdot j$$
$$s_{5,6} = -31.90 \mp 244.85 \cdot j$$
$$s_{7,8} = -16.63 \mp 127.67 \cdot j$$

המרווח בין הדגימות שבו בחרתי הוא $5 \cdot 10^{-3}$ יחידות. עקום העבות התדר של המסנן נראה בציור (7.4). מסנן המוזז ב- -45° נראה בציור (7.5).

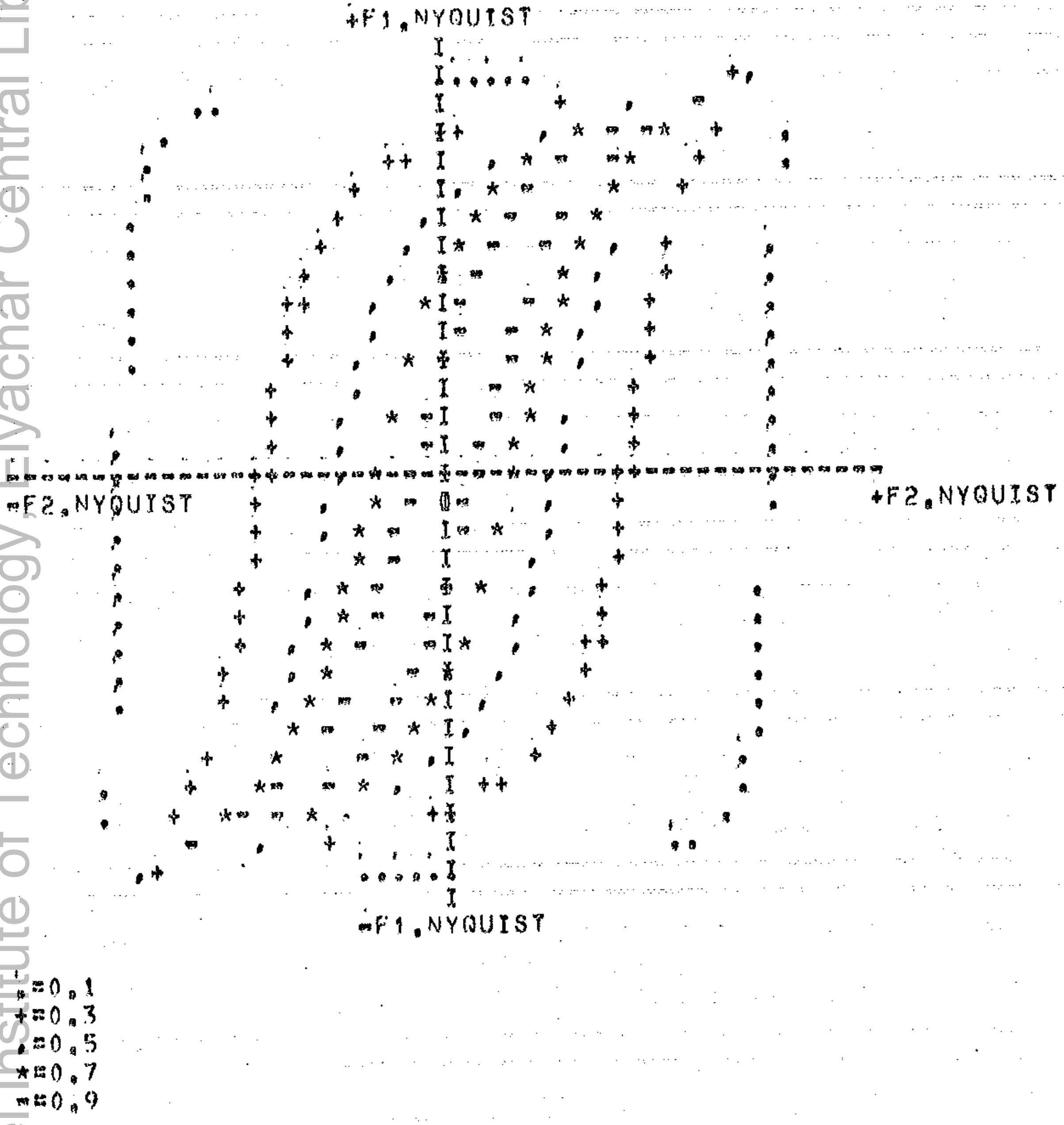
אפשר לקבל מסננים דו ממדיים ע"י קומבינציות שונות של מסננים. אביא כאן מספר דוגמאות. כל הדוגמאות מבוססות על המסנן מעביר נמוכים המשורטט בציור (7.1), ומסנן מעביר פס המשורטט בציור (7.4).

ציור (7.6) מראה חיבור בטור של שני מסננים מעבירי נמוכים האחד הוא סיבוב ב- 45° של המסנן היסודי. והשני סיבוב ב - 135° של המסנן היסודי.

ציור (7.7) מראה חיבור בטור של מסנן מעביר פס (ציור 4.2) עם מסנן מעביר נמוכים מסובב ב- 90°.

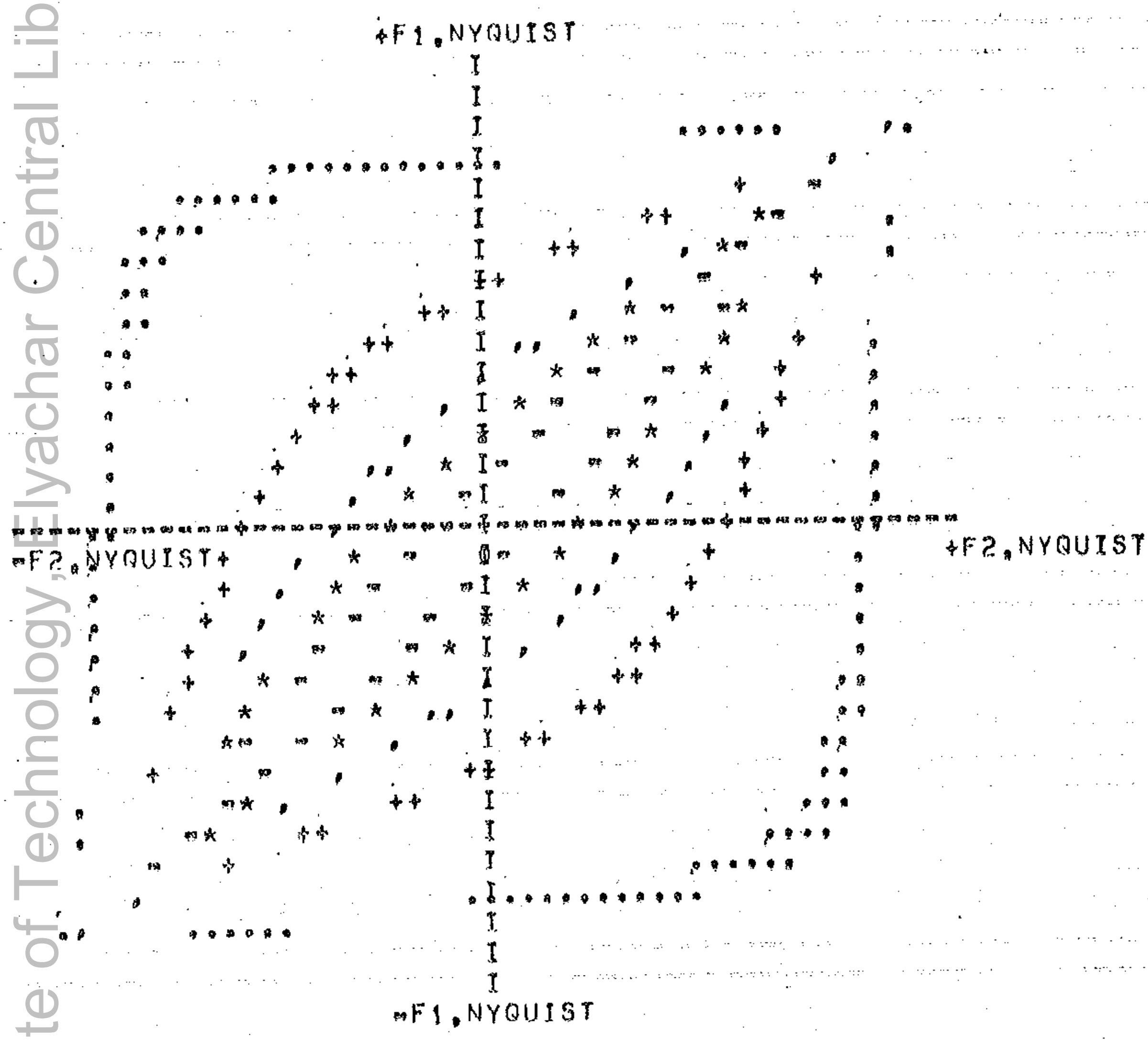
ציור (7.8) מראה חיבור בטור של מסנן מעביר פס מסובב ב- 45° עם מסנן מעביר פס מסובב ב- -45°.

ציור (7.9) מראה חיבור בטור של מסנן מעביר פס שאינו מסובב עם מסנן מעביר פס המסובב ב- 90°.



ציור 7.2 אמפליטודת עקום הענות התדר של המסנן מעביר נמוכים
$F(z_1 z_2)$ מסובב ב- 15°

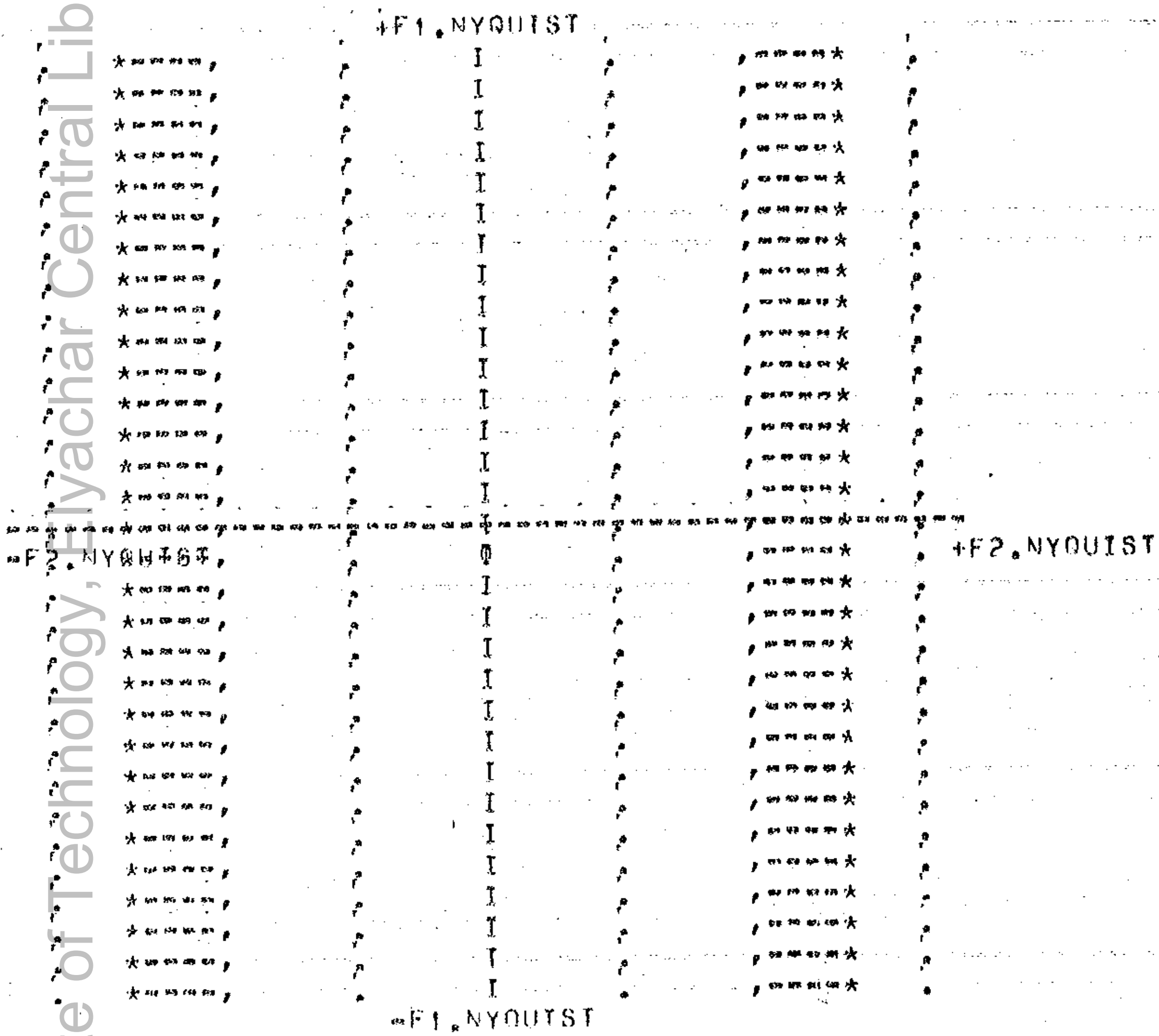
IFIG 7.2 AMPLITUDE RESPONSE OF LOW-PASS FILTER $F(z_1,z_2)$
ROTATED 15°.



.=0.1
+=0.3
,=0.5
*=0.7
-=0.9

ציור 7.3 אמפליטודת עקום הענות התדר של המסנן מעביר נמוכים $F(z_1,z_2)$ מסובב ב- 45^o.

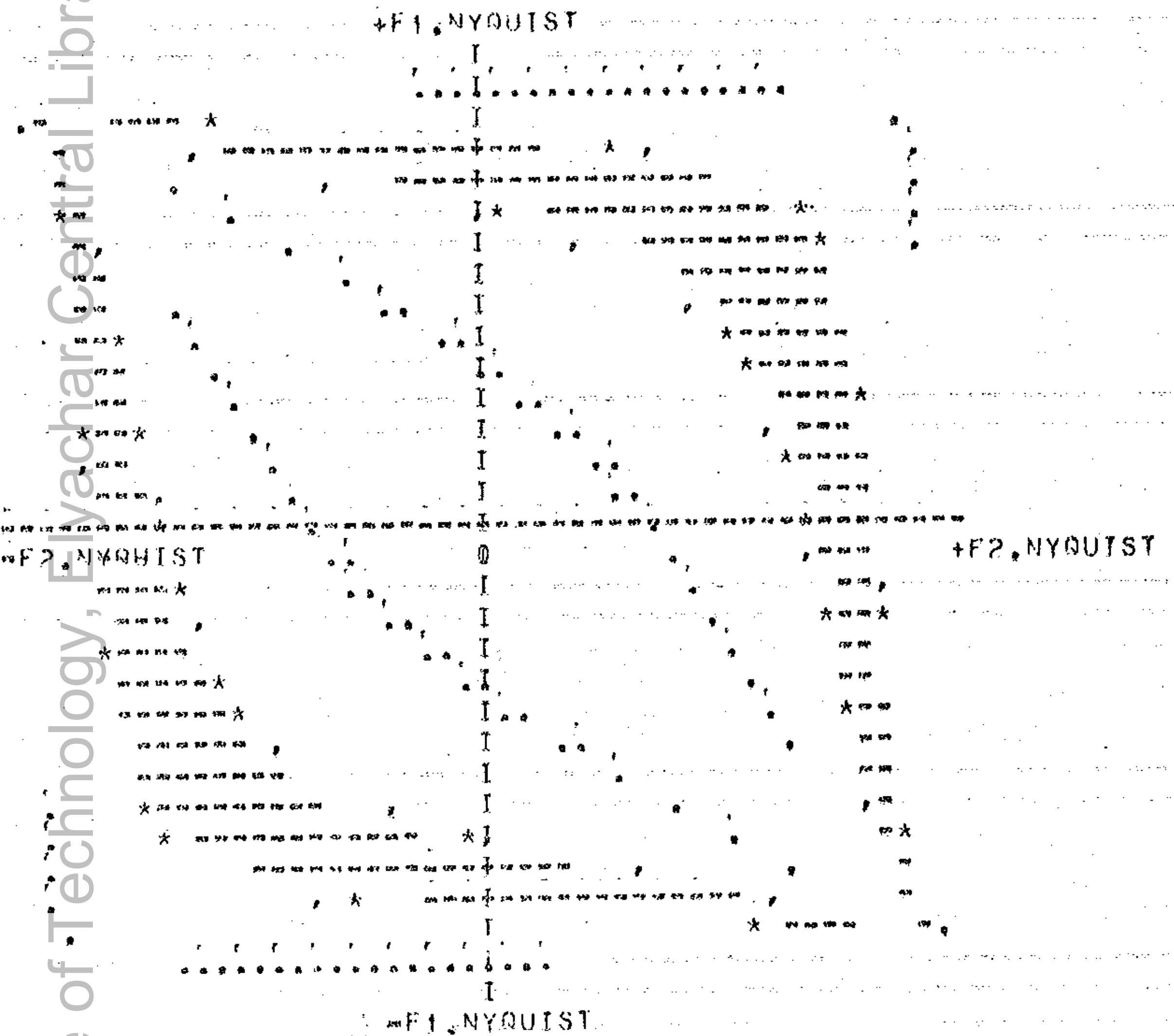
FIG 7.3 AMPLITUDE RESPONSE OF LOW PASS FILTER $F(z_1,z_2)$ ROTATED 45^o.



.=0.001
,=0.53
*=0.7
-=1.0

ציור 7.4 אמפליטודת עקום ההעבות של מסנן מעביר סרט

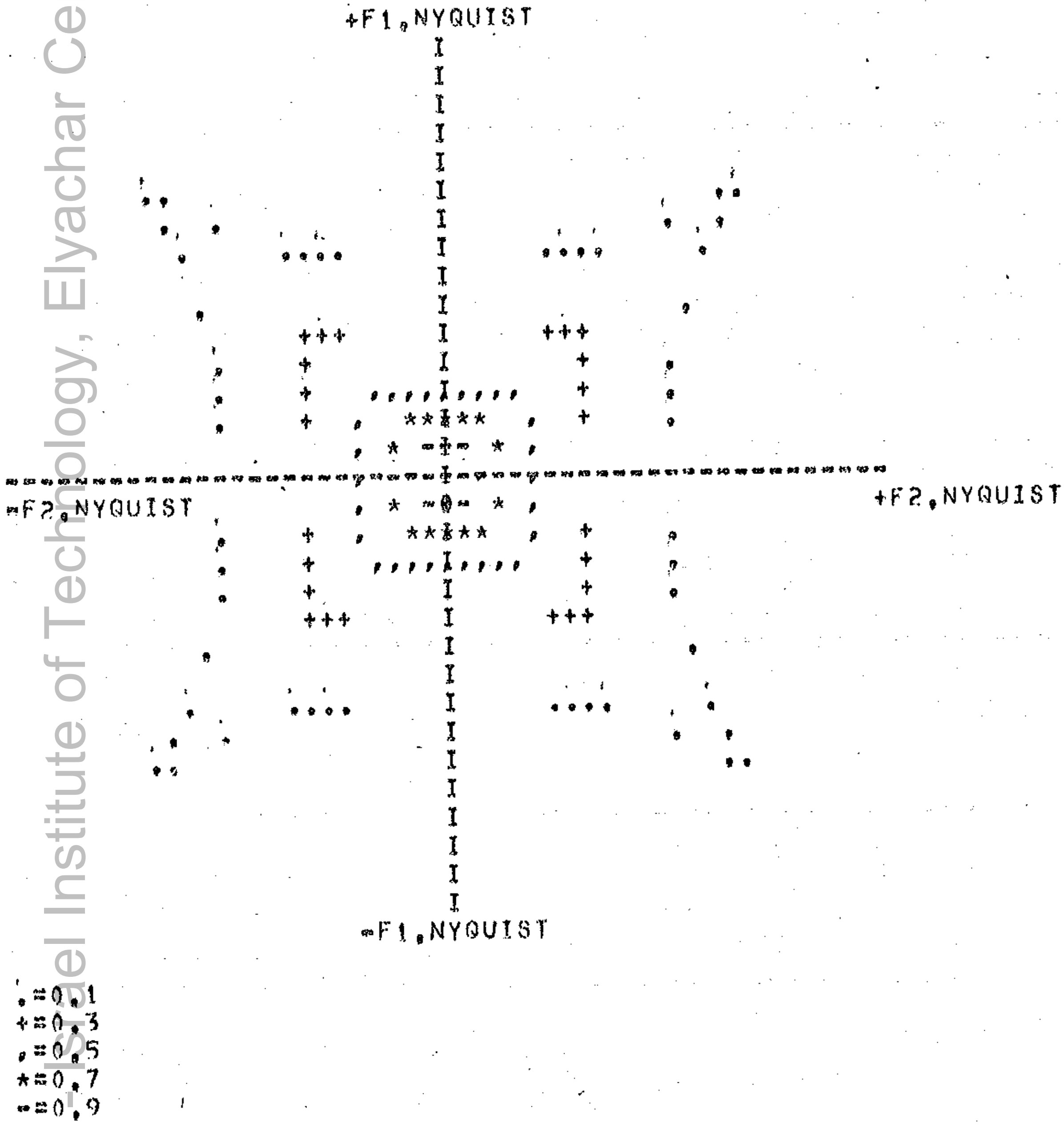
FIG 7.4 AMPLITUDE RESPONSE OF BANDPASS FILTER



'.=0.001
,=0.53
*=0.7
-=1.0

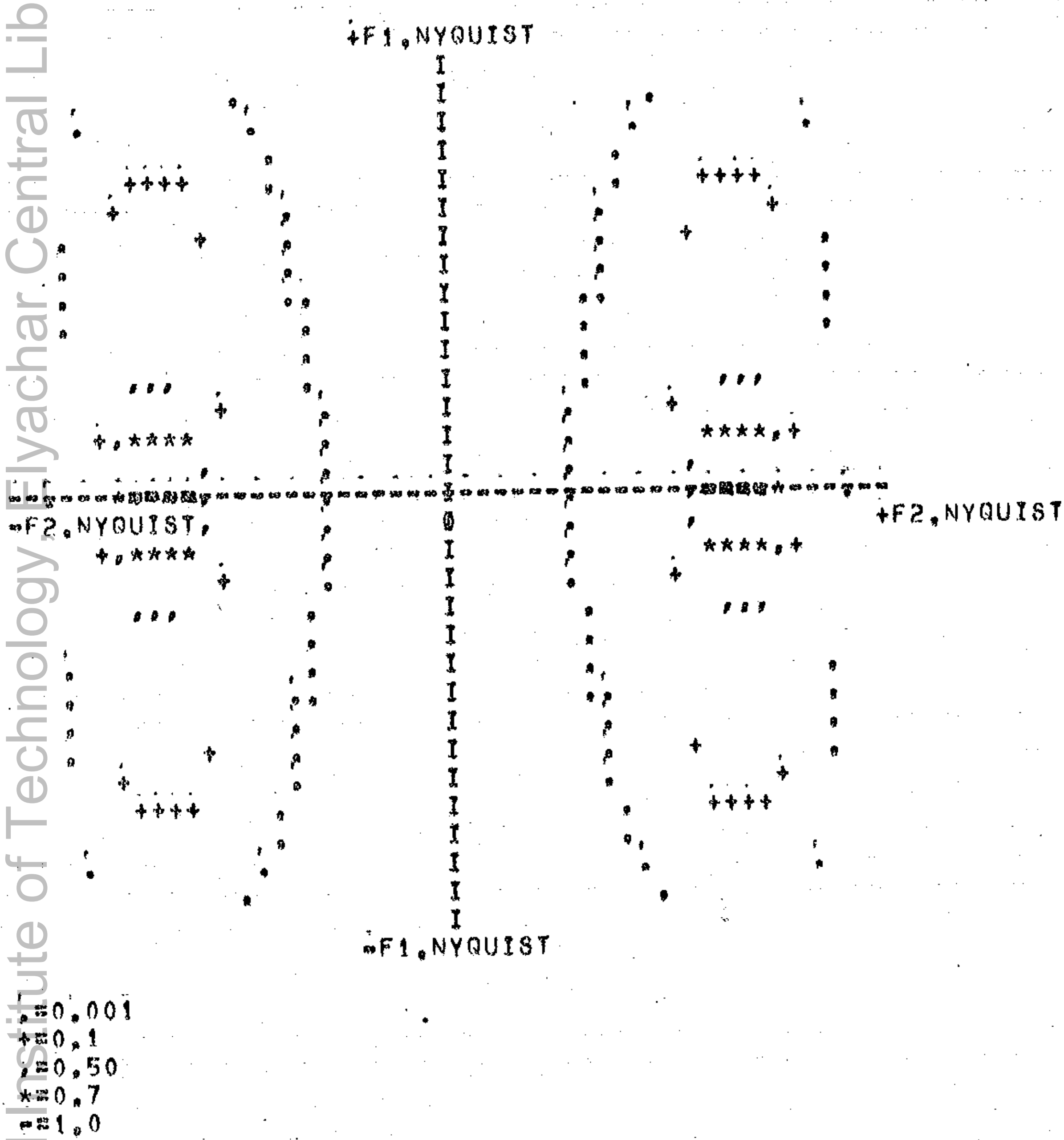
ציור 7.5 אמפליטודת עקום ההענות של מסנן מעביר פס $\Theta = -45°$

FIG 7.5 AMPLITUDE RESPONSE OF BANDPASS FILTER ROTATED BY $\Theta = -45°$



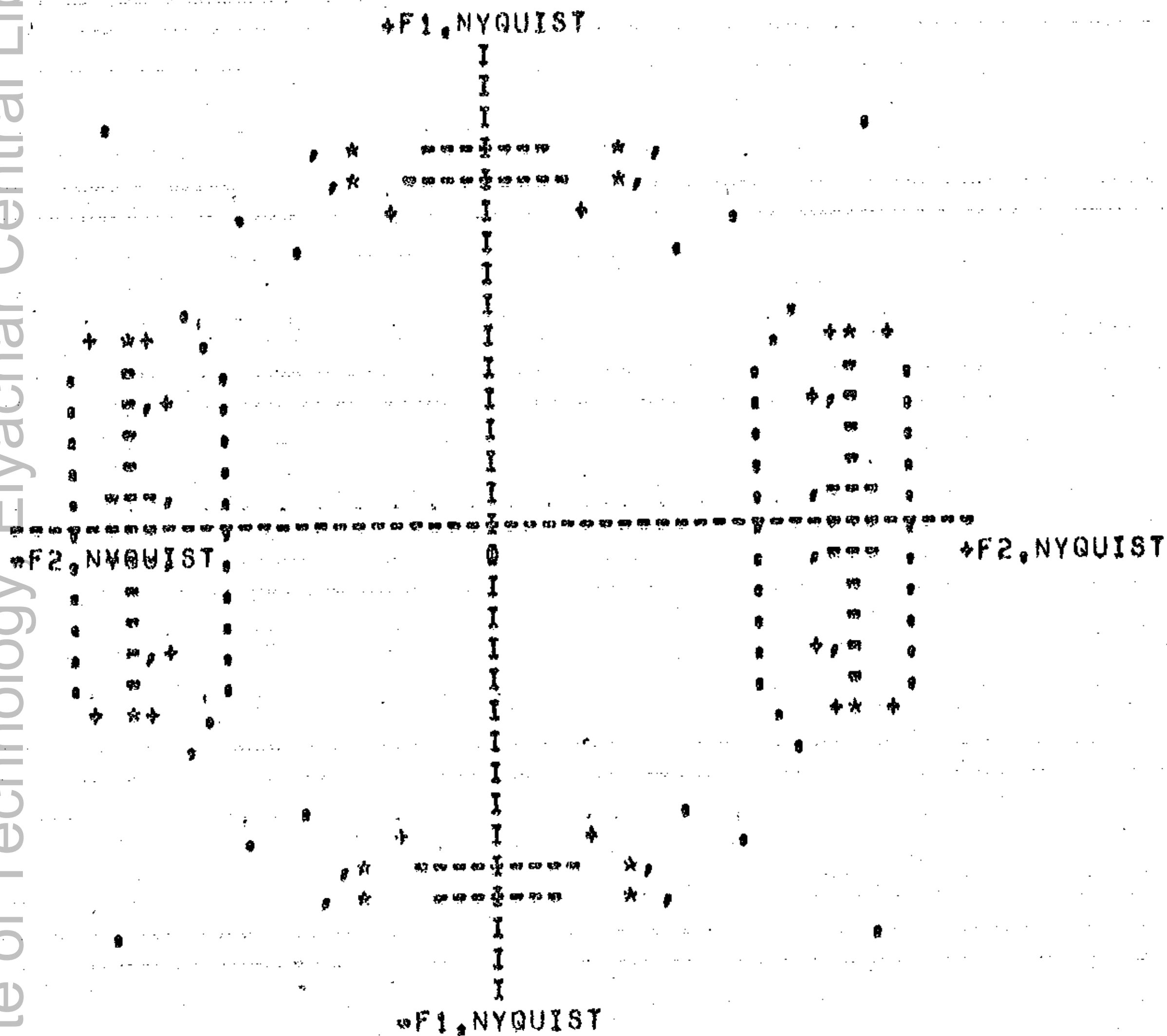
ציור 7.6 חיבור שני מסננים מעבירי נמוכים בטור האחד מוזז ב- 45° והשני ב- 135°.

FIG 7.6 CASCADE OF TWO LOW-PASS FILTERS ROTATED BY 45° AND 135°.



ציור 7.7 חיבור בטור של מסנן מעביר פס, עם מסנן מעביר נמוכים מסובב ב - 90°.

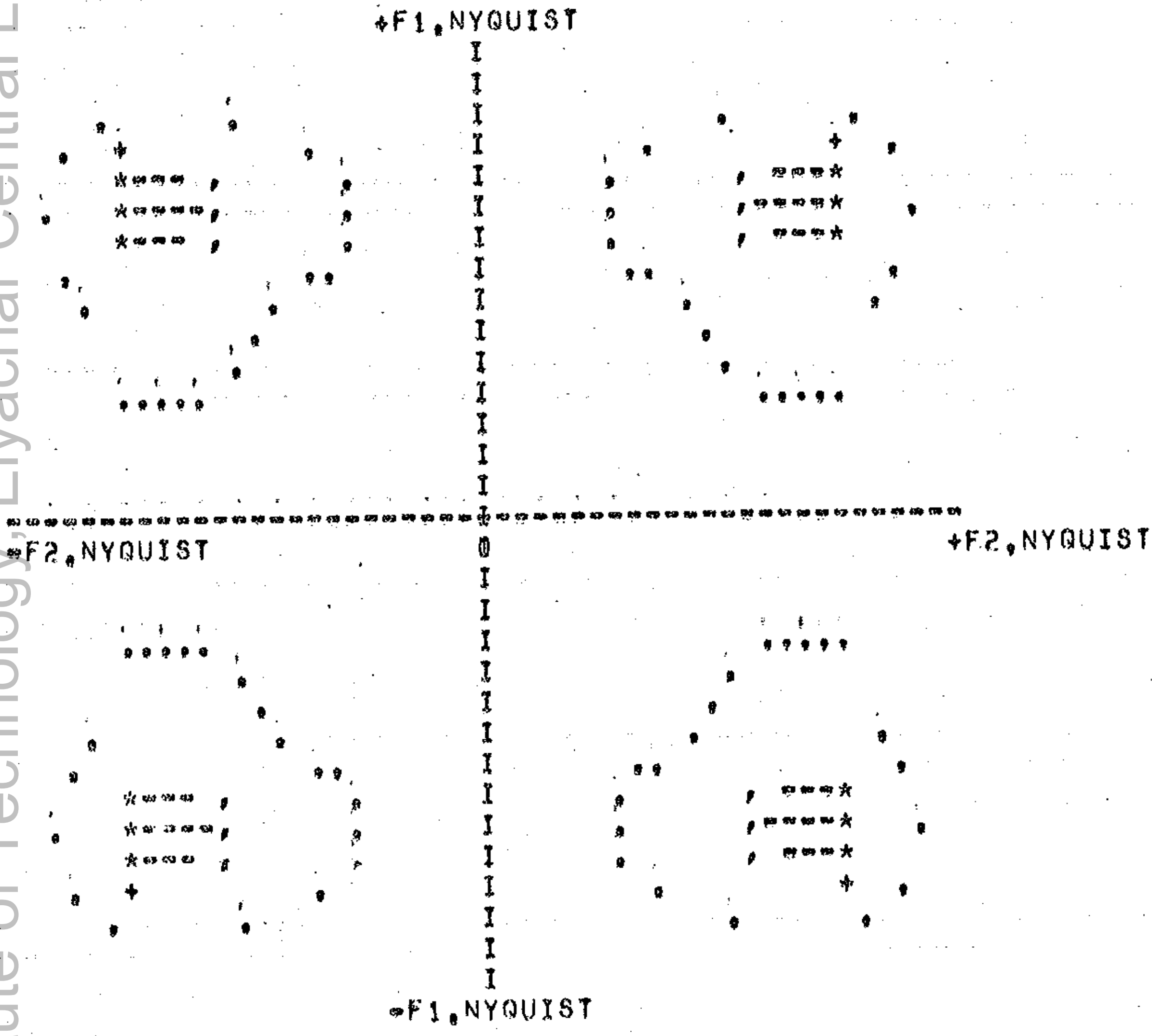
FIG. 7.7 CASCADE OF BANDPASS FILTER WITH LOW-PASS ROTATED BY 90°.



,=0.001
+=0.1
,=0.50
*=0.7
-=1.0

ציור 7.8 חיבור בטור של מסנן מעביר פס מסובב ב- 45°
עם מסנן מעביר פס מסובב ב- -45°.

FIG. 7.8 CASCADE OF TWO BANDPASS FILTERS ROTATED BY 45° AND -45°.



.=0.001
+=0.1
,=0.50
*=0.7
-=1.0

ציור 7.9 חיבור בטור של מסנן מעביר פס שאינו מסובב עם מסנן מעביר פס מסובב ב - 90^{o}.

FIG 7.9 CASCADE OF TWO BANDPASS FILTERS ROTATED BY 0^{o} AND 90^{o}.

במקרים רבים המסנן הדו ממדי שאנו זקוקים לו יהיה בעל סמטריה מעגלית מסנן מעביר נמוכים בעל סימטריה מעגלית, אפשר לקבל ע"י חיבור טורי של מספר מסננים מעבירי נמוכים המסובבים בצורה סימטרית. חיבור של m - מסננים מעבירי נמוכים המסובבים בצורה סימטרית יתן לנו מסנן שצורתו מצולע משוכלל בעל 2m צלעות. ככל ש- m יהיה גבוה יותר המצולע יקרב טוב יותר מעגל.

כדי להדגים זאת בחרתי במסנן מעביר הנמוכים מסדר ראשון המופיע בציור (7.1). (ברור שמסננים מסדר גבוה יותר יתנו תוצאות טובות יותר).

בציור (7.10) רואים חיבור טורי של מסנן מעביר נמוכים שאינו מסובב עם מסנן מעביר נמוכים המסובב ב- 90°. התוצאה היא מסנן שצורתו ריבוע.

חיבור ארבעה מסננים מעבירי נמוכים המסובבים בצורה סימטרית נראה בציור (7.11). כאן מקבלים מצולע בין שמונה צלעות. מסנן זה מקרב כבר די יפה מסנן בעל סימטריה מעגלית.

קרוב טוב יותר למעגל נראה בציור (7.12) כאן חוברו בטור ששה מסננים מעבירי נמוכים המסובבים בצורה סימטרית.

קימים מספר פרמטרים שבתן לשלוט עליהם בתכנון מסננים מעבירי נמוכים בעלי סמטריה מעגלית. שני הפרמטרים החשובים הם: תדירות הקטעון, ותלילות ירידת המסנן באיזור המעבר. תדירות הקטעון מושפעת בעיקר מבחירת תדירות הקטעון של המסנן האנלוגי שממנו אנו יוצאים, וממספר המסננים המחוברים בטור.

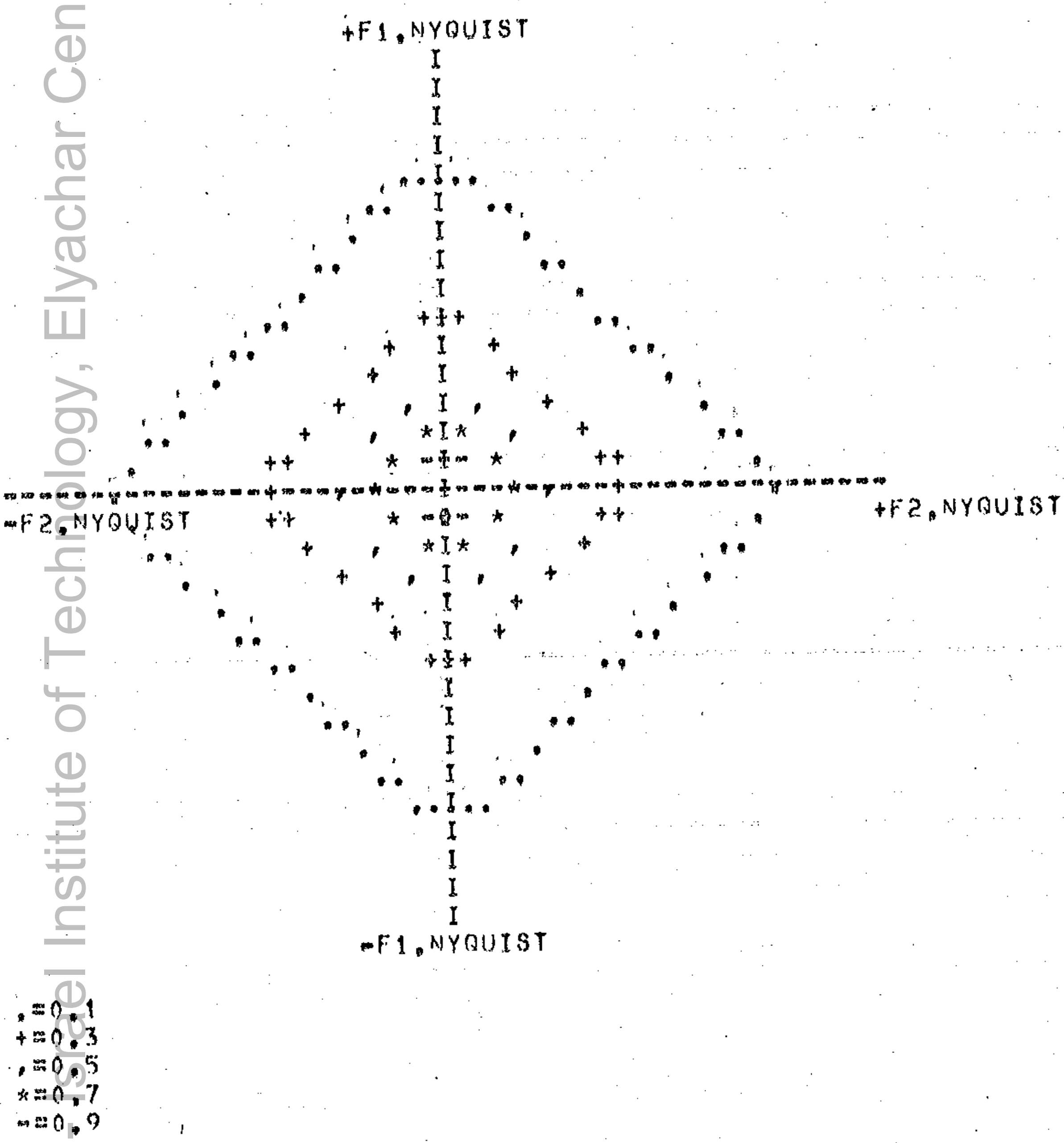
ברור שככל שמספר המסננים המחוברים בטור יהיה גדול יותר תדירות הקטעון תהיה נמוכה יותר (השווה ציור (7.11) לציור(7.12)).

תלילות ירידת המסנן באיזור המעבר, תלויה במספר הקטבים, בסוגו של המסנן האנלוגי ממנו אנו יוצאים, ובמספר המסננים המסובבים סימטרית, המרכיבים את המסנן.

ברור שככל שהמסנן האנלוגי חד יותר באיזור המעבר, כן תהיה תלילות הירידה באיזור המעבר של המסנן הסיפרתי הדו ממדי חדה יותר.

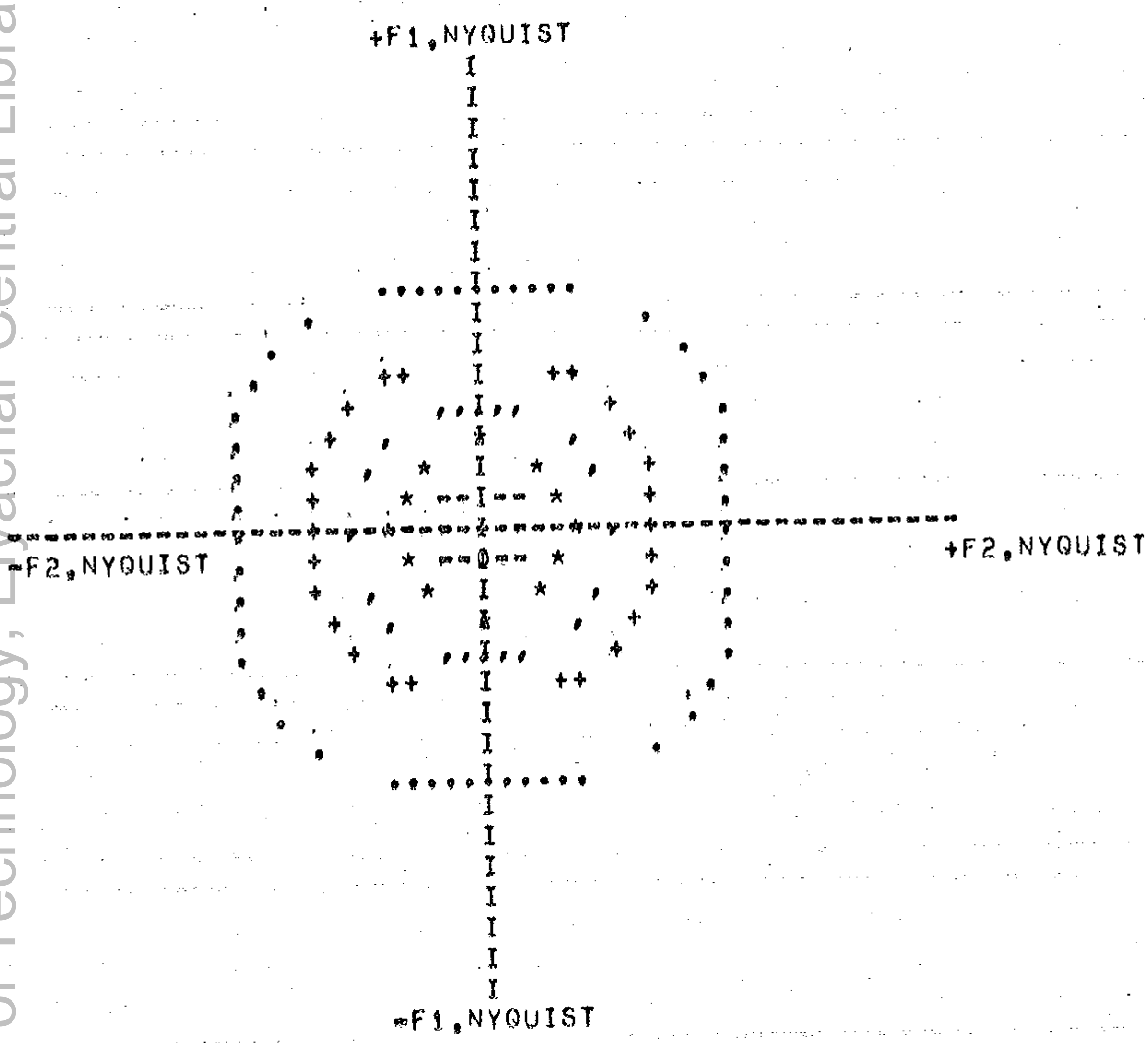
כמו כן ברור שככל שנשתמש לבנית המסנן הספרתי הדו-ממדי, במספר רב יותר של מסננים המסובבים סימטרית, תהיה תלילות הירידה באיזור המעבר גדולה יותר.

דיון מקיף יותר בנושא מסננים ספרתיים דו ממדיים בעלי סימטריה מעגלית אפשר למצוא במאמר [11] .



ציור 7.10 חיבור טורי של שני מסננים מעבירי נמוכים האחד מסובב ב- 90^{o} והשני אינו מסובב.

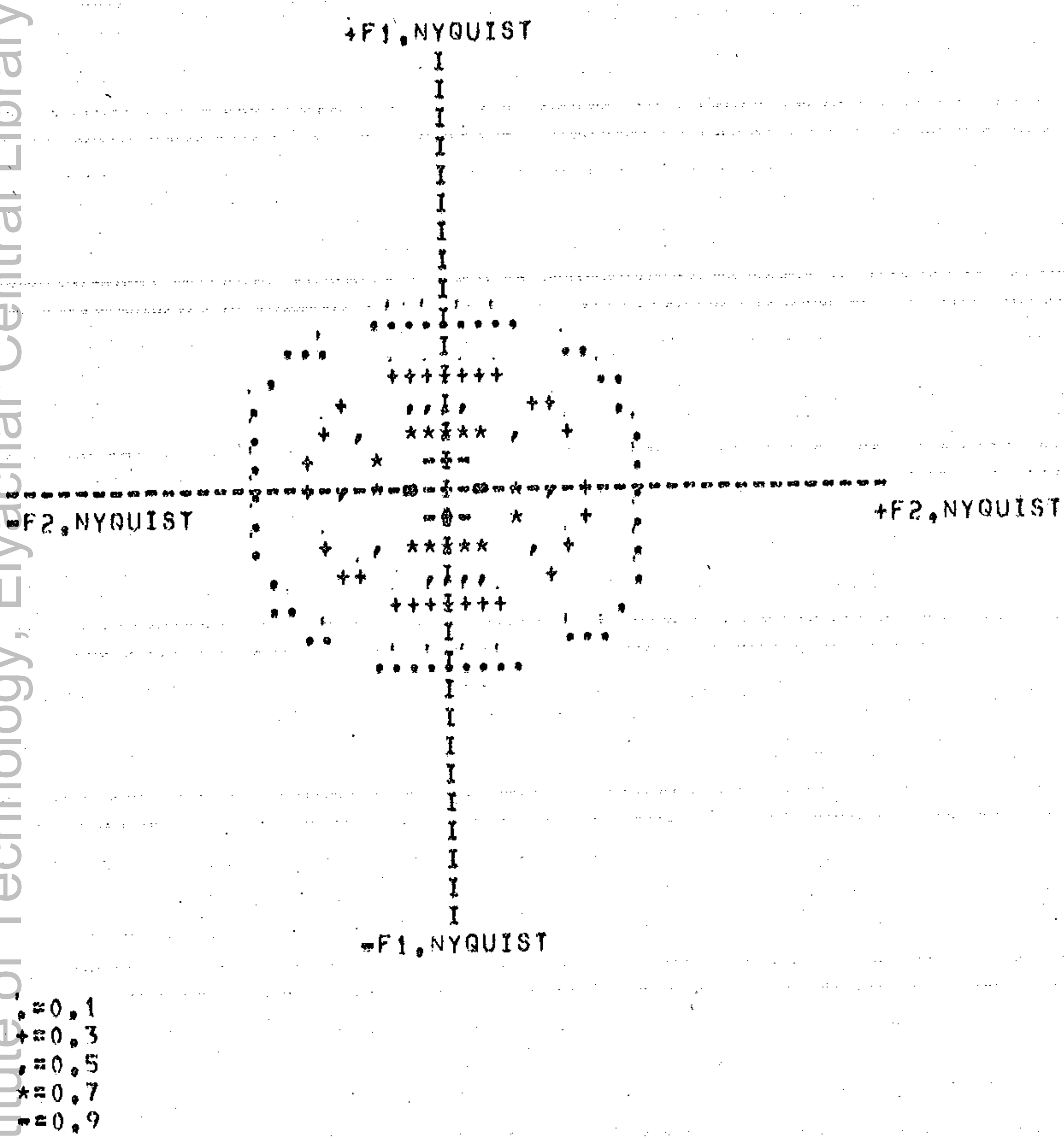
FIG. 7.10 CASCADE OF TWO LOW-PASS FILTERS ROTATED BY 90^{o} AND 0^{o}.



.=0.1
+=0.3
,=0.5
*=0.7
-=0.9

<u>ציור 7.11</u> חיבור טורי של ארבעה מסננים מעבירי נמוכים המסובבים בצורה סימטרית

<u>FIG - 7.11</u> CASCADE OF FOUR LOW-PASS FILTERS WHOSE ANGLES OF ROTATION ARE UNIFORMLY DISTRIBUTED OVER 180°.



ציור 7.12 חיבור טורי של ששה מסננים מעבירי נמוכים המסובבים בצורה סימטרית.

FIG 7.12 CASCADING OF SIX LOW PASS FILTERS WHOSE ANGLES OF ROTATION ARE UNIFORMLY DISTRIBUTED OVER 180°.

מעניין במיוחד המקרה בו הפזה מתאפסת עבור כל התדרים.
למסנן כזה התכונה, שתגובתו לדגם יחידה היא סימטרית יחסית לראשית עבור כל רדיוס.
נתבונן במסנן $G(z_1,z_2) = F(z_1,z_2)\cdot F(1/z_1\,,1/z_2)$

עבור $z_1 = e^{-jw_1}$, $z_2 = e^{-jw_2}$, המסנן $F(e^{-jw_1}, e^{-jw_2})$ והמסנן $F(e^{jw_1}, e^{jw_2})$ הם צמודים זה לזה. מסיבה זו יהיה המסנן $G(e^{jw_1}, e^{jw_2})$ ממשי.

$$G(e^{-jw_1}, e^{-jw_2}) = \left| F(e^{-jw_1}, e^{-jw_2})\right|^2$$

אפשר לקבל מסנן עם פזה אפס גם בצורה הבאה.

$$H(z_1,z_2) = F(z_1,z_2) + F(1/z_1\,,1/z_2)$$

המסנן $H(e^{-jw_1}, e^{-jw_2})$ נתון ע"י

$$H(e^{-jw_1} e^{-jw_2}) = 2\,\mathrm{Re}\left[F(e^{jw_1}, e^{jw_2})\right]$$

אם רוצים לקבל מסנן סימטרי סביב w1 בעל פזה אפס עבור כל תדר. אפשר לקבל את המסנן באחת משתי הצורות הבאות :

$$G_1(z_1,z_2) = F(z_1,z_2)\cdot F(1/z_1\,,z_2)$$

או

$$H_1(z_1,z_2) = F(z_1 z_2) + F(1/z_1, z_2)$$

המסננים הבאים סמטריים כלפי w1 ו-w2 והפזה שלהם מתאפסת.

$$G_2(z_1,z_2) = F(z_1,z_2)\cdot F(1/z_1\,,z_2)\cdot F(z_1,1/z_2)\cdot F(1/z_1,1/z_2)$$

$$H_2(z_1,z_2) = F(z_1,z_2) + F(1/z_1,z_2) + F(z_1,1/z_2) + F(1/z_1,1/z_2)$$

7.1.1 <u>יציבות של מסננים מסובבים.</u>

בכל הדוגמאות שהובאו בדפים הקודמים לא הוזכרה בעית היציבות. יהיה $F(z_1 z_2)$ מסנן רקורסיבי דו ממדי יציב. אין שום בטחון שהמסנן המתקבל ע"י סיבוב מסנן זה יהיה גם הוא יציב. יש לבדוק כל מקרה לגופו של ענין.

במאמר [11] מוכחת העובדה הבאה :
נתון מסנן חד ממדי אנלוגי יציב. נסובב מסנן זה בזוית θ במישור (s_1,s_2) , ונפעיל את העתקת Z הבילינארית הדו-ממדית. נקבל מסנן ספרתי דו-ממדי. מסנן זה יציב אם $270^\circ \leqslant \theta \leqslant 360^\circ$. במציאות ישנם מקרים שבהם יש צורך להשתמש במסננים המסובבים בזוויה אחרת מאשר $270^\circ \leqslant \theta \leqslant 360^\circ$. מסננים אילו אינם יציבים. ראינו שיטות אחדות ליצוב מסננים בלתי יציבים, אולם במקרה של מסננים מסובבים, אפשר ליצב את המערכת בשיטה שונה.
תגובת התדר של המסנן $R(1/z_2,z_1)$ מסובבת ב- 90° יחסית לתגובת התדר של $R(z_1,z_2)$. תגובת התדר של המסנן $R(1/z_1,1/z_2)$ מסובבת ב 180° מעלות יחסית לתגובת התדר של המסנן $R(z_1,z_2)$.
החלפה של z_2 ב- $1/z_2$ בביטוי $R(z_1,z_2)$ אקוולנטית להחלפת סדר העמודות במערך $r(i,j)$, החלפה בין z_2 ו- z_1 בביטוי $R(z_1,z_2)$ אקולנטית להחלפה בין השורות והעמודות במערך $r(i,j)$.
נביט במערך

כניסה   מסנן   יציאה

$$X(z_1,z_2) \longrightarrow H(z_1,z_2) \longrightarrow Y(z_1,z_2)$$

הקשר בין H,X,Y הוא

$$Y(z_1,z_2)=H(z_1,z_2)\cdot X(z_1,z_2)$$

נתבונן עתה בדוגמא הבאה :

כניסה   סבוב ב 90° מסנן   יציאת המסנן   סיבוב ב-90°-

$$X(z_1,z_2) \rightarrow X(z_2,1/z_1) \rightarrow H(z_1,z_2) \rightarrow H(z_1,z_2)\cdot X(z_2,1/z_1) \rightarrow H(z_2,1/z_1)\cdot X(z_1,z_2)$$

מדוגמא זו רואים שסיבוב ב-90° של מסנן נתון אקוולנטי לסיבוב המערך בכניסה למסנן הנתון ב-90° וסיבוב ב-90°- של המערך ביציאה מהמסנן. בשתמש בעובדה זו ליצוב מסנן שאינו יציב. נתבונן בדוגמא הבאה: מעונינים במסנן שמסובב ב-250°. כפי שראינו מסנן זה אינו יציב כדי להתגבר על בעיה זו נבצע את השלבים הבאים:

א. נבנה מסנן המסובב בזווית $90^\circ + 250^\circ = 340^\circ$. מסנן זה הוא יציב.
ב. נשנה את סדר השורות ונחליף בין העמודות והשורות של מערך הכניסה. פעולות אלו אקוולטיות לסיבוב ב-90° של מערך הכניסה.
ג. נבצע קונבולוציה.

ד. נשנה את סדר העמודות ביציאת המסנן בסדר ההפוך לזה שבוצע בסעיף ב', ונחליף בין השורות והעמודות ; יציאת המסנן תהיה זהה ליציאה שהיינו מקבלים, לו היינו מבצעים קונבולוציה בין מערך הכניסה כמו שהוא ובין מסנן המסובב 250°.

מסקנה: אם נתון מסנן מסובב בזוית $0^\circ < \theta < 270^\circ$ בונים מסנן מסובב בזוית $\varepsilon = \theta + k\cdot 90^\circ$ (K שלם) כך ש $270^\circ \leq \varepsilon \leq 360^\circ$. מסובבים את מערך הכניסה בזוית $-k\cdot 90^\circ$ ואת מערך היציאה בזוית $k\cdot 90^\circ$. המערך המתקבל ביציאה זהה לזה שהיה מתקבל לו היינו מכניסים את מערך הכניסה כמו שהוא, למסנן הבלתי יציב המסובב בזוית θ.

בשיטה המתוארת ייצבנו מסנן בלתי יציב בשיטה השונה מהשיטות המתוארות בפרק 6.

7.2 תכנון מסננים רקורסביים דו ממדיים ע"י דגימת תגובת התדר

תגובת התדר של מסנן עם תגובת דגם יחידה סופית נתון ע"י

$$H(e^{-jw_1}, e^{-jw_2}) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} h(m,n)\, e^{-j(w_1 m + w_2 n)}$$

את $h(m,n)$ נתן לבטא ע"י הביטוי

$$h(m,n) = \frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} H(k,l)\, e^{j2\pi(k\cdot m/M + n\cdot l/N)}$$

כאשר $H(k,l)$ הוא ה- D.F.T של $h(m,n)$ ע"י שלוב של שתי הנוסחאות אפשר לרשום

$$H(e^{-jw_1}, e^{-jw_2}) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{1}{MN}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} H(k,l)\, e^{j2\pi(k\cdot m/M + l\cdot n/N)}\, e^{-j(w_1 m + w_2 n)}\right]$$

אם נשנה את סדר הסיכום ונסכם על m,n נקבל את הביטוי הבא :

$$H(e^{-jw_1}, e^{-jw_2}) = \sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1} H(k,l)\cdot A(k,l,w_1,w_2) \tag{7.10}$$

$$A(k,l,w_1,w_2) = \frac{1}{M\cdot N}\cdot\frac{1 - e^{-jMw_1}}{1 - e^{j(2\pi k/M - w_1)}}\cdot\frac{1 - e^{-jNw_2}}{1 - e^{j(2\pi\cdot l/N - w_2)}} \tag{7.11}$$

ע"י ההצבה $z_1 = e^{-jw_1}$, $z_2 = e^{-jw_2}$.

נקבל

$$A(k,l,z_1,z_2) = \frac{1}{M\cdot N}\cdot\frac{1 - z_1^M}{1 - z_1 e^{j2\pi k/M}}\cdot\frac{1 - z_2^N}{1 - z_2 e^{j2\pi l/N}} \tag{7.12}$$

אם $h(m,n)$ ממשי (וזה המקרה שלנו) יתקיים השוויון $H(k,l)=H^*(M-k,l)$

$$H(k,l)=|H(k,l)|e^{j\theta(k,l)} \qquad \text{אם נרשום}$$

$$H(M-k,l)=|H(k,l)|e^{-j\theta(k,l)} \qquad \text{אזי} \tag{7.13}$$

נניח ש - l , k הם זוגיים (דיון דומה עבור k , l בלתי זוגיים). נסכם ראשית את k ונציב את נוסחאות (7.13) ב- (7.12) נקבל

$$H(z_1,z_2)=\frac{1}{M\cdot N}\sum_{l=0}^{N-1}\left[\frac{1-z_2^N}{1-z_2e^{j2\pi l/N}}\sum_{k=0}^{M-1}\frac{1-z_1^M}{1-z_1e^{j2\pi k/M}}\cdot H(k,l)\right]$$

$$=\frac{1}{2\cdot M\cdot N}\sum_{l=0}^{N-1}\left[\frac{1-z_2^N}{1-z_2e^{j2\pi l/N}}\cdot\sum_{k=0}^{M-1}\frac{H(k,l)(1-z_1^M)}{1-z_1e^{j2\pi k/M}}+\frac{H(M-k,l)(1-z_1^M)}{1-z_1e^{j2\pi(M-k)/M}}\right]$$

$$=\frac{1}{M\cdot N}\sum_{k=0}^{M-1}\sum_{l=0}^{N-1}Re(H(k,l))\cdot\frac{1-z_1^M-z_1\cos\frac{2\pi k}{M}-2z_1^{M+1}\cdot\cos\frac{2\pi k}{M}}{1+z_1^2-2z_1\cos\frac{2\pi k}{M}}\cdot$$

$$\cdot\frac{1-z_2^N-z_2\cos\frac{2\pi l}{N}-2z_2^{N+1}\cos\frac{2\pi l}{N}}{1+z_2^2-2z_2\cos\frac{2\pi l}{N}} \tag{7.14}$$

את נוסחה (7.14) נתן לממש בעזרת $N_1\times N_2$ מסננים רקורסיביים דו-ממדים המחוברים במקביל.

שימוש במימוש זה כדאי רק כאשר $H(k,l)$ מתאפס כמעט עבור כל הנקודות (k,l) ואז מספר המסננים המחברים במקביל יהיה קטן. (יש לציין שאת כל אחד מהמסננים המחוברים במקביל אפשר לממש ע"י חיבור טורי של מסננים רקורסיבים חד ממדיים).

אם הספקטרום איננו מתאפס עבור רוב הדגימות אפשר לממש את המסנן בצורה הבאה. נניח שנתון הספקטרום הרצוי של מסנן ספרתי דו ממדי. ע"י דגימת תגובת התדר אפשר למצוא מסנן F.I.R שמקרב את הספקטרום הנתון. מקדמי מסנן F.I.R הם התגובה לדגם יחידה של המסנן. בעזרת תוכנית המחשב הנתונה בנספח 1, נתן לחשב מסנן רקורסיבי בעל ממדים רצויים, שיקרב את תגובת המסנן F.I.R לדגם יחידה. ולכן הספקטרום של המסנן הרקורסיבי יקרב את הספקטרום המקורי הרצוי. השיטה לתכנון מסנן F.I.R הנתונה במאמר[13] דורשת זמן מחשב רב (כ-6 דקות עבור 27 דגימות) על מנת להדגים את הרעיון, אפשט את התוכנית לשלבים הבאים.

א. נתון ספקטרום של מסנן רצוי.

ב. דוגמים את הספקטרום (רצוי במספר דגימות גדול ככל האפשר בדרך כלל מוסיפים חלון החלקה בשלב זה).

ג. על הדגימות במישור התדר מפעילים I.D.F.T (בעזרת תוכנית HARM [17]). מקבלים דגימות במרחב. שהם למעשה התגובה לדגם יחידה של המסנן הרצוי.

ד. בעזרת התוכנית בנספח 1 מחשבים מסנן רקורסיבי בעל מימד רצוי שתגובתו לדגם יחידה קרובה ככל האפשר לזו הנתונה בסעיף ג'.

הדוגמא המעשית שהורצה היא הבאה. ברצוננו לתכנן מסנן רקורסיבי מעביר נמוכים בעל סמטריה מעגלית.

תחום המעבר הוא ברדיוס $f=\frac{f_{Nyquist}}{2}$ כלומר $f_1^2+f_2^2 \leq f^2$

נדגם מחזור אחד בתחום התדר ב- 64×64 דגימות. הדגימות הנופלות בתחום המעבר קבלו את הערך "1" והדגימות מחוץ לתחום המעבר קבלו את הערך "0". מאחר והפזה היא אפס התמרת פוריה דיסקרטית הפוכה תקבל ערכים ממשיים.

בעזרת התוכנית הנתונה בנספח 1 חושב מסנן רקורסיבי דו מימדי בגודל (3×3) שתגובתו לדגם יחידה מקרבת את התמרת פוריה הדיסקרטית ההפוכה שחושבה.

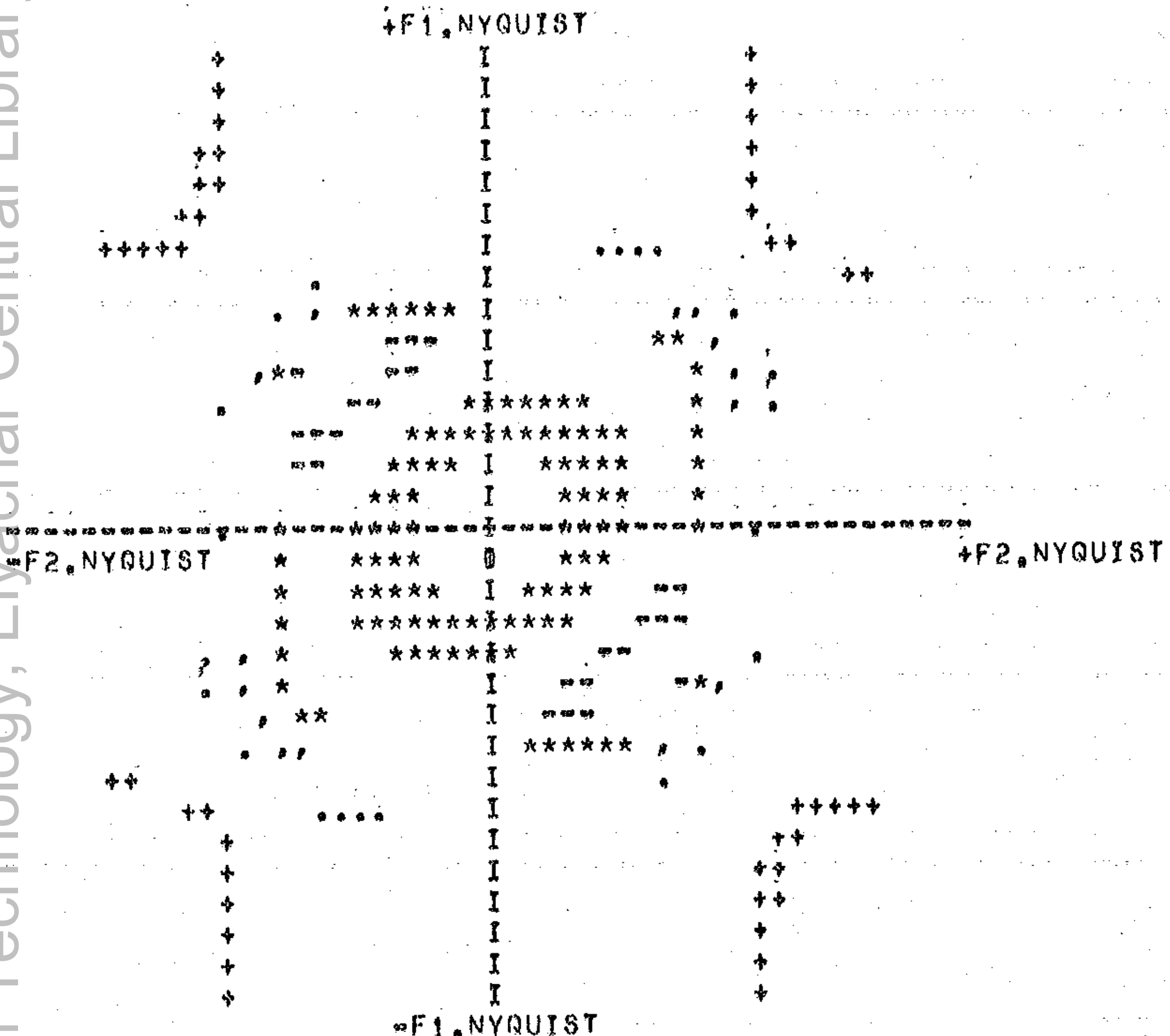
ספקטרום המסנן הרקורסיבי שהתקבל נראה בציור 7.13.

רואים את הדמיון הרב בין הספקטרום שהתקבל לעומת הספקטרום שממנו יצאנו אולם המסנן שהתקבל רחוק עדיין מלספק אותנו. הסיבות לעוות בספקטרום שהתקבל הם הבאות:

א. המעברים החדים שקבענו בין תחום המעבר והתחום שהמסנן איננו מעביר. צריך לקבוע תחום מעבר שבו יקבלו הדגימות ערכים בין 1 ל-0. ערכים אלו נקבעים ע"י תוכנית אופטימיזציה[13]

ב. המסנן הרקורסיבי שתכננו הוא מסדר (3×3). כדי לקבל תוצאות טובות יותר עלינו להגדיל את סדר המסנן.

אם ברצוננו לישם את הכתוב בשני הסעיפים למעלה עלינו להגדיל את זמן המחשב לסדר גודל של עשרות דקות. מסיבה זו לא יושמו המלצות אלו בעבודה זו.



,=0,3
+=0,1
,=0,50
*=0,7
-=1,0

ציור 7.13 אמפליטודת עקום העברות התדר של מסנן מעביר נמוכים.

FIG. 7.13 AMPLITUDE RESPONSE OF LOW PASS FILTER.

7.3 תכנון מסננים רקורסיביים דו ממדיים ע"י שימוש בשיטת DIFFERENTIAL-CORRECTION [16]

לאחרונה נוספה שיטה חדשה לתכנון מסננים רקורסיבים דו-ממדיים. שיטה זו מבוססת על קרוב פונקציה נתונה ע"י מנה של שני פולינומים עם שני משתנים.
בשיטה זו נתון לנו הריבוע של אמפליטודת המסנן הרצוי $I(e^{ju}, e^{jv})$ אשר אותו אנו רוצים לקרב ע"י מנה של שני פולינומים. $R(e^{ju}, e^{jv})$ הוא הקרוב של $I(e^{ju}, e^{jv})$, $H=A/B$ הוא המסנן המקורב. אפשר לכן לרשום.

$$I(e^{ju}, e^{jv}) \cong R(e^{ju}, e^{jv}) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)} =$$

$$= \left|H(e^{ju}, e^{jv})\right|^2 = \frac{\left|A(e^{ju}, e^{jv})\right|^2}{\left|B(e^{ju}, e^{jv})\right|^2} \qquad (7.15)$$

$$= \frac{A(e^{ju}, e^{jv})\, A^*(e^{ju}, e^{jv})}{B(e^{ju}, e^{jv})\, B^*(e^{ju}, e^{jv})}$$

A נתון ע"י

$$A = \sum_k \sum_l a(k,l)\, e^{jk\cdot u} e^{j\cdot l\cdot v}$$

B נתון ע"י

$$B = \sum_k \sum_l b(k,l)\, e^{jk\cdot u} e^{j\cdot l\cdot v}$$

ע"י פתוח האגף הימני של משואה (7.15) מקבלים את המשואה הבאה.

$$R(u,v) = \frac{P(u,v)}{Q(u,v)} = \frac{p(0,0) + \sum_{m,n} 2p(m,n)\cdot\cos(u\cdot m + v\cdot n)}{q(0,0) + \sum_{i,j} 2q(i,j)\cdot\cos(ui + vj)}$$

כאשר

$$p(m,n) = \sum_{r,s} a(r,s)\cdot a(r+m, s+n)$$

$$q(i,j) = \sum_{r,s} b(r,s)\cdot b(r+j, s+j)$$

מציאת הפולינום $R(u,v)$ נעשית במספר איטרציות נגדיר את השגיאה Δ כ-

$$\Delta = \max_{u,v} \left| I(e^{ju}, e^{jv}) - R(e^{ju}, e^{jv}) \right|$$

אנו מעונינים למצוא את המינימום של Δ. האלגוריתם למציאת המינימום הוא איטרטיבי, נסמן את הקרוב אחרי האיטרציה ה-k כ- $R_k(e^{ju},e^{jv})$.
השלבים במציאת המינימום הם הבאים:

א. חשב את השגיאה Δ_k עבור $R_k(e^{ju},e^{jv})$.

ב. עבור הפונקציה

$$E_k(R) = \max_{u,v}\left[\frac{|IQ-P| - \Delta_k Q}{Q_k}\right]$$

כאשר $R=P/Q$ ו- Q_k הוא המכנה של $R_k = P_k/Q_k$ מצא R_{k+1} אשר נותן את המינימום של E_k ע"י שינוי המקדמים של P ו-Q.

ג. אם $E_k > 0$ עצור. R_k הוא הקרוב הטוב ביותר של $I(u,v)$. אם לא חזור לצעד א' והתחל את המחזור עבור R_{k+1}

המינימיזציה של E_k מבוצעת בעזרת תכנות לינארי ואחרי מספר איטרציות מוצאים את $R(u,v)$ האופטימלי.

קימות כמה חסרונות לשיטת תכנון זו שעדיין לא נמצאו להם פתרונות.
החסרון הראשון הוא משך הזמן הגדול הדרוש להרצת תוכנית. זמן ההרצה תלוי בסדר הפלינומים P ו-Q, ובמספר הנקודות שעליהם מבוצעת האופטימזציה, אולם סדר גודל של זמן ההרצה הוא עשרות דקות ואף למעלה משעה. כמובן שזו מגבלה רצינית המעמידה בספק את כדאיות התכנון בשיטה זו. (זו הסיבה שלא נתן היה להביא דוגמאות מעשיות במסגרת העבודה).
חסרון שני הוא הקושי במציאת המקדמים $b(i,j)$, $a(i\ j)$ מהפלינומים P ו-Q שמצאנו.
הסדר של A ו- B אינו סופי בהכרח, ובדרך כלל יהיה צורך להשתמש ב"חלון" על מנת להפוך את A ו-B לפולינומים סופיים.
לסיכום, בפרק זה הוצגו מספר שיטות לתכנון מסננים רקורסביים דו ממדיים במישור התדר. לשיטות הקימות יש עדיין חסרונות רבים ויש להשקיע עבודה רבה כדי לשפרם כך שנוכל להשתמש בהם בצורה יעילה ומשביעת רצון.

8. סכום

העבודה התרכזה במסננים רקורסיבים דו ממדיים. דנו בעקר בשתי בעיות. בעית היציבות ובעית הסינטזה. הובאו המשפטים היסודיים לקביעת יציבותו של מסנן דו ממדי. הודגמו שלוש שיטות ליצוב מסננים בלתי יציבים. יצוב בעזרת P.L.S.I יצוב ע"י התמרת הילברט הדיסקרטית, ויצוב ע"י השואת ספקטרום של המסנן שאינו יציב עם הספקטרום של מסנן יציב. הוצגו מספר דוגמאות של יצוב מסננים לא יציבים לפי שלוש השיטות המוזכרות.

בשטח הסינטזה הובאה טכניקה לתכנון מסנן רקורסיבי דו ממדי כאשר נתונה התגובה לדגם יחידה הרצויה.

הוצגו טכניקות לתכנון מסננים במישור התדר באחת הטכניקות משתמשים בטרנספורמציה הביליניארית הדו-ממדית על מסנן אנלוגי וסיבוב צירי התדר. אפשר לקבל בשיטה זו מגוון מסננים דו ממדיים. בעבודה מובאות דוגמאות אחדות לתכנון מסננים בשיטה זו.

הובאה דוגמא לתכנון מסננים רקורסיבים דו ממדיים ע"י דגימת תגובת התדר, והוצגה שיטה לתכנון מסננים בשיטת DIFFERENTIAL CORRECTION.

התשובות הקימות כיום לבעית היציבות ובעית הסינטזה אינם מושלמות. אין היום שיטה מעשית יעילה לבדיקת יציבות מסנן רקורסיבי דו ממדי, ושיטות היצוב הקימות אינם מושלמות. בשטח הסינטזה השיטות הקימות אינם כלליות ונותנות תשובה חלקית לבעיה. יש להשקיע מאמצים נוספים על מנת למצוא שיטות כלליות ויעילות יותר מאלו הקימות כיום.

נספח 1

נתונה תגובה לדגם יחידה רצויה. התוכנית בנספח 1 מחשבת מסנן רקורסיבי דו מימדי שתגובתו לדגם יחידה מקרבת את התגובה לדגם יחידה הרצויה.

הסברים מפורטים מובאים בפרק 6.

בתוכנית בנספח 1 מובאת דוגמא הבאה :

נתון מסנן $H_0 = A_0/B_0$. התוכנית מחשבת את התגובה לדגם יחידה של מסנן זה. (את 36 האברים הראשונים)

התוכנית מחשבת מסנן $H = A/B$ שתגובתו לדגם יחידה מקרבת את התגובה לדגם יחידה של המסנן .

$H = A/B$ המחושב במקרה זה צריך להיות קרוב מאוד למסנן הנתון, ואמנם אפשר לראות זאת בתוצאת ההרצה המצורפת.

נספח 1

```
      PROGRAM  EQM(INPUT,OUTPUT)
      DIMENSION  A(3,3),A1(3,3),B(3,3),B1(3,3),R( 6,6 ),C(8,9)
      INTEGER  O, P, Q, S, T, D, E
      READ 1,  ((A(I,J),J=1,3),I=1,3)
      READ 1,  ((B(I,J),J=1,3),I=1,3)
1     FORMAT (9F5.2)
      DO 2 M=1,6
      DO 3 N=1,6
      S1=0
      DO 4  K=1,3
      DO 5  L=1,3
      IF((K*L).EQ.1) GO TO 5
      I=M-K+1
      J=N-L+1
      IF(I.LE.0.OR.J.LE.0) GO TO 5
      S1=S1+ B(K,L)*R(I,J)
5     CONTINUE
4     CONTINUE
      IF(M.LE.3.AND.N.LE.3)  30, 40
30    R(M,N)= A(M,N)- S1
      GOTO  3
40    R(M,N)= -S1
3     CONTINUE
2     CONTINUE
      DO 6  K=1,3
      DO 7  L=1,3
      IF(K*L.EQ.1)  GOTO  7
      DO 8 I=1,3
      DO 9 J=1,3
      S1=0
      IF (I*J.EQ.1) GO TO 9
      DO 10 M=4,6
      DO 11 N=4,6
      P=M-I+1
      Q=N-J+1
      T=M-K+1
      S=N-L+1
      IF(P.LE.0.OR.Q.LE.0.OR.T.LE.0.OR.S.LE.0) GO TO 11
      S1=S1+R(P,Q)*R(T,S)
11    CONTINUE
10    CONTINUE
      D=(K-1)*3+L-1
      E=(I-1)*3+J-1
      C(D,E)=S1
9     CONTINUE
8     CONTINUE
7     CONTINUE
6     CONTINUE
      DO 12  K=1,3
      DO 13  L=1,3
      IF(K*L.EQ.1)  GOTO  13
      S1=0
      DO 14 M=4,6
      DO 15 N=4,6
      P=M-K+1
      Q=N-L+1
      IF(P.LE.0.OR.Q.LE.0)GO TO 15
```

```
      S1=S1+R(M,N)*R(P,Q)
15    CONTINUE
14    CONTINUE
      D=(K-1)*3+L-1
      C(D,9) =S1
13    CONTINUE
12    CONTINUE
      CALL  MATRIX(10,8,9,0,C,8,W)
      DO 27  I=1,8
      P= I/3 +1
      Q= I- (P-1)*3+1
27    B1(P,Q)=-C(I,9)
      B1(1,1)=1
      DO 16  M=1,3
      DO 17  N=1,3
      S1=0
      DO 18  I=1,M
      DO 19  J=1,N
      P=M-I+1
      Q=N-J+1
      S1=S1+R(P,Q)*B1(I,J)
19    CONTINUE
18    CONTINUE
      A1(M,N)=S1
17    CONTINUE
16    CONTINUE
      PRINT 20
20    FORMAT(12X,2HA*,8X,1HA,9X,2HB*,9X,1HB)
      PRINT 21,A1(1,1)
21    FORMAT(2X,5H(1,1),4X,3H1.0,5X,F10.7,4X,3H1.0,5X,3H1.0)
      DO 22 I=1,3
      DO  23  J=1,3
      IF  (J.EQ.1.AND.I.EQ.1)GOTO 23
      PRINT  24, I,J, A(I,J), A1(I,J), B(I,J), B1(I,J)
24    FORMAT(2X,1H(,I1,1H,,I1,1H),3X,F4.1,3X,F12.7,3X,F5.2,3X,F10.7)
23    CONTINUE
22    CONTINUE
      STOP
      END
```

תוצאות ההרצה

	A*	A	B*	B
(1,1)	1.0	1.0000000	1.0	1.0
(1,2)	2.0	2.0000020	-1.50	-1.4999980
(1,3)	-1.0	-.9999957	.60	.5999972
(2,1)	3.0	2.9999913	-1.20	-1.2000087
(2,2)	4.0	3.9999888	1.80	1.8000106
(2,3)	2.0	2.0000175	-.72	-.7200020
(3,1)	2.0	1.9999745	.50	.5000109
(3,2)	-1.0	-1.0000295	-.75	-.7500153
(3,3)	1.0	.9999807	.29	.2900053

נספח 2

נתון מסנן לא יציב $F=1/B$ התוכנית בנספח 2 מחשבת מסנן $F_0=1/B_0$ יציב
כך שהספקטרום שלו קרוב לספקטרום של המסנן המקורי. היצוב נעשה ע"י שימוש בשיטת
P.L.S.I הסברים מפורטים בסעיף 5.3 .
בנספח מורצת דוגמא. תוצאות ההרצה מצורפות.

```
      PROGRAM  FOM(INPUT,OUTPUT)
      DIMENSION D(3,3),C(64,65),B(8,8),V(9,10) ,A(3,3)
      INTEGER P,Q,T,S
      READ 1, D(1,1),D(1,2),D(1,3)
      READ 1,D(2,1),D(2,2),D(2,3)
      READ 1,D(3,1),D(3,2),D(3,3)
1     FORMAT(3F11.8)
      DO 2 K=1,8
      DO 3 L=1,8
      DO 4 I=1,8
      DO 5 J=1,8
      S1=0
      DO 6 M=1,10
      DO 7 N=1,10
      P=M-I+1
      Q=N-J+1
      T=M-K+1
      S=N-L+1
      IF(P.LE.0.OR.Q.LE.0.OR.T.LE.0.OR.S.LE.0) GO TO 7
      IF(P.GT.3.OR.Q.GT.3.OR.T.GT.3.OR.S.GT.3) GO TO 7
      S1=S1+D(P,Q)*D(T,S)
7     CONTINUE
      M1=(K-1)*8+L
      M2=(I-1)*8+J
6     CONTINUE
      C(M1,M2)=S1
5     CONTINUE
4     CONTINUE
3     CONTINUE
2     CONTINUE
      C(1,65)=D(1,1)
      DO 8 J=2,64
      C(J,65)=0
8     CONTINUE
      CALL MATRIX(10,64,65,1,C,64,W)
      DO 9 I=1,64
      P=(I-1)/8+1
      Q=I-(P-1)*8
      B(P,Q)= C(I,65)
9     CONTINUE
      DO 10 K=1,3
      DO 11 L=1,3
      DO 12 I=1,3
      DO 13 J=1,3
      S1=0
      DO 14 M=1,10
      DO 15 N=1,10
      P=M-I+1
      Q=N-J+1
      T=M-K+1
      S=N-L+1
      IF(P.LE.0.OR.Q.LE.0.OR.T.LE.0.OR.S.LE.0)GO TO 15
      IF(P.GT.8.OR.Q.GT.8.OR.T.GT.8.OR.S.GT.8) GOTO 15
      S1=S1+B(P,Q)*B(T,S)
15    CONTINUE
14    CONTINUE
      M1=(K-1)*3+L
```

```
      M2=(I-1)*3+J
      V(M1,M2)=S1
13    CONTINUE
12    CONTINUE
11    CONTINUE
10    CONTINUE
      V(1,10)=B(1,1)
      DO 16 J=2,9
16    V(J,10)=0
      CALL  MATRIX(10,9,10,1,V,9,Z)
      DO 17  I=1,9
      P=(I-1)/3+1
      Q=I-(P-1)*3
17    A(P,Q)= V(I,10)
      PRINT 51
51    FORMAT(3X,21HUNSTABLE FILTER F=1/B)
      PRINT 50,((D(K,L),L=1,3),K=1,3)
50    FORMAT(1H0,3(F11.8,3X))
      PRINT 52
52    FORMAT(1H0,2X,24HSTABILIZED FILTER F=1/B*)
      DO 18 I=1,3
      PRINT 20,A(I,1),A(I,2),A(I,3)
20    FORMAT(1H0,3(F8.5,3X))
18    CONTINUE
      STOP
      END
```

תוצאות ההרצה

```
 UNSTABLE FILTER F=1/B

 1.00000000    -1.20002759      .40002239

-1.00003018     1.70007079     -.65005088

  .40002035     -.70054880      .25004387

  STABILIZED FILTER F=1/B*

 1.11574   -1.23465     .38427

-1.09342    1.68752    -.66807

  .37595    -.65215     .29754
```

נספח 3

בתון מסנן לא יציב $D_0 = A_0/B_0$ התוכנית מחשבת מסנן יציב $D = A/B$ כך שהספקטרום שלו קרוב לספקטרום של המסנן המקורי. היצוב נעשה ע"י שימוש בטרנספורמצית הילברט הדיסקרטית. הסברים מפורטים מובאים בסעיף 5.4 .

בנספח מורצות דוגמא. תוצאת ההרצה מובאת בסעיף 5.4 .

```
      PROGRAM  HILBERT(INPUT,OUTPUT)
      DIMENSION  D1(64,64),MM(3),INV(1024),S(1024)
      COMPLEX   A(64,64,1)
      MM(1)=6
      MM(2)=6
      MM(3)=0
      M1=64
      M2=64
      DO 1 I=1,64
      DO 1 J=1,64
1     A(I,J,1)=CMPLX(0.000001,0.0000001)
      A(1,1,1)=CMPLX(1.0,0.0)
      A(1,2,1)= CMPLX(-0.75,0.0)
      A(1,3,1)=CMPLX(0.9,0.0)
      A(2,1,1)=CMPLX(1.5,0.0)
      A(2,2,1)=CMPLX(-1.2,0.0)
      A(2,3,1)=CMPLX(1.3,0.0)
      A(3,1,1)=CMPLX(1.2,0.0)
      A(3,2,1)=CMPLX(0.9,0.0)
      A(3,3,1)=CMPLX(0.5,0.0)
      CALL  HARM(A,MM,INV,S,1,IFERR)
      PRINT  5,IFERR
5     FORMAT(1X,I1)
      DO 201 I=1,8
      DO  201 J=1,4
      PRINT 40,I,J,A(I,J,1)
40    FORMAT(1X,I2,1X,I2,F10.6,1X,F10.6)
201    CONTINUE
      DO  100 I=1,M1
      DO  100 J=1,M2
      D1(I,J)=CABS(A(I,J,1))
      A(I,J,1)=CMPLX(ALOG(D1(I,J)),0.0)
100   CONTINUE
      CALL ODDEV(A,64,64)
      DO 200 I1=1,M1
      DO 200 I2=1,M2
      PI=COS(AIMAG(A(I1,I2,1)))
      QI=SIN(AIMAG(A(I1,I2,1)))
200   A(I1,I2,1)=CMPLX(D1(I1,I2)*PI,D1(I1,I2)*QI )
      CALL  HARM(A,MM,INV,S,-1,IFERR)
      PRINT  5,IFERR
      DO 39 I=1,10
      DO 39 J=1,10
      PRINT 4,I,J,A(I,J,1)
4     FORMAT(1X,I2,2X,I2,F10.6,2X,F10.6)
39    CONTINUE
      STOP
      END
```

```
      SUBROUTINE    ODDEV(A1,N1,N2)
      DIMENSION  INV1(1024),S1(1024),MM1(3)
      COMPLEX  A1(64,64,1)
      MM1(1)=6
      MM1(2)=6
      MM1(3)=0
      CALL  HARM (A1,MM1,INV1,S1,-1,IFERR)
      PRINT 7,IFERR
7     FORMAT(1X,I1)
      N1=64
       N2=64
      N1P1=N1+1
      N2P1=N2+1
      N1D2=N1/2
      N2D2=N2/2
      N1D2P1=N1D2+1
      N2D2P1=N2D2+1
      DO 150 I1=2,N1D2
      DO 150 I2=2,N1D2
      K1=I1+N1D2
      K2=I2+N2D2
      A1(I1,K2,1)=CMPLX(0.0,AIMAG(A1(I1,K2,1)))
      A1(K1,I2,1)=CMPLX(0.0,AIMAG(A1(K1,I2,1)))
150   A1(K1,K2,1)=-CONJG(A1(K1,K2 ,1))
      A1(1,1,1)=CMPLX(0.0,AIMAG(A1(1,1,1)))
      DO 250 I2=1,N2
250   A1(N1D2P1,I2,1)=(A1(N1D2P1,I2,1)-CONJG(A1(N1D2P1,I2,1)))/2
      DO 350  I1=1,N1
350   A1(I1,N2D2P1,1)=(A1(I1,N2D2P1,1)-CONJG(A1(I1,N2D2P1,1)))/2
      DO 400  I2=2,N2D2
      K2=N2D2+I2
400   A1(1,K2,1)=-CONJG(A1(1,K2,1))
      DO  500  I1=2,N1D2
      K1=I1+N1D2
500   A1(K1,1,1)=-CONJG(A1(K1,1,1))
      CALL  HARM(A1,MM1,INV1,S1,+1,IFERR)
      RETURN
      END
```

9. מקורות ספרות

1. ERNEST L. HALL
   A COMPARISON OF COMPUTATIONS FOR SPATIAL FILTERING
   PROCEEDINGS OF IEEE VOL 60 NO. 7 JULY 1972. PP 887-891

2. OPPENHEIM ALAN
   DIGITAL SIGNAL PROCESSING
   PRENTICE HALL 1975

3. LAWRENCE R. RABINER, BERNARD GOLD
   THEORY AND APPLICATION OF DIGITAL SIGNAL PROCESSING
   PRENTICE-HALL 1975

4. JOHN SHANKS, JAMES JUSTICE
   STABILITY AND SYNTHESIS OF TWO DIMENSIONAL RECURSIVE FILTERS
   I.E.E.E TRAN. ON AUDIO AND ELECTROACOUSTICS AU-20 NO 2
   JUNE 1972 PP 115-128

5. THOMAS S. HUANG
   STABILITY OF TWO DIMENSIONAL RECURSIVE FILTERS
   IEEE TRANSACTION ON AUDIO AND ELECTROACOUSTICS
   VOL AU 20 NO 2. JUNE 1972. PP 158-163

6. G. A. MARIA & M.M FAHMY
   ON STABILITY OF TWO DIMENTIONAL DIGITAL FILTERS.
   IEEE TRAN. ON AUDIO AND ELECTROACOUSTICS. OCTOBER 1973. PP 470-472.

7. BRAIN ANDERSON & ELIAHU JURY
   STABILITY TEST FOR TWO DIMENSIONAL RECURSIVE FILTERS
   I.E.E.E TARN. ON AUDIO AND ELECTROACOUSTICS. VOL 21 NO 4.
   AUGUST 1973. PP 366 ÷ 372.

8. E. A. ROBINSON
STATISTICAL COMMUNICATION AND DETECTION
HAFNER 1967 PP 173-174

9. RANDOLF R. READ & SVEN TREITEL
THE STABILIZATION OF TWO DIMENSIONAL RECURSIVE FILTERS VIA THE DISCRETE HILBERT TRANSFORM
IEEE TRANS. ON GEOSCIENCE ELEC. VOL GE 11 JULY 1973. PP 153 -160.

10. C. FARMER & S GOODEN
ROTATION AND STABILIZATION OF A RECURSIVE DIGITAL FILTER. IST NAT. PATTERN RECAGNITION CONF. 1973. PP 1-2-1 ÷ 12-12

11. JOSE COSTA & A. VENETSANOPOULOS
DESIGN OF CIRCULARLY SYMMETRIC TWO DIMENSIONAL RECURSIVE FILTERS.
IEEE TRANS. ON ACOSTICS SPEECH AND SIGNAL PROCESSING.
VOL ASSP-22 NO 6. DEC. 1974.

12. J. SHANKS
RECURSION FILTERS FOR DIGITAL PROCESSING
GEOPHYSICS, VOL 32 PP 33-51 FEB 1961

13. J. HU & L. RABINER
DESIGN TECHNIQUES FOR TWO DIMENSION DIGITAL FILTERS
IEEE TRANS ON AUDIO AND ELECTROACOUSTICS VOL AU-20 NO 4
PP 249-263 OCT. 1972.

14. R. MERSEREAU & D. DUDGEON
TWO DIMENSIONAL DIGITAL FILTERING
IEEE PROCEDDINGS VOL 63 NO 4 APRIL 1975. PP 610-623.

15. D. DUDGEON
TWO DIMENSIONAL RECURSIVE FILTER DESIGN USING DIFFERENTIAL CORRECTION.
IEEE TRANS. ON ACOUSTICS SPEECH AND SIGNAL PROCESSING.
VOL ASSP-23 NO. 3 JUNE 1975. PP - 264-267.

16. DAN E. DUDGEON
RECURSIVE FILTER DESIGN USING DIFFERENTIAL CORRECTION.
IEEE TRANS. ON ACOUSTICS SPEECH AND SIGNAL PROCESSING
VOL ASSP-22 NO. 6 DEC 1974. PP 443-448

17. I.B.M SCIENTIFIC SUBROUTINE PACKAGE

18. Y. GENIN Y. KAMP
COUNTEREXAMPLE IN THE LEAST SQUARES INVERSE STABILIZATION
OF 2D RECURSIVE FILTERS.
ELECTRONICS LETTERS. JULY 1975.

19. V. CIZEK
DISCRET HILBERT TRANSFORM
IEEE ON AUDIO AND ELECTROACOUSTICS.
VOL AU-18 NO 4 DECEMBER 1970.

DESIGN OF TWO DIMENSIONAL DIGITAL FILTERS

FINAL PAPER

SUBMITTED IN PARTIAL FULFILMENT OF THE REQUIRMENTS
FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE
IN ELECTRICAL ENGINEERING

BY

RAMI SEGAL

SUBMITTED TO THE SENATE OF THE TECHNION - ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY
HESHVAN 5736 HAIFA NOVEMBER 1975

THE FINAL PAPER WAS DONE UNDER THE GUIDANCE OF DR. D. MALAH IN THE FACULTY OF ELECTRICITY.

I WANT TO THANK DR. D. MALAH FOR HIS HELP AND GUIDANCE.

BSTRACT

he digital filtering of two dimensional signals offers the many advantages haracteristic of digital computers, such as flexibility and accuracy. Two imensional filters are used in many image and array processing applications - uch as X ray enhancement, image deblurring, weather predictions, seismic analysis nd the processing of radar and sonar arrays. As in the one-dimensional case,two-dimensional ilters fall into two classes - those whose unit sample response contains a finite number of amples and whose transfer functions are polynomials - the F.I.R filters - and hose whose transfer functions are rational functions - the I.I.R. filters. It as been shown that there is a potential saving in both computer time and in emory size by use of recursive digital filtering as compared to non-recursive filters.

ue to the importance of these savings, this work will deal mainly with recursive ilters.

wo problem areas of two-dimensional recursive filtering are stability and synthesis. ince a portion of the output values are used by the recursive algorithm, it is ossible for the output values to become arbitrarily large, independent of the ize of the input values. A filter of this kind is said to be unstable.

though interesting, the question of how to test two dimensional recursive filters or stability is not the only part of the stability problem, nor is it the most nportant part. The important issues are:

) If a filter is unstable, how can it be stabilized without undue distortion of its frequency response.

) How can stable filters be designed?
Three methods of stabilizing are examined:
The first one is based on the assumption that the planar least squares (Wiener) inverse of an array, is in most cases minimum phase. The second method uses a two dimensional generalization of the discrete Hilbert transform, and leads to a scheme producing stability with nominal distortions.

Another method is the approximation of the unstable filter by a stable filter while trying to keep the distortion of the frequency response as small as possible. We can use this method only when the unstable filter is of low order.

This work reviews and applies several approaches towards designing recursive filters. In the first method we know the two-dimensional unit sample response of the discrete filter which we wish to use on the data. We approximate the given unit sample with the two-dimensional recursive filter.

In the given methods, we use techniques of filters design in the frequency domain.

All the methods of synthesis with which we are familiar today still have serious drawbacks. Further work must be done in order to find more effective techniques for the design of two-dimensional recursive filters.