



הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
Technion – Israel Institute of Technology

ספריות הטכניון
The Technion Libraries

בית הספר ללימודי מוסמכים ע"ש ארווין וג'ואן ג'ייקובס
Irwin and Joan Jacobs Graduate School

©

All rights reserved

*This work, in whole or in part, may not be copied (in any media), printed, translated, stored in a retrieval system, transmitted via the internet or other electronic means, except for "fair use" of brief quotations for academic instruction, criticism, or research purposes only.
Commercial use of this material is completely prohibited.*

©

כל הזכויות שמורות

אין להעתיק (במדיה כלשהי), להדפיס, לתרגם, לאחסן במאגר מידע, להפיץ באינטרנט, חיבור זה או כל חלק ממנו, למעט "שימוש הוגן" בקטעים קצרים מן החיבור למטרות לימוד, הוראה, ביקורת או מחקר. שימוש מסחרי בחומר הכלול בחיבור זה אסור בהחלט.

תכן מסננים רקורסיביים במישור הזמן

עבודת גמר

לשם מילוי חלקי של הדרישות לקבלת התואר

מגיסטר למדעים

בהנדסת חשמל

מאת

יוראל שיגר

488

הוגש לסנט הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
תשרי תשל"ג ח י פ ה אוקטובר 1976

עבודת הגמר בעשתה בהנחיית ד"ר דוד מלאך בפקולטה להנדסת חשמל.

לה"ר דוד מלאך בתובה תודתי והערכתי על הנחייתו והכוונתו
בעבודה זו.

לחברת "תדיראן" בתובה תודתי על העזרה הרבה, אותה הגישה ללא
סייג בכל שלבי העבודה.

תוכן העניינים

עמוד	
1	תקציר
4	רשימת סמלים וקיצורים
7	1. מברא
7	1.1 הגדרות
9	1.2 בעיית התכנון
10	1.3 מדר טיב התכנון
11	2. מסננים רקורסיביים
11	2.1 כללי
11	2.2 הגדרת בעיית התכנון
16	3. שיטות תכנון
16	3.1 שיטות תכנון ישירות
26	3.2 שיטות תכנון איטרטיביות
42	4. אלגוריתמים חישוביים
42	4.1 כללי
44	4.2 שיטת השגיאה הריבועית
46	4.3 קירוב Padé
47	4.4 שיטת Aigrain - Williams
58	4.5 שיטת Gauss - Newton
66	5. דוגמאות
67	5.1 קירובים למסנן רקורסיבי בתון
76	5.2 מסנן מעביר זמוכים

(המשך בעמוד הבא)

תוכן העניינים (המשך)

עמוד		
95	מסנן מתואם (Matched Filter)	5.3 .
101	שחרור אותות רב מימדיים מתוך היטליהם	5.4 .
106		6 . סכום
107	Aigrain - Williams	נספח א' : הרחבת שיטת
113		נספח ב' : תכניות מחשב לתכנון מסננים רקורסיביים
129		רשימת מקורות
I		ABSTRACT

תקציר

העבודה להלן מתארת שיטות תכנון של מסגרים ספרתיים רקורסיביים על פי תגובה רצויה בחחום הזמן. התגובה הרצויה בתוצה בצורת סדרת מספרים או כאות אנלוגי, הודגם במרווחי זמן קבועים ליצירת סדרת המספרים. המסגרים בהם יטופל יכולים להיות בעלי דרגות מונה ומכבה כלשהן, בתבאי שדרגת המונה (N) קטנה או שווה לדרגת המכבה (M). קריטריון טיב התכנון בשיטות אלו הוא השגיאה הרבועית הנוצרת בין התגובה הדרושה לתגובה המעשית המתקבלת. השגיאה מחושבת יחסית לאבדגיה הכוללת של הסדרה הרצויה. בעית המינימיזציה של השגיאה היא בעיה לא ליניארית ולכן אין אפשרות לתכנן מסגן באופן ישיר לקבלת שגיאה מינימאלית.

מתוארות ארבע שיטות תכנון: שתי שיטות קירוב ישירות ושתי שיטות איטרטיביות. השיטות הישירות מבוססות על אילוץ שוויון בין חלק מהדגימות של סדרת המוצא של המסגן המתוכנן לדגימות המתאימות של הסדרה הרצויה. השיטות האיטרטיביות מבוססות על חיפוש חוזר של הפרמטרים של המסגן (מקדמי המונה והמכבה) עד להתכנסות למצב מסויים (שלא תמיד הוא האופטימום).

השיטות הישירות הן: שיטת השגיאה הריבועית ושיטת קירוב Padé בשיטת השגיאה הריבועית מחושבות פונקציות האוטוקורלציה בין $K-N$ איברים של הסדרה הרצויה. מתוך פונקציות אלו מחושבים מקדמי המכבה של המסגן. מקדמי פולינום המונה מתקבלים כך ש- $N+1$ האיברים הראשונים של סדרת המוצא המתקבלת במסגן ישור במדויק לאיברים המתאימים של סדרת המוצא הרצויה. מקדמים אלו מתקבלים ממשוואות ליניאריות פשוטות.

בשיטה המורחבת ניתן לקבל את מקדמי פולינום המונה כך שיגרמו להשוואה של $N+1$ דגימות כלשהן של סדרת המוצא לסדרה הרצויה. בשיטת קירוב Padé מושוות $N+M+1$ הדגימות הראשונות (M -בדרגת המכבה) של

סדרת המוצא לסדרה הרצויה לקבלת משוואות ליניאריות הן למקדמי המונה והן למקדמי המכנה.

השיטות האיטרטיביות הן: שיטת Aigrain - Williams ושיטת Gauss - Newton. בשיטת Aigrain-Williams יש להתחיל בפתרון החלתי של קטבי המסנן במישור Z. בנבנית מערכת משוואות לפתרון מקדמי המסנן אשר יביאו למינימיזציה של השגיאה. מחוכם מתקבלים הקטבים החדשים. התהליך חוזר על עצמו עד להתכנסות קטבי המסנן לערך סופי. בשיטת Gauss-Newton יש להתחיל בפתרון החלתי של מקדמי פולינום המונה ופולינום המכנה. מבוצע פיתוח של השגיאה הריבועית לטור טיילור סביב פתרון זה. מתוך פיתוח זה מחושבת השגיאה הריבועית על סמך שני האיברים הראשונים של הפיתוח. מחושבים המקדמים החדשים אשר גורמים למינימיזציה של שגיאה זו. מכיוון שאין זו השגיאה האמיתית משמש הפתרון רק כמדד לאיטרציה. ההפרש בין שני הפתרונות משמש כאינטרוול לחיפוש המינימום של השגיאה. במידה והמינימום לא נמצא באינטרוול מוגדל האינטרוול פי גודל מסויים. בבדק קיום המינימום באינטרוול החדש. החישוב חוזר עד למציאת אינטרוול שבו מצוי מינימום. באינטרוול זה מבוצע חיפוש המינימום בשיטת Fibonacci. נבחנו ארבע דוגמאות תכנון: תכנון קירוב למסנן רקורסיבי בתון, תכנון מסנן מעביר זמוכים, תכנון מסנן מתואם, ותכנון מסנן אינטרפולציה המשמש בתהליך הרכבת אותות רב-מימדיים מתוך היטליהם. שתי הדוגמאות הראשונות הצביעו על האפשרות לזהות את דרגות המסנן בצורה קלה למדי באמצעות קירוב Padé. הדוגמה הראשונה מצביעה על האפשרות לקבל קירוב טוב למסנן רקורסיבי בתון בעזרת שיטות התכנון לעיל.

תכנון מסנן מעביר זמוכים קשה יותר, כנראה מכיוון שהאנרגיה שלו מרוכזת בדגימות המרוחקות מהאפס. כתוצאה מכך דרישות החיזוי של המסנן הרקורסיבי קשות יותר. לקבלת תכנון משביע רצון היה צורך להשתמש בשיטת מימוש מיוחדת.

תכנון המסבן המתואם הצביע על כך שלמרות שהשגיאה הריבועית היחסית היתה גדולה למדי, ניתן להשיג מסבן מתואם שיאפשר קבלת יחס אור לרעש קרוב לערך התיאורטי. בתכנון מסבן האינטרפולציה התקבלו קירובים שונים, טובים למדי, למסבן הרצוי למרות שהשגיאה הריבועית היחסית השתנתה בסדרי גודל שלמים מתכנון אחד למשנהו.

רשימת סמלים וקיצורים

סימונים כלליים

הסימון $[A]$ מסמן מטריצה A .

הסימון $(a_{i,j})$ מסמן את האיבר הכללי i, j של המטריצה A .

הסימון $[11]$ מסמן מקור מספר 11 ברשימת המקורות.

הסימון \bar{a} מסמן וקטור a .

הסימון (a_i) מסמן את האיבר הכללי i של הוקטור a .

הסימון \bar{a}^T מסמן את הוקטור a המוחלף (transpose).

הסימון \doteq פירושו "שוה בערך".

הסימון $\|\cdot\|$ פירושו הנורמה של הוקטור \bar{x} .

סימונים וקיצורים

$h(n)$: האיבר ה- n -י של תגובת ההלם של המסנן הרצוי בתחום הזמן.

$y(n)$: האיבר ה- n -י של סדרת המוצא של המסנן.

$x(n)$: האיבר ה- n -י של סדרת המבוא למסנן.

$\delta(n)$: דגם היחידה.

a_i : המקדם ה- i -י של פולינום המונה של המסנן הרקורסיבי, או של המסנן הלא-

רקורסיבי.

b_i : המקדם ה- i -י של פולינום המכנה של המסנן הרקורסיבי.

$g(n)$: האיבר ה- n -י של תגובת ההלם של המסנן המתוכנן בתחום הזמן.

$G(z)$: פונקציית התמסורת של המסנן הרקורסיבי המתוכנן.

e : פונקציית השגיאה של המסנן בתחום הזמן.

E : פונקציית השגיאה של המסנן במישור התדר.

$N(z)$: פולינום המונה של המסנן הרקורסיבי.

$D(z)$: פולינום המכנה של המסנן הרקורסיבי.

$N(z)$: דרגת פולינום המונה N .

$D(z)$: דרגת פולינום המכנה M .

K : אורך סדרת תגובת ההלם הנתונה של המסנן.

e_r : השגיאה הריבועית בין תגובת המסנן המתוכנן לתגובה הרצויה, יחסית לאנרגיה של התגובה הרצויה.

$\varepsilon(n)$: האיבר ה- n -י של סדרת השגיאה בין התגובה הרצויה להלם המתקבלת במסנן.

$[R]$: מטריצת האוטוקורלציה של סדרת התגובה להלם הרצויה.

\bar{b} : וקטור מקדמי פולינום המכנה של המסנן הרקורסיבי.

\bar{y}_0 : וקטור האוטוקורלציה של סדרת התגובה הרצויה.

$[H]$: מטריצת הכוללת את איברי סדרת התגובה הרצויה להלם.

\bar{h} : וקטור איברי סדרת התגובה הרצויה להלם מהאיבר ה- $N+1$.

$\bar{\varepsilon}$: וקטור איברי סדרת השגיאה $\varepsilon(n)$.

$[B]$: מטריצת הבנויה ממקדמי פולינום המכנה של המסנן הרקורסיבי.

$H(z)$: פונקציית התמסורת של המסנן הרצוי.

$[C_0]$: מטריצת אוטוקורלציה חלקית בקירוב Padé.

$[C_1]$: מטריצת אוטוקורלציה חלקית בקירוב Padé.

\bar{c} : וקטור הכולל את ריבוי הקטבים בשיטת Aigrain-Williams.

\bar{nS} : וקטור המציין קו טב ממשל או מרוכב בשיטת Aigrain-Williams.

$E(z)$: התמרת z של פונקציית השגיאה של המסנן.

$ES(z)$: התמרת z של פונקציית השגיאה לפי המודל של Kalman.

$D_1(z)$: פולינום המכנה של פונקציית התמסורת $G(z)$ מוכפל בגורם $1/b_M$

$N_1(z)$: פולינום המונה של פונקציית התמסורת $G(z)$ מוכפל בגורם $1/b_M$

$b_{1,i}$: המקדם ה- i -י של פולינום המכנה $D_1(z)$.

$a_{1,i}$: המקדם ה- i -י של פולינום המונה $N_1(z)$.

z_i : השורש ה- i -י של פולינום המכנה $D_1(z)$ במישור z^{-1} .

k_i : המשקע של הקוטב z_i בפונקציית התמסורת $G(z)$.

$[V]$: מטריצת המקדמים של הנעלמים $a_{1,i}$ במשוואות Aigrain-Williams או של

השינוי במקדמים בשיטת Gauss-Newton.

[L] : מטריצת המקדמים של הנעלמים $b_{i,i}$ במשוואות Aigrain-Williams או של

השינוי במקדמים בשיטת Gauss-Newton.

\bar{s} : מקדמי הקבועים במשוואות Aigrain-Williams.

$\bar{0}$: וקטור הכולל את המקדמים a_i, b_i .

$g_{a_k}(n)$: נגזרת האיבר ה-n-י של התגובה להלם $g(n)$ לפי המקדם ה-k-י a_k .

$g_{b_k}(n)$: נגזרת האיבר ה-n-י של התגובה להלם $g(n)$ לפי המקדם ה-k-י b_k .

\bar{z}_n : וקטור הכולל את החזקות השליליות של השורשים z_i או ערכיהם המוחלטים.

S_n : וקטור הכולל את הסינוס של הכפולות השלמות של הארגומנטים של השורשים z_i .

C_n : וקטור הכולל את הקוסינוס של הכפולות השלמות של הארגומנטים של השורשים z_i .

$\bar{1}_0$: וקטור עזר בחישוב ערכי המטריצות [V], [L] בשיטת Aigrain-Williams.

d_i : המספר ה-i בסדרת Fibonacci.

f : גורם שינוי וקטור המקדמים $\bar{0}$ בלן איטרציה לאיטרציה בשיטת Gauss-Newton.

1.1 מבוא

1.1 הגדרות [1]

המסנן הספרתי הנו תהליך חישובי בעזרתו מתורגמת סדרת מבוא של מספרים או אותות ספרתיים לסדרת מוצא. הפעולה יכולה להיות ממומשת בעזרת חכנה או באמצעות חמרה.

פעולת המסנן במישור הזמן מתוארת ע"י המשוואה (1.1) להלן:

$$y(n) = h(n) * x(n) \quad (1.1)$$

כאשר: $x(n)$ הנה סדרת המבוא;

$h(n)$ הנה התגובה להלם של המסנן;

$y(n)$ הנה סדרת המוצא;

* מסמל את פעולת הקונבולוציה.

הסדרות השונות מתקבלות כסדרות מספרים. הסדרה הרצויה יכולה להתקבל גם מדגימת אות אנלוגי במרווחי זמן קבועים T .

דגם יחידה במסננים ספרתיים מוגדר כ"דלתה של קרוניקר" שהוא:

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & ; n = 0 \\ 0 & ; n \neq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

את המסננים הספרתיים ניתן למיין על פי מספר קריטריונים שונים. אחד הקריטריונים הוא המיון על-פי אורך סדרת התגובה להלם $h(n)$.

מסנן בעל תגובה סופית (finite impulse response - FIR) הינו מסנן שתגובתו להלם $h(n)$ היא אפס מעבר לגבולות סופיים של n ; לדוגמה: $h(n)=0$, $n > N_1$ או $n < N_2$

מסנן בעל תגובה אינסופית (infinite impulse response - IIR) הינו מסנן שתגובתו להלם $h(n)$ היא בעלת משך אינסופי בכיוון ציר המספרים החיוביים ($N_1 = \infty$), השליליים ($N_1 = -\infty$) או שניהם גם יחד. דרך שונה למיון מסננים היא צורת המימוש.

מסנן רקורסיבי הינו מסנן שסדרת המוצא שלו מוגדרת כסכום משוקלל של ערכי הסדרה בעבר וערכי סדרת המבוא בעבר ובהווה, כלומר:

$$y(n) = \sum_{i=0}^N a_i x(n-i) - \sum_{i=1}^M b_i y(n-i) \quad (1.3)$$

כאשר:

מסנן לא-רקורסיבי הינו מסנן שסדרת המוצא שלו מוגדרת כסכום משוקלל של ערכי סדרת המבוא בעבר ובהווה, כלומר:

$$y(n) = \sum_{i=0}^K a_i x(n-i) \quad (1.4)$$

למסננים בעלי תגובה סופית מספר יתרונות ([2]) :

- במסננים אלו ניתן לקבל תגובת תדר בעלת מופע ליניארי. הם יכולים גם לקרב תגובות כלשהן. אולם את זאת יכולים לבצע גם מסננים בעלי תגובה אינסופית.
- המימוש יכול להיות לא-רקורסיבי או רקורסיבי. במסננים בעלי תגובה אינסופית המימוש הלא-רקורסיבי קשה ביותר.
- מסנן לא רקורסיבי בעל תגובה סופית יציב תמיד, מכיון שכל הקטבים במישור z הם בראשית.

המסנן הרקורסיבי עדיף על המסנן הלא-רקורסיבי באופן המימוש. מימוש המסנן הלא רקורסיבי דורש, בדרך כלל, יותר יחידות השהייה, כופלים ומסכמים. במסנן הרקורסיבי המימוש פשוט יותר מכיון שמתרחשת בו תופעה של צבירת מידע על ערכי סדרת המבוא בעבר בערכי סדרת המוצא, המשמשים ליצירת ערכים חדשים של סדרת מוצא.

יתרוננו זה של המסנן הרקורסיבי הוא גם חסר־נו. שגיא כל שהיא בחישוב אחד מערכי סדרת המוצא (כתוצאה מאורך מלה סופי של המחשב, למשל) תגרום גם לשגיאת חישוב בערכים העוקבים.

1.2 בעיית התכנון

אחד מטפוסי בעיות התכנון של מסננים שגרתיים הנה מציאת מסנן אשר תגובתו להלם יחידה $(g(n))$ קרובה במידת האפשר לתגובה נתונה $(h(n))$. כאשר סדרת המבוא הנה הלם יחידה הופכות משוואות (1.3) ו-(1.4) ל:

$$g(n) = a_n - \sum_{i=1}^M b_i g(n-i) ; 0 \leq n \leq N \quad (1.5a) \quad \text{מסנן רקורסיבי:}$$

$$g(n) = - \sum_{i=1}^M b_i g(n-i) ; N < n \quad (1.5b)$$

$$g(n) = a_n ; 0 \leq n \leq K \quad (1.6) \quad \text{מסנן לא-רקורסיבי:}$$

(מבלי להגביל את הכלליות נניח בהמשך הדיון ש:

$$g(n) = 0, h(n) = 0 ; n > 0$$

ביצוע התמרת z על המשוואות (1.5), (1.6) יתן את פונקציות התמסורת של המסננים לעיל:

$$G(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M b_i z^{-i}} \quad (1.7) \quad \text{מסנן רקורסיבי:}$$

$$G(z) = \sum_{i=0}^K a_i z^{-i} \quad (1.8) \quad \text{מסנן לא-רקורסיבי:}$$

תכנון המסנן יכול להתבצע במישור החדר או במישור הזמן. קיימות מספר שיטות תכנון בכל אחת מהאפשרויות. בשיטות השונות ניתן טיב הקירוב בהתאם למדד טיב מסוים. כאשר מדד הטיב בשיטה מסוימת זהה למדד טיב ביצועי המסנן יש לבחור בשיטה זו. אולם לעתים קרובות אין קשר ישיר בין מדד הטיב בשיטת תכנון נתונה למדד הטיב הרצוי במסנן. לדוגמא: כאשר יש לתכנן מסנן מעביר נמוכים, שהדרישה החשובה בו היא נילות גדול בתחום הקטעון - לא ניתן לבחור מראש שיטה מסוימת שתתן את התוצאה האופטימלית. במקרה זה רצוי לנסות מספר אפשרויות.

1.3 מדד טיב התכנון

כאמור לעיל בעיית התכנון בה מטפלת עבודה זו היא למצוא סדרה $g(n)$, אשר תהיה "קרובה ככל האפשר" לסדרה הרצויה $h(n)$, כלומר $h(n) \rightarrow g(n)$. מושג זה יש להגדיר באופן כמותי, ע"מ לאפשר מדידת טיב התכנון. קיימים מספר סוגים של מדדי טיב.

אחד המדדים הינו הסטייה המכסימלית בין שתי דגימות שונות: על פי מדד זה מוגדרת השגיאה כ:

$$e = \max_n \{ |h(n) - g(n)| \} \quad \text{בתחום הזמן: (1.9a)}$$

$$E = \max_k \{ |H(k) - G(k)| \} \quad \text{במישור התדר: (1.9b)}$$

כאשר: $G(k)$, $H(k)$ ערכי התמרת פורייה של הסדרות המתאימות. מדד אחר הינו מינימיזציה של השגיאה במובן l_p [3]. השגיאה מוגדרת כ:

$$e = \sum_n [h(n) - g(n)]^p \quad \text{בתחום הזמן: (1.10a)}$$

$$E = \sum_k [H(k) - G(k)]^p \quad \text{במישור התדר: (1.10b)}$$

כאשר: p - הינו מספר שלם, חיובי וזוגי.

בכל סוג מדד השאיפה היא להקטין את השגיאה e (או E) למינימום. המקרה הנפוץ ביותר הינו מינימיזציה במובן l_2 , כלומר כאשר $p=2$. במקרה זה השגיאה e (או E) הינה השגיאה הריבועית המינימלית. השגיאה e יחסית לאנרגיה של "הרעש" הנוצר בתהליך התכנון במישור הזמן והשגיאה E יחסית לאנרגיה של "הרעש" הנוצר בתהליך התכנון במישור התדר.

יש להדגיש שמינימיזציה של השגיאה e אינה גוררת בהכרח מינימיזציה של השגיאה E , כאשר מדובר בסדרות סופיות. שוויון חייב להתקיים רק במקרה של סדרות אינסופיות וכאשר הפרמטר p הינו 2 (במקרה זה מתקיים משפט Parseval).

2. מסננים רקורסיביים

2.1 כללי

העבודה להלן דנה בתכנון מסננים רקורסיביים בעלי תגובה סופית במישור הזמן. מדד טיב התכנון הינו השגיאה הריבועית המינימלית. כפי שתואר ב-(1.7) המסנן הרקורסיבי ניתן לתאר ע"י המשוואה:

$$G(z) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^M b_i z^{-i}}$$

תאור כזה נקרא גם ((4) חיזוי ליניארי (linear prediction) מכיון שניתן "לחזות" את הערך $y(n)$ של סדרת המוצא של המסנן כצירוף ליניארי של ערכי סדרת המבוא וערכי סדרת המוצא הקודמים, תאור כללי כמו ב-(1.7) הינו מודל קטבים - אפסים (pole-zero-model) ומכונה בספרות גם autoregressive moving average. למסנן זה N אפסים ו-M קטבים. קיימים שני מקרים פרטיים למסנן כללי: - מודל אפסים בלבד (all-zero model) שתיאורו:

$$G(z) = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} \tag{2.1}$$

מסנן כזה נקרא גם moving average. - מודל קטבים בלבד (all-pole model) שתיאורו:

$$G(z) = \frac{a_0}{1 + \sum_{i=1}^M b_i z^{-i}} \tag{2.2}$$

מסנן כזה נקרא גם autoregressive.

2.2 הגדרת בעיות התכנון

משוואה (1.7) ניתנת להיכתב גם כ:

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \tag{2.3}$$

כאשר: $N(z)$ הינו פולינום המונה:

$$N(z) = \sum_{i=0}^N a_i z^{-i} \quad (2.3a)$$

$D(z)$ הינו פולינום המכנה:

$$D(z) = 1 + \sum_{i=1}^M b_i z^{-i} \quad (2.3b)$$

$G(z)$ ניתן גם לפיתוח, ע"י חלוקת שני הפולינומים, לסדרה אינסופית $g(n)$:

$$G(z) = g(0) + g(1)z^{-1} + g(2)z^{-2} + \dots + g(K)z^{-K} + g(K+1)z^{-K-1} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} g(i)z^{-i} \quad (2.4)$$

(השיויון מתקיים רק לערכי z בתחום ההתכנסות של הפונקציה $G(z)$).

2.2.1 קביעת אורך רצוי של סדרת המוצא K

מכיון ששיטות התכנון שילדונו להלן עוסקות בסדרות בעלות אורך סופי יש לקבוע את ערך הפרמטר K אשר יגדיר את אורך הסדרה הרצוי. לעתים נתון פרמטר זה מראש כאילוץ תכנון, אולם לרוב ניתן לבחור אותו בגבולות מסויימים. התגובה להלם יחידה של המסנן הרקורסיבי היא בדרך-כלל סדרה אינסופית $g(n)$. הסדרה הרצויה $h(n)$ היא סדרה סופית. סדרה זו ניתנת גם לתאור כסדרה אינסופית באופן הבא:

$$h^1(n) = \begin{cases} h(n) & ; \quad n \leq K \\ 0 & ; \quad K < n \end{cases} \quad (2.5)$$

מכאן ברור שכרוב המקרים, פרט לשגיאת התכנון בדגימות עד הדגימה ה- K , תיוצר שגיאה נוספת כתוצאה מה"זנב" האינסופי של סדרת המסנן.

דוגמה

נניח שברצוננו לקרב פונקצית תמסורת שתגובתה בתחום הזמן היא:

$$h(n) = 0.4^n \quad ; \quad 0 \leq n \leq 64$$

התמרת z של פונקציה זו היא:

$$H(z) = \frac{1 - (0.4 \cdot z^{-1})^{64}}{1 - 0.4 \cdot z^{-1}}$$

אם המסנן הרקורסיבי שמקרב תגובה זו יוצר את הסדרה האינסופית $g(n)$:

$$g(n) = 0.4^n \quad ; \quad 0 \leq n$$

תהיה תגובתו:

$$G(z) = \frac{1}{1 - 0.4z^{-1}}$$

שתי הסדרות זהות ב-65 איבריהן הראשונים. אולם נוצרת שגיאה שכתוצאה מהאורך האינסופי של הסדרה $g(n)$. (שגיאה זו ניתן לחשב במקרה זה כסכום הטור האינסופי: $\dots, (0.4)^{2 \cdot 66}, (0.4)^{2 \cdot 65}$) וערכה:

$$e = \frac{(0.4)^{130}}{1 - (0.4)^2}$$

במקרה זה השגיאה הנוצרת קטנה ביותר. בכל מקרה רצוי לבחור את ערך הפרמטר K באופן שהשגיאה הנוצרת תהיה זניחה.

2.2.2 בחירת סדר המונה N וסדר המכנה M

לאיברי המונה $N(z)$ השפעה ישירה על $N+1$ האיברים הראשונים של סדרת המוצא $g(n)$. בחירה נכונה של דרגת המונה N עשויה להקטין במידה ניכרת את השגיאה. עם זאת אילוץ יתר של תנאים אלו עלול לגרום לשגיאה גדולה. לאיברי $D(z)$ השפעה מכרעת על יציבות המסנן ועל השגיאה בכל איברי הסדרה. שורש של $D(z)$ שגודלו המוחלט במישור z גדול מ-1 יתן פתרון לא יציב. לא קיימת דרך פשוטה לקביעה אופטימלית של הסדרים M ו- N . מובן שככל ש- N ו- M קטנים פשוט יותר מימוש המסנן, אולם השגיאה עלולה לגדול. בחירת N ו- M גבוהים מדי עלולה לגרום לחוסר יציבות. כך, לדוגמה, אם לסדרה הרצויה $h(n)$ קיים מימוש רקורסיבי טבעי שהסדרים שלו N ו- M הרי שבחירת N גדול מה- N הטבעי גורמת לתוספת אפסים לא רצויים. בשיטות תכנון מסוימות יוצרי קטבים אשר יבטלו את השפעת האפסים הלא רצויים, אם הגודל המוחלט של אפסים וקטבים אלו במישור z גדול מ-1 יוצר מסנן לא יציב. Chow [5] מציע שיטה לבחירת הדרגות M ו- N של המסנן הרקורסיבי. בשיטה זו מחשבים את מטריצת האוטוקורלציה של $K-N$ איברי הסדרה $h(n)$ ומחשבים את המינורים הראשונים של מטריצה זו. הדרגה M נבחרת כגודל אותו מינור, אשר ערכו קטן מערך נתון. שיטה זו אינה חסכונית בזמן חישוב ולכן רצוי בד"כ למצוא את הדרגות M ו- N ע"י חישוב מסננים למספר ערכים נסיוניים של M ו- N .

2.2.3 אופטימיזציה של השגיאה

כמתואר ב-(1.10) שגיאת התכנון הנוצרת במסנן הרקורסיבי היא:

$$e = \sum_n [h(n) - g(n)]^2 \quad (2.6)$$

הצבת הביטויים (1.5a) ו-(1.5b) לתוך (2.6) תיתן:

$$e = \sum_{n=0}^N [h(n) - a_n + \sum_{i=1}^M b_i g(n-i)]^2 + \sum_{n=N+1}^k [h(n) + \sum_{i=1}^M b_i g(n-i)]^2 \quad (2.7)$$

שגיאה מינימלית תתקבל כאשר הנגזרות של e לפי האיברים a_i , b_i יתאפסו, כלומר:

$$\frac{\partial e}{\partial a_i} = 0 \quad ; \quad i = 0, 1 \dots N \quad (2.8a)$$

$$\frac{\partial e}{\partial b_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2 \dots M \quad (2.8b)$$

מכיון ש- $g(n)$ תלויה גם היא באיברים a_i , b_i תיתן הגזירה במשוואות (2.8) מערכת משוואות לא ליניאריות לפתרון a_i , b_i . לכן לא ניתן לפתור את בעיית האופטימיזציה בשיטה ישירה, אלא יש צורך בשיטות קירוב. לשגיאה e כפי שהוגדרה כאן נוספת גם "שגיאת הקיצוץ" e' , הנובעת מאיפוס כל איברי הסדרה מעל לערך K מסוים (סעיף 2.2.1 לעיל):

$$e' = \sum_{n=K+1}^{\infty} g(n)^2 \quad (2.9)$$

כאמור, ניתן לשלוט על שגיאה זו ביתר קלות ע"י בחירת K גדול במידה מספקת. אולם שגיאה זו תהיה קיימת גם כאשר האופס השגיאה e . מכאן ששגיאת התכנון של מסנן רקורסיבי בעל תגובה סופית לא תשווה לעולם לאפס [6]. השגיאה e כפי שהוגדרה ב-(2.6) אינה מצביעה במדויק על טיב התכנון פרט למקרה שבו היא שווה במדויק לאפס. כמדד לטיב התכנון נבחרה השגיאה היחסית e_r . שגיאה זו מבטאת את היחס בין השגיאה e (אנרגיית ה"רעש") לאנרגייה של הסדרה הרצויה $h(n)$ [4]:

$$e_r = \sum_{n=0}^K h(n)^2 \quad (2.10)$$

2.2.4 יציבות

מסנן מוגדר כיציב כאשר תגובתו לכל סדרת מבוא חסומה - חסומה אף היא 7 . יציבות תתקבל כאשר הערך המוחלט של הקטבים של המסנן קטן מ-1 [8], [9]. שיטות התכנון שיתוארו להלן אינן מבטיחות יציבות. גורם אחד לחוסר יציבות תואר בסעיף 2.2.2 לעיל - בחירת N ו- M גבוהים מדי. בחירת אורך סדרה K קצר מדי עלולה אף היא לגרום לחוסר יציבות. דרך נוספת לשיפור יציבות המסנן היא הארכת הסדרה הרצויה $h(n)$ לסדרה שאיבריה עבור $n < K$ ישוו לאיברי הסדרה $g(n)$. פעולה זו מבוצעת בצורה איטרטיבית [8].

3. שיטות תכנון

בפרק זה יתוארו שיטות התכנון של מסננים רקורסיביים במישור הזמן. שיטות התכנון מתחלקות לשני סוגים עיקריים: שיטות תכנון ישירות ושיטות תכנון איטרטיביות. שיטות התכנון הישירות אופייניות לתכנון מסננים רקורסיביים במישור הזמן. שיטות התכנון האיטרטיביות מסתכמות למעשה בבעיית האופטימיזציה כפי שנוסחה בסעיף 2.2.3. לבעיות אופטימיזציה כזו שיטות פתרון רבות בשיטות האנליזה הנומרית. (לדוגמה, ראה [10], פרק 5). בסקירה זו יובאו שתי שיטות איטרטיביות הישימות במיוחד לתכנון המסננים במישור הזמן.

3.1. שיטות תכנון ישירות

שיטות אלו מבוססות על חישוב יחיד של הפרמטרים של המסנן. יתוארו שתי שיטות עיקריות: שיטת השגיאה הריבועית וקירוב Padé.

3.1.1. שיטת השגיאה הריבועית

סקירת מקורות

שיטה זו תוארה לראשונה ע"י Prony [1]. המשיך בה בספרות Yengst [12]. השיטה עודכנה ע"י Shanks [13] והורחבה ע"י Burrus, Parks [14], Evans, Fischl [15]. סיכום ממצה של השיטה הבסיסית והרחבותיה השונות ניתן במאמרם של Brophy, Salazar [16]. בנוסף לכך נותנים Chao, Lu [17] אלגוריתם המאפשר חישוב פתרון חדש למסנן בעל אורך סדרה K , דרגת המכנה M או דרגת המונה N בהתבסס על תכנון קודם של מסנן בעל ערכי פרמטרים נמוכים יותר.

השיטה הבסיסית, כפי שתוארה ע"י Yengst, Prony ו-Shanks מתבססת על מינימיזציה של השגיאה הריבועית המתוארת במשוואה (2.7) תוך השוואה מדויקת של $N+1$ הערכים הראשונים של הסדרה הרצויה $h(n)$ לאלו של הסדרה המתקבלת מהמסנן המעשי $g(n)$. השוואה זו תיתן:

$$g(n) = h(n) \quad ; \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (3.1)$$

במצב זה ניתן לפשט את הביטוי (2.7) לביטוי הבא:

$$e_1 = \sum_{n=N+1}^k \left[h(n) + \sum_{i=1}^M b_i g(n-i) \right]^2 \quad (3.2)$$

נסמן:

$$h(n) = g(n) - \varepsilon(n) \quad (3.3)$$

הצבת (3.3) לתוך (3.2) תיתן:

$$e_1 = \sum_{n=N+1}^k \left[h(n) + \sum_{i=1}^M b_i h(n-i) \right]^2 + 2 \sum_{n=N+1}^k \left[h(n) + \sum_{i=1}^M b_i h(n-i) \right] \cdot \sum_{i=1}^M h_i \varepsilon(n-i) + \sum_{n=N+1}^k \sum_{i=1}^M \left[b_i \varepsilon(n-i) \right]^2$$

נכתובן בביטוי הראשון מתוך השלושה במשוואה (3.4):

$$e_2 = \sum_{n=N+1}^k \left[h(n) + \sum_{i=1}^M b_i h(n-i) \right]^2 \quad (3.5)$$

מינימיזציה של ביטוי זה ביחס למקדמים b_i תיתן:

$$\frac{\partial e_2}{\partial b_k} = 0 : \sum_{n=N+1}^k \left\{ \left[h(n) + \sum_{i=1}^M b_i h(n-i) \right] \cdot h(n-k) \right\} = 0$$

$$; k = 1, 2, \dots, M \quad (3.6)$$

מינימיזציה של ביטוי זה גורמת גם למינימיזציה של הביטוי השני ב-(3.4). בנוסף לכך ניתן להניח שמינימיזציה של השגיאה e_1 כולה תגרום למינימיזציה של איברי הסדרה $\varepsilon(n)$, מכיון שאז:

$$h(n) \doteq g(n)$$

$$h(n) \doteq - \sum_{i=1}^M b_i h(n-i) \quad \text{כלומר:}$$

בהתחשב בנימוקים לעיל מבוססת השיטה על מינימיזציה של השגיאה e_2 כפי שהוגדרה ב-(3.6) ולא של השגיאה המקורית e לפי הגדרתה ב-(2.7).

פיתוח הביטוי (3.6) יתן את מערכת המשוואות:

$$\sum_{i=1}^M \left\{ b_i \sum_{n=N+1}^k h(n-i) \cdot h(n-k) \right\} = - \sum_{n=N+1}^k h(n) \cdot h(n-k) ;$$

$$k = 1, 2, \dots, M \quad (3.7)$$

זו מערכת משוואות ליניארית לפתרון המקדמים b_i .
 ארגון המשוואות לצורה מטריצית תיתן:

$$[R] \cdot \bar{b} = \bar{y}_0 \quad (3.8)$$

כאשר: $[R]$ הינה מטריצה האוטוקורלציה שהיא סימטרית.
 איבר המטריצה הוא:

$$(r_{i,j}) = \sum_{n=N+1}^K h(n-i) \cdot h(n-j) \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, M$$

\bar{b} הינו וקטור המקדמים:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}$$

\bar{y}_0 הינו וקטור האוטוקורלציה.

$$\bar{y}_0 = \begin{pmatrix} \sum_{n=N+1}^K h(n) \cdot h(n-1) \\ \vdots \\ \sum_{n=N+1}^K h(n) \cdot h(n-M) \end{pmatrix}$$

במאמרו של Burrus, Parks [14] מתוארת גישה שונה במקצת המביאה לאותה תוצאה:

הצבת $h(n)$ במקום $g(n)$ במשוואות (1.5b) תיתן גורם שגיא $\epsilon_1(n)$. המשוואות ניתנות להיכתב בצורה:

$$\epsilon_1(n) = -h(n) - \sum_{i=1}^M b_i h(n-i) \quad ; \quad n = N+1, \dots, K \quad (3.9)$$

ארגון המשוואות בצורה מטריצית יתן:

$$\bar{\epsilon} = -[H] \cdot \bar{b} - \bar{h} \quad (3.10)$$

כאשר: $\bar{\epsilon}$ הילנו וקטור השגליאה:

$$\bar{\epsilon} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 (N+1) \\ \epsilon_1 (N+2) \\ \vdots \\ \epsilon_1 (K) \end{pmatrix}$$

$[H]$ הילנה מטריצת סדרת התגובה:

$$(h_{i,j}) = h(N+i-j) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, K-N \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, M$$

\bar{b} הילנו וקטור המקדמים:

$$\bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix}$$

\bar{h} הילנו הוקטור:

$$\bar{h} = \begin{pmatrix} h(N+1) \\ h(N+2) \\ \vdots \\ h(K) \end{pmatrix}$$

לקבלת מינימיזציה של השגליאה הריבועית $(\bar{\epsilon}^T \cdot \bar{\epsilon})$ יש לחשב את הוקטור \bar{b} באמצעות הביטוי (3.11):

$$\bar{b} = - [H^T H]^{-1} \cdot [H^T] \cdot \bar{h} \quad (3.11)$$

פיתוח ביטוי זה יתן תוצאה זהה לביטוי (3.8). לקבלת ערכי המקדמים a_i יש לפתור את המשוואות (1.5), בהסתמך על ההנחה הבסיסית (3.1). במקרה זה מתקבל:

$$a_n = h(n) + \sum_{i=1}^M b_i h(n-i) \quad ; \quad 0 < n < N \quad (3.12)$$

דרך שונה לקבלת המקדמים a_i מחוארת במאמרם של Burrus ,Parks משוואות (1.5) ניתנות לשכתוב בצורה המטריצית הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_i \\ \bar{0} \end{pmatrix} = [B] \cdot \bar{g}_i \quad (3.13)$$

כאשר: הוקטור השמאלי הינו הוקטור בעל אורך K :

$$\begin{pmatrix} a_i \\ \bar{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

B הינה מטריצת המקדמים $b_{i,j}$ בגודל $K \times K$:

$$b_{i,j} = \begin{cases} b_{i-j} & ; \quad i = 2, 3, \dots, K \\ 1 & ; \quad j = i-M, i-M+1, \dots, i-1 \\ 0 & ; \quad i = j \end{cases}$$

לכל i, j אחרים
 \bar{g} הוא הוקטור:

$$\bar{g}_i = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_K \end{pmatrix}$$

הצבת (3.3) ב-(3.13) תיתן:

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ \bar{0} \end{pmatrix} = [B] \cdot (\bar{h} + \bar{\epsilon}) \quad (3.14)$$

כאשר $\bar{\epsilon}$ הינו וקטור השגיאה:

$$\bar{\epsilon}_i = \begin{pmatrix} \epsilon(0) \\ \epsilon(1) \\ \vdots \\ \epsilon(K) \end{pmatrix}$$

כתלבה מחדש של (3.14) תיתן:

$$\bar{h} + \bar{\epsilon} = [B]^{-1} \cdot \bar{a} \quad (3.15)$$

פירוק המטריצה $[B]^{-1}$ לשני חלקים $[B_1]$, $[B_2]$ שגודלם בהתאמה $K \times (N+1)$ ו- $(K-N-1) \times K$ יתן:

$$\bar{h} + \bar{\epsilon} = [B_1] \cdot \bar{a} + [B_2] \cdot \bar{0} \quad \text{או:}$$

$$\bar{h} + \bar{\epsilon} = [B_1] \cdot \bar{a} \quad (3.16)$$

מכאן ניתן לפתור את \bar{a}

$$\bar{a} = [B_1]^{-1} \cdot (\bar{h} + \bar{\epsilon}) \quad (3.17)$$

בפתרון זה ניתן לאלץ שיוויון של כל $N+1$ ערכים שהם של $g(n)$ לערכים הרצויים $h(n)$ ע"י איפוס וקטור השגיאה $\bar{\epsilon}$ בנקודה שלו, ופתרון המשוואות המתאימות מתוך (3.17)

ד י ו ן

- השיטה שתוארה לעיל פותרת את המקדמים a_i, b_i בשני שלבים: תחילה מחושבים ערכי המקדמים b_i ואח"כ הערכים a_i . חישוב המקדמים b_i נעשה לקבלת מינימיזציה של השגיאה e_2 כפי שהוגדרה ב-(3.5). אין שגיאה זו זהה לשגיאה הריבועית המינימלית על פי הגדרתה המקורית (2.7). לכן אין שום ודאות לקבלת שגיאה ריבועית מינימלית באמת.
- אין השיטה מבטיחה יציבות של המסנן. המקדמים b_i אשר מתקבלים כאן יכולים לגרום לקטבים במישור z מעבר למעגל היחידה.
- לחישוב המקדמים b_i יש צורך בהיפוך מטריצת הקורלציה $[R]$ ב-(3.8). דטרמיננט מטריצה זו עלול להיות בעל ערך קטן מאוד ולגרום לשגיאות גדולות בחישוב. הערה זו עשויה להצביע על דרך לבחירת ערכי סדר המכנה M עבור סדר מונה מסוים. עבור N זה יש לחשב את הדטרמיננטים של מטריצות הקורלציה ל- M גדל והולך עד אשר ערך הדטרמיננט יורד מתחת לערך שנקבע מראש. הגודל של M יבחר כגודל הגדול ביותר אשר עבורו דטרמיננט מטריצת הקורלציה עדיין גדול מערך מסוים.
- השוואת $N+1$ דגימות מסוימות של הסדרה $g(n)$ לערכי הסדרה $h(n)$ ע"י המקדמים a_i עשויה לגרום לשגיאות גדולות, עקב בחירת $N+1$ דגימות לא נכונות. לדוגמא: אם היחס בין הערכים המכסימליים לערכים המינימליים של דגימות הסדרה הרצויה $h(n)$ הוא גדול עשוי אילוף של שיוויון בדגימות שערכן גדול לגרום לשגיאה גדולה בדגימות שערכן נמוך ולהיפך. נראה, לכן שכדאי לקבל שיוויון בדגימות שאינן הגדולות ביותר או הקטנות ביותר.

3.1.2 קירוב Padé

סקירת מקורות

קירוב Padé מוגדר ע"י Kelly [18] כקירוב רציונלי לפונקציה נתונה שבו לפולינום המונה דרגה N ולפולינום המכנה דרגה M . בקירוב זה מאלצים שיוויון בין $N+M+1$ האיברים הראשונים של פיתוח הפונקציה הנתונה לטור Taylor לאיברים המתאימים של פיתוח הקירוב הרציונלי לטור זה. דרישה זו מבטיחה הצמדות טובה של פונקצית הקירוב לפונקציה הרצויה בנקודה סביבה פותח טור Taylor. ניתן להפעיל קירוב זה לתכנון המסנן הרקורסיבי. ניתן לנסח את בעיית התכנון בצורה הבאה:

"נתון פולינום כלשהוא $H(z)$. יש למצוא פונקציה רציונלית $G(z)$ אשר תהווה קירוב Padé לפולינום $H(z)$ ".

מקדמי הפולינום $H(z)$ הם איברי הסדרה הרצויה $h(n)$:

$$H(z) = \sum_{n=0}^k h(n) z^{-n} \quad (3.18)$$

$G(z)$ הינה פונקצית התמסורת של המסנן כפי שהוגדרה ב-(2.3):

$$G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$$

ופיתוחה לטור Taylor הוגדר ב-(2.4):

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) z^{-n}$$

על פי קירוב Pade צריכים $N+M+1$ איברי הסדרות $h(n)$, $g(n)$ לשוות אלו לאלו כלומר (6, 16):

$$g(n) = h(n) \quad ; \quad n = 0, 1, \dots, M+N \quad (3.19)$$

הצבת דרישה זו למערכת המשוואות (1.5) תיתן מערכת משוואות ליניאריות לפתרון המקדמים a_i , b_i :

$$h(n) = a_n - \sum_{i=1}^M b_i h(n-i) \quad ; \quad 0 < n < N \quad (3.20a)$$

$$h(n) = - \sum_{i=1}^M b_i h(n-i) \quad ; \quad N+1 < n < M+N+1 \quad (3.20b)$$

[16] Brophy, Salazar דנים בבדיקת יציבות של מסנן אשר תוכנן בעזרת קירוב Padé.

היא $[C]$ מטריצת האוטוקורלציה:

$$C_{0,i,j} = \sum_{k=1}^M h(M+i-k-1) h(M+j-k-1) ; i, j = 1, 2, \dots, M \quad (3.21)$$

וכן $[C_1]$, אף היא מטריצת האוטוקורלציה:

$$C_{1,i,j} = \sum_{k=1}^M h(M+i-k) h(M+j-k) ; i, j = 1, 2, \dots, M \quad (3.22)$$

קיים קריטריון היציבות הבא:

אם המטריצה $[C_0 - C_1]$ חיובית בהחלט המסנן אשר תוכנן בשיטת קירוב Padé יציב. קריטריון זה אינו פועל בכיוון ההפוך, כלומר: אם $[C_0 - C_1]$ אינה חיובית בהחלט אין פירוש הדבר שהמסנן אינו יציב.

ד י ו ן

שיטת קירוב Padé מאפשרת פתרון מקדמי המסנן הרקורסיבי מתוך מערכת משוואות ליניאריות. חסרונה בכך שהיא מבטיחה קבלת שגיאה ריבועית נמוכה באזור מסויים בלבד (סביב הנקודה שבה פותח טור Taylor) אבל לא בכל התחום שבו מעוניינים. השגיאה הריבועית בשיטה זו ניתנת לביטוי כ:

$$e_3 = \sum_{n=M+N+1}^K [h(n) - g(n)]^2 \quad (3.23)$$

למקרה $N+M=K$ מתקבלת שגיאה ריבועית אפס בתחום הסדרה הסופית. יש לזכור, עם זאת, שמכיון שהתגובה לחלם של המסנן הרקורסיבי היא אינסופית - תיוצר שגיאה ריבועית ברוב המקרים במסנן המתוכנן.

קריטריון היציבות שתואר לעיל אינו מבטיח גילוי מסנן לא יציב, אלא מאפשר קבלת תשובה ודאית ליציבות המסנן (במקרה של קיום תנאי היציבות). תנאי היציבות נכון אך ורק אם $M+N > 2M$. קריטריון זה ניתן להרחבה לכל שיטת תכנון מסנן רקורסיבי אם בחישוב המטריצות $[C_0]$, $[C_1]$ יוחלפו בביטויים (3.21) (3.22) לעיל ערכי הסדרה $h(n)$ בערכי הסדרה $g(n)$. שימוש בקריטריון זה יכול

לחסוך זמן חישוב רב לעומת השיטות האחרות. שיטות אחרות לבדיקת יציבות הן:
חישוב איברים רבים של הסדרה $g(n)$ ובדיקת התכנסותה או חישוב מקום שרשי
פולינום המכנה $D(z)$

3.1.3. סיכום

שתי שיטות התכנון הישירות שתוארו לעיל מבוססות על השוואת מספר מסוים של
ערכי סדרת המוצא של המסנן $g(n)$ לדגימות המתאימות של הסדרה הרצויה $h(n)$.
השוואה זו נועדה לאפשר חיזוי של התנהגות כל סדרת המוצא. השיטות אינן
מצמצמות למינימום את שגיאת התכנון. בנוסף לכך אין הן מבטיחות תכנון יציב.
נראה, ששיטת קירוב Padé יעילה בעיקר למקרים בהן הסדרה $h(n)$ אכן ניתנת
לקירוב מדויק ע"י מסנן רקורסיבי. במקרה זה בחירה נכונה של הסדרים M ו- N
בקירוב Padé תיתן את מקדמי המסנן.

3.2 שיטות תכנון איטרטיביות

שיטות אלו מבוססות על חישוב חוזר של מקדמי המסנן החל מפתרון התחלתי מסוים עד לקבלת התכנסות לשגיאה מינימלית.
 תוארו שתי שיטות: שיטת Aigrain-Williams ושיטת Gauss-Newton.

3.2.1 שיטת Aigrain-Williams

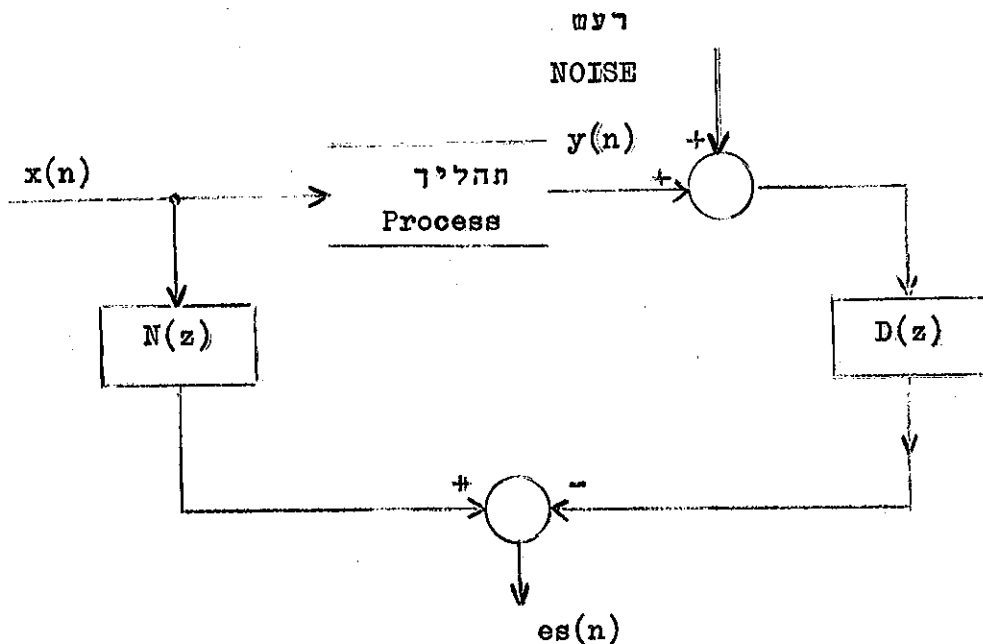
שיטה זו מתבססת על מודל שונה למציאת השגיאה, כפי שתואר ע"י Kalman [19], Steiglitz, McBride [20], ו-Miller [21].
 משוואת השגיאה בין תגובת המסנן הרקורסיבי לסדרת מכוא $x(n)$ לבין סדרת המוצא הרצויה $y(n)$ מבוטאת ע"י:

$$E(z) = X(z) \cdot \frac{N(z)}{D(z)} - Y(z) \quad (3.24)$$

כאשר: $X(z)$, $Y(z)$ הן התמרות z של הסדרות $x(n)$, $y(n)$.
 המקורות לעיל דנים במינימיזציה של השגיאה $ES(z)$ שלהלן:

$$ES(z) = X(z) \cdot N(z) - Y(z) \cdot D(z) \quad (3.25)$$

המודל לתאור שגיאה זו מתואר בצירור 3.1:



צירור מס' 3.1: מודל השגיאה הליניארית של Kalman

Fig. No. 3.1: Kalman's Linear Error Model

Miller [21] מציע שיטה איטרטיבית לחישוב מקדמי המסנן בהסתמך על גרסה מעודכנת של משוואות Aigrain-Williams [22]. משוואות אלו דנות בתנאים ההכרחיים לקירוב פונקציה רציפה ע"י צירוף ליניארי של אכספוננטים. Miller מתאים תנאים אלו לאותות דגומים. השגיאה הריבועית מוגדרת ע"י:

$$E = \frac{1}{2\pi j} \oint ES(z) \cdot ES\left(\frac{1}{z}\right) \frac{dz}{z} \quad (3.26)$$

\bar{j} הינו המספר הקומפלקסי $\sqrt{-1}$ והאינטגרציה מבוצעת על מעגל היחידה. $D_1(z)$, $N_1(z)$ הם הפולינומים:

$$D_1(z) = \sum_{i=0}^{M-1} b_{1,i} z^{-i} + z^{-M} \quad (3.27a)$$

$$N_1(z) = \sum_{i=0}^{M-1} a_{1,i} z^{-i} \quad (3.27b)$$

(הגדרה זו שונה מההגדרה הקודמת. הקשר בין שתי ההגדרות הוא:

$$b_i = \frac{b_{1,i}}{b_{1,0}} \quad ; \quad i = 1, 2 \dots M \quad (3.28)$$

$$a_i = \frac{a_{1,i}}{b_{1,0}} \quad ; \quad i = 0, 1 \dots M-1 \quad (3.28)$$

(וגם $N=M-1$)

פונקצית התמסורת $G(z)$ ניתנת לתיאור כ:

$$G(z) = \sum_{i=1}^M \frac{k_i}{z^{-1} - z_i} \quad (3.29)$$

כאשר: z_i הם הקטבים של $G(z)$ במישור z^{-1} , k_i^{-1} הם המשקעים של קטבים אלו.

לקבלת שגיאה E מינימלית צריך להתקיים:

$$\frac{\partial E}{\partial k_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2 \dots M \quad (3.30a)$$

$$\frac{\partial E}{\partial z_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2 \dots M \quad (3.30b)$$

מתוך (3.26) הופכות משוואות (3.30) ל:

$$\frac{2}{2\pi j} \oint \frac{ES(z)}{z - z_i} \frac{dz}{z} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.31a)$$

$$-\frac{2k_i}{2\pi j} \oint \frac{ES(z)}{(z - z_i)^2} \frac{dz}{z} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.31b)$$

לקבלת פתרון יציב כל הקטבים של פונקציה התמסורת $G(z)$ חייבים להימצא במעגל היחידה במישור z , או מחוץ לו במישור z^{-1} . כלומר: $|z_i| > 1$; $i = 1, 2, \dots, M$. בהנחה שלפונקציות שבתוך האינטגרלים (3.31) נקודת אי רציפות יחידה במעגל האינטגרציה יתקבלו המשוואות (3.32) להלן:

$$\frac{z_i ES'(z_i) - ES(z_i)}{z_i^2} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.32a)$$

$$\frac{ES(z_i)}{z_i} = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.32b)$$

$$ES'(z) = \frac{dES(z)}{dz} \quad \text{כאשר:}$$

משוואות אלו יפושטו לצורה הסופית:

$$ES(z_i) = 0 \quad (3.33a)$$

$$ES'(z_i) = 0 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.33b)$$

הצבת (3.26) למשוואות (3.33) תיתן:

$$N_1(z_i) - H(z_i) D_1(z_i) = 0 \quad (3.34a)$$

$$N_1'(z_i) - H'(z_i) D_1(z_i) - H(z_i) D_1'(z_i) = 0 \quad (3.34b)$$

הצבת משוואות (3.27) לתוך (3.34) תיתן מערכת משוואות ליניארית לפתרון

מקדמי המסבך $a_{1,i}$, $b_{1,i}$:

$$[V] \cdot \bar{a}_1 + [L] \cdot \bar{b}_1 = \bar{s} \quad (3.35a)$$

$$[W] \cdot \bar{a}_1 + [P] \cdot \bar{b}_1 = \bar{t} \quad (3.35b)$$

כאשר: $[V], [L], [W], [P]$ הינן מטריצות בגודל $M \times M$:

$$(v_{i,j}) = (z_i^{-j+1}) \quad ; \quad (3.36a)$$

$$(l_{i,j}) = (-H(z_i) \cdot z_i^{-j+1}) = \left(- \sum_{n=0}^K h(n) \cdot z_i^{-(n+j-1)} \right) ; \quad (3.36b)$$

$$(w_{i,j}) = ((j-1) \cdot z_i^{-j}) ; \quad (3.36c)$$

$$(p_{i,j}) = (H'(z_i) \cdot z_i^{-j+1} - (j-1)H(z_i)z_i^{-j}) = \quad (3.36d)$$

$$= \left(- \sum_{n=0}^K (j+n-1)h(n)z_i^{-(n+j)} \right) ; \quad i, j = 1, 2, \dots, M$$

$\bar{t}, \bar{s}, \bar{b}_1, \bar{a}_1$ הנם וקטורים באורך M

$$(s_i) = \left(\sum_{n=0}^K h(n) z_i^{-(n+M)} \right) ; \quad (3.36e)$$

$$(t_i) = \left(\sum_{n=0}^K (n+M) h(n) z_i^{-(n+M+1)} \right) ; \quad (3.36f)$$

$i = 1, 2, \dots, M$

$$(a_{1,i}) = \begin{pmatrix} a_{1,0} \\ a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,M-1} \end{pmatrix} ; \quad (b_{1,i}) = \begin{pmatrix} b_{1,0} \\ b_{1,1} \\ \vdots \\ b_{1,M-1} \end{pmatrix}$$

תהליך האיטרציה

החישוב מתחיל בפתרון $z_i^{(0)}$ נתון כל שהוא. הצבת פתרון זה וערכי הסדרה $h(n)$ במשוואות (3.35) יתן את הפתרון הראשון של המקדמים $a_{1,i}, b_{1,i}$. מתוך פתרון המקדמים $b_{1,i}^{(1)}$ יש לחשב את הקטבים החדשים $z_i^{(1)}$. התהליך נמשך עד אשר הקטבים מתכנסים לערך סופי, כלומר עד אשר:

$$\sum_{i=1}^M |z_i^{(i)} - z_i^{(j-1)}| \leq \epsilon$$

ד י ו ן

המשוואות (3.35) והביטויים עבור ערכי איברי המטריצות והוקטורים בהן פותחו למקרה הפרטי שעבורו השורשים z_i של הפולינום $D_1(z)$ הם ערכים ממשיים ושונים זה מזה. פיתוח המשוואות הנ"ל שיאפשר פתרון כללי גם עבור שורשים מרוכבים וגם למקרה של ריבוי שורשים מובא בנספח א'.
 חסרונה של השיטה שתוארה לעיל בכך שהיא מתחילה במינימיזציה של שגיאה ליניארית ולא השגיאה הריבועית. גם במהלך תהליך האיטרציה אין הקריטריון להפסקת האיטרציה מינימיזציה של השגיאה הריבועית, אלא התכנסות השורשים של הפולינום $D_1(z)$ לערך סופי. לכן, יכול להיוצר מצב שבו השורשים התכנסו לערך סופי, עבורו השגיאה הליניארית היא אכן מינימלית, אבל לא כן השגיאה הריבועית.
 חסרון נוסף הוא תלות השיטה בבחירת הפתרון ההתחלתי. אין קריטריון טוב לבחירה כזו ובחירה לא מתאימה עלולה לגרום לחוסר התכנסות.
 בנוסף לכך חסרה בשיטה זו דרגת הופש אחת לעומת השיטות האחרות, והיא - בחירת סדר המזנה N . סדר זה חייב להיות שווה ל- $M-1$.
 חסרון נוסף הוא חוסר היכולת לתכנן בשיטה זו מסננים שבהם השגיאה שווה כמעט או באופן זהותי לאפס. נניח שקיים מס n אשר עבורו:

$$E(z) = H(z) - G(z) \doteq 0$$

$$ES(z) \equiv 0$$

במקרה זה המשוואות (3.35)

(השגיאה שווה זהותית לאפס) כך שבמקום משוואות מתקבלים באזור האופטימום שויונות אשר אינם ניתנים לפתרון.

Gauss - Newton שיטת .3.2.2

שיטה זו מתוארת במאמרו של Bertran [23], בשימוש לחבורת מסננים ספרתיים. זו למעשה התאמה של שיטת Gauss - Newton הכללית לקירוב פונקציה כלשהיא במובן השגיאה הרבועית המינימלית, בהסתמך על אותות מבוזבזים והתגובה להם. הפיתוח הכללי של השיטה בתוך במאמרו של Hartley [24].
בניח שנתון פתרון התחלת, $0^{(0)}$ מסויים של מקדמי המסנן:

$$0^{(0)} = \{ a_0, a_1 \dots a_N, b_1, b_2 \dots b_M \}$$

פיתוח הביטוי לטור Taylor ושימוש בשני האיברים הראשונים בלבד יתן:

$$e^{(i)} = \sum_{n=0}^K \left[h(n) - g(n) \Big|_{0=0^{(i)}} - \sum_{k=0}^N g_{a_k}(n) \Big|_{0=0^{(i)}} \Delta a_k - \sum_{k=1}^M g_{b_k}(n) \Big|_{0=0^{(i)}} \Delta b_k \right]^2 \quad (3.37)$$

$$g_{a_k}(n) = \frac{\partial g(n)}{\partial a_k} \quad ; k = 0, 1 \dots N \quad \text{כאשר:}$$

$$g_{b_k}(n) = \frac{\partial g(n)}{\partial b_k} \quad ; k = 1, 2 \dots M$$

$$\Delta a_k = a_k - a_k^{(i)}$$

$$\Delta b_k = b_k - b_k^{(i)}$$

הסימון (i) מתייחס לערכי הקירוב ה-1, בשעה שפרמטר ללא סימון הנזכר משתנה במשוואה.

נפתח ביטויים לערכי הנגזרות $g_{a_k}(n)$, $g_{b_k}(n)$ את ערכי הסדרה $g(n)$ ניתן לחשב מתוך פונקציית התמסורת $G(z)$ בצורה הבאה:

$$g(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint G(z) z^{n-1} dz ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.38)$$

גזירת הביטוי (3.38) לפי הפרמטרים a_k , b_k נתון:

$$g_{a_k}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^{-k}}{D(z)} z^{n-1} dz ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.39a)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, M$$

$$g_{b_k}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{-z^{-k}}{D(z)} G(z) z^{n-1} dz ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.39b)$$

$$k = 1, 2, \dots, M$$

במקרה הפרטי:

$$g_{a_0}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{D(z)} z^{n-1} dz ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.40a)$$

$$g_{b_0}(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{1}{D(z)} G(z) z^{n-1} dz ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.40b)$$

הערה: $b_0=1$ לפי הגדרה, אבל בביטויים (3.39) אין מביעה לחשב בגזרת מדומה לפי b_0).

ניתן לראות מתוך הסתכלות בביטויים (3.39), (3.40) שהנגזרת של $g(n)$ לפי הפרמטר ה- k היא למעשה ערך בגזרת לפי הפרמטר מס' 0, מוזזת בזמן k מקומות, כלומר:

$$g_{a_k}(n) = g_{a_0}(n-k) \quad (3.41a)$$

$$g_{b_k}(n) = g_{b_0}(n-k) \quad (3.41b)$$

מכאן שחישוב הסדרות $g_{b_0}(n)$, $g_{a_0}(n)$ יתן אפשרות נוחה לחשב את ערך השגיאה $e^{(i)}$ ב-(3.37).

גזירת משוואת הרקורסיה (1.5) תתן את הביטויים המתאימים לסדרות הנ"ל.

$$g_{a_0}(n) = 1 - \sum_{i=1}^M b_i g_{a_0}(n-i); \quad n=0,1,\dots,(K+M) \quad (3.42a)$$

לקבלת $g_{b_0}(n)$ יש לשכתב את הביטויים (1.5) בצורה הבאה:

$$b_0 g(n) = a_n - \sum_{i=1}^M b_i g(n-i); \quad 0 \leq n \leq N$$

$$b_0 g(n) = - \sum_{i=1}^M b_i g(n-i); \quad N < n$$

מכאן ע"י גזירה:

$$g(n) + b_0 g_{b_0}(n) = - \sum_{i=1}^M b_i g_{b_0}(n-i); \quad n=0,1,\dots,(K+M)$$

כלומר (אחרי הצבת $b_0=1$)

$$g_{b_0}(n) = - \sum_{i=1}^M b_i g_{b_0}(n-i) - g(n); \quad n=0,1,\dots,(K+M) \quad (3.42b)$$

לחישוב השגיאה $e^{(i)}$ יש לדעת את הגדלים Δa_k , Δb_k .
 כקירוב ראשון יבחרו ערכים אלו כערכים הגורמים למינימיזציה של השגיאה $e^{(0)}$. גזירת פונקציית השגיאה תתן את מערכת הביטויים:

$$e_{a_k} = -2 \sum_{n=0}^K \left[h(n)-g(n) \Big|_{0=0(i)} - \sum_{j=0}^N g_{a_j}(n) \Big|_{0=0(i)} \Delta a_j - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^M g_{b_j}(n) \Big|_{0=0(i)} \Delta b_j \right] \cdot g_{a_k}(n) ; \quad k=0,1 \dots N \quad (3.43a)$$

$$e_{b_k} = -2 \sum_{n=0}^K \left[h(n)-g(n) \Big|_{0=0(i)} - \sum_{i=0}^N g_{a_i}(n) \Big|_{0=0(i)} \Delta a_i - \right. \\ \left. \sum_{i=1}^M g_{b_i}(n) \Big|_{0=0(i)} \Delta b_i \right] \cdot g_{b_k}(n) ; \quad k=1,2 \dots M \quad (3.43b)$$

כאשר: e_{a_k}, e_{b_k} הן נגזרות הפונקציה e לפי הפרמטרים a_k, b_k בהתאמה. לפתרון הגדלים $\Delta a_k, \Delta b_k$ יש לאפס את הנגזרות בנטויים (3.43). תתקבל מערכת המשוואות:

$$e_{a_k} = 0 ; \quad k=0,1 \dots N \quad (3.44a)$$

$$e_{b_k} = 0 ; \quad k=1,2 \dots M \quad (3.44b)$$

הצבת (3.42) לתוך (3.44) תתן את מערכת המשוואות:

$$\sum_{n=0}^K \left[\sum_{j=0}^N g_{a_j}(n) \Big|_{0=0(i)} \cdot \Delta a_j \right] \cdot g_{a_k}(n) + \sum_{n=0}^K \left[\sum_{j=1}^M g_{b_j}(n) \Big|_{0=0(i)} \cdot \Delta b_j \right] \cdot g_{a_k}(n) = \\ = \sum_{n=0}^K \left[h(n)-g(n) \Big|_{0=0(i)} \right] g_{a_k}(n) ; \\ k=0,1 \dots N \quad (3.45a)$$

$$\sum_{n=0}^K \left[\sum_{j=0}^N g_{a_j}(n) \Big|_{0=0(i)} \Delta a_j \right] \cdot g_{b_k}(n) + \sum_{n=0}^K \left[\sum_{j=1}^M g_{b_j}(n) \Big|_{0=0(i)} \Delta b_j \right] \cdot g_{b_k}(n) =$$

$$= \sum_{n=0}^K \left[h(n) - g(n) \Big|_{0=0(i)} \right] g_{b_k}(n) ;$$

k=1,2... M (3.45a)

ציתן לארגון את המשוואות בצורה וקטורית:

$$[V] \cdot \overline{\Delta a} + [L] \cdot \overline{\Delta b} = \overline{s} \quad (3.46)$$

כאשר: $[V]$ (בהסתמך על (3.41)) הינה מטריצה בגודל $N \times (M+N+1)$:

$$(v_{i,j}) = \begin{cases} \sum_{n=0}^K g_{a_0}(n-i) \cdot g_{a_0}(n-j) \Big|_{0=0(i)} ; & i=0,1... N \\ \sum_{n=0}^K g_{b_0}(n-k) \cdot g_{a_0}(n-j) \Big|_{0=0(i)} ; & i=N+1, N+2... N+M \end{cases} \quad (3.47a)$$

$$k=i-N$$

$$j=0,1... N$$

$[L]$ הינה מטריצה בגודל $M \times (M+N+1)$:

$$(l_{i,j}) = \begin{cases} \sum_{n=0}^K g_{a_0}(n-i) \cdot g_{b_0}(n-j) \Big|_{0=0(i)} ; & i=0,1... N \\ \sum_{n=0}^K g_{b_0}(n-k) \cdot g_{b_0}(n-j) \Big|_{0=0(i)} ; & i=N+1, N+2... N+M \end{cases} \quad (3.47b)$$

$$k=i-N$$

$$j=1,2... M$$

\bar{s} הגור וקטור באורך $N+M+1$

$$\bar{s}_i = \begin{cases} \sum_{n=0}^K [h(n)-g(n)] \cdot \xi_{a_0}(n-i) \Big|_{0=0}(i) ; & i=0,1,\dots, N \\ \sum_{n=0}^K [h(n)-g(n)] \cdot \xi_{b_0}(n-k) \Big|_{0=0}(i) ; & i=N+1, N+2, \dots, N+M \end{cases} \quad (3.47c)$$

$$k=i-N$$

מחור הבטויים לעיל ניתן להבחין כי:

$$l_{i,j} = v_{N+j,i} ; \quad i=0,1,\dots, N \quad (3.48)$$

$$j=1,2,\dots, M$$

פתרון המשוואות (3.46) יתן את השינוי בפתרון:

$$\Delta \bar{0} = \begin{pmatrix} \Delta \bar{a} \\ \Delta \bar{b} \end{pmatrix}$$

ואת הפתרון החדש:

$$\bar{0}(1) = \bar{0}(0) + \Delta \bar{0}$$

למשוואות (3.46) קיים פתרון אם קיימים שלושת התנאים

המפורטים במאמרו של Hartley [24]:

- א. הנגזרות $\xi_{0_k}(n)$ הן פונקציות רציפות של 0_k .
- ב. לכל מערכת מספרים d_i שונה מאפס קיים:

$$\sum_{n=0}^K \left[\sum_{k=0}^{M+N} d_k \xi_{0_k}(n) \right]^2 > 0$$

כאשר:

$$O_k = \begin{cases} a_k & ; k=0,1,\dots, N \\ b_{k-N} & ; k=N+1, N+2, \dots, N+M \end{cases}$$

התנאי חייב להתקיים במרחב הפרמטרים $\{O_k\}$.
ג. בגדיר גודל Q :

$$Q = \lim_{\bar{S}} \inf f(e)$$

כאשר \bar{S} הנו המרחב המשלים למרחב הפרמטרים O_k קיים וקטור $O^{(0)}$ במרחב S כך ש:

$$e [h(n), O^{(0)}] < Q$$

תהליך האיטרציה

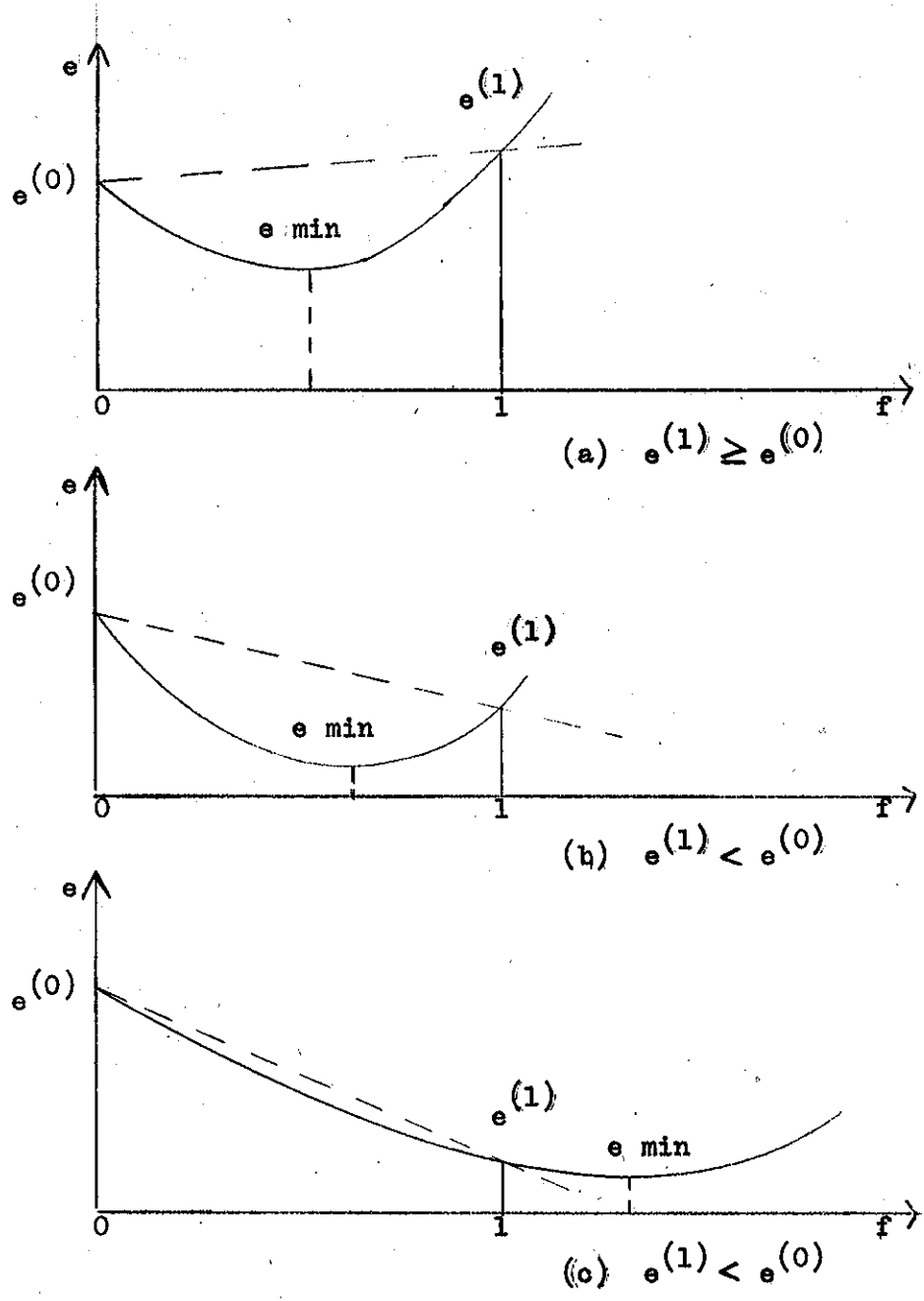
לאחר מציאת ΔO_k יש לחשב את השגיאה $e^{(1)}$

$$e^{(1)} = e(O_k + \Delta O_k, k=0,1,\dots, M+N)$$

אם $e^{(1)} \geq e^{(0)}$ קיים מינימום מקומי של e בתחום: $O^{(0)}, O^{(1)}$
 $(O^{(1)} = O^{(0)} + \Delta O)$ ויש להקטין את ΔO ע"י הכפלתו בגורם $f < 1$
 יש לחזור על חישוב השגיאה בצורה איטרטיבית עד לקבלת
 בקורת המינימום.

אם $e^{(1)} < e^{(0)}$ השגיאה יכולה להמצא בתחום $\{O^{(0)}, O^{(1)}\}$
 או מעבר לתחום זה. יש לבצע חיפוש איטרטיבי באחד
 התחומים הנ"ל.

צירוף מס' (3.2) מתאר את האפשרויות השונות:
(הקו הישר המחבר את $e^{(0)}$ עם $e^{(1)}$ מתאר את החבהגות
פונקצית הקירוב של השגיאה שהיא פיתוח השגיאה לטור Taylor
והכללת שגי האיברים הראשונים בלבד).



ציור מס' 3.2: תהליך האופטימיזציה: אפשרויות שונות.

Fig. No. 3.2: Optimization process: Various possibilities.

(הערה: התאור להלן שונה במקצת מפיתוח של Bertran [23]. אפשרות

(b) בציור מס' 2 לא בכללה בפיתוח זה).

דיון

השיטה שתוארה לעיל מוצאת מינימום מקומי של השגיאה הריבועית e . מסיבה זו הצלחת תהליך האיטרציה תלויה בבחירת הפתרון ההתחלתי $0^{(0)}$. אם בחירת פתרון זה מפעילה את תהליך האיטרציה במישור S אשר אינו כולל את נקודת המינימום האמיתית של e - לא תהיה השגיאה e הסופית שתחקבל מינימלית באופן מוחלט.

3.2.3. סיכום

- השיטות האיטרטיביות שתוארו לעיל תלויות מאוד בבחירת הנאי התחלה בכוונים. אי-בחירת הנאים כאלו עלולה לגרום להתנדדות הפתרון או למציאת מינימום מקומי ולא אופטימום.

- בשיטת Aigrain-Williams קריטריון ההתכנסות הוא התכנסות השורשים של פולינום המכנה לערך סופי. בכך היא נחרתה במידת מה משיטת Gauss-Newton, בה מושג מינימום מקומי של פונקציית השגיאה עצמה.

- שתי השיטות מבצעות איטרציה על המקדמים a_k, b_k בהתחשב בכל איברי הסדרה הרצויה $h(n)$ מבלי להדגיש איברים מסויימים בחשיבותם. זאת בניגוד לשיטות הקירוב הישירות שתוארו ב-3.1 לעיל.

3.2.4. הערה

לקראת סיום כתיבת עבודה זו הופיע בספרות מאמרם של Mullis, Roberts [26], אשר דן בשימוש במידע מסדר שני

כחלק מהבתרובים לקירוב תגובה נחובה להלם ע"י מסבן
רקורסיבי. מידע זה הינו פונקציות האוטוקורלציה של
התגובה הנחובה, מחושבות לאורך סדרה $h(n)$ גדול מאורך
הסדרה שבו משחמשים לשאר החישובים. חכנון מסבן בתחום
למידע זה ובהסתמך על סדרה $h(n)$ נחובה כמקודם מבטיח
קבלת מסבן יציב.

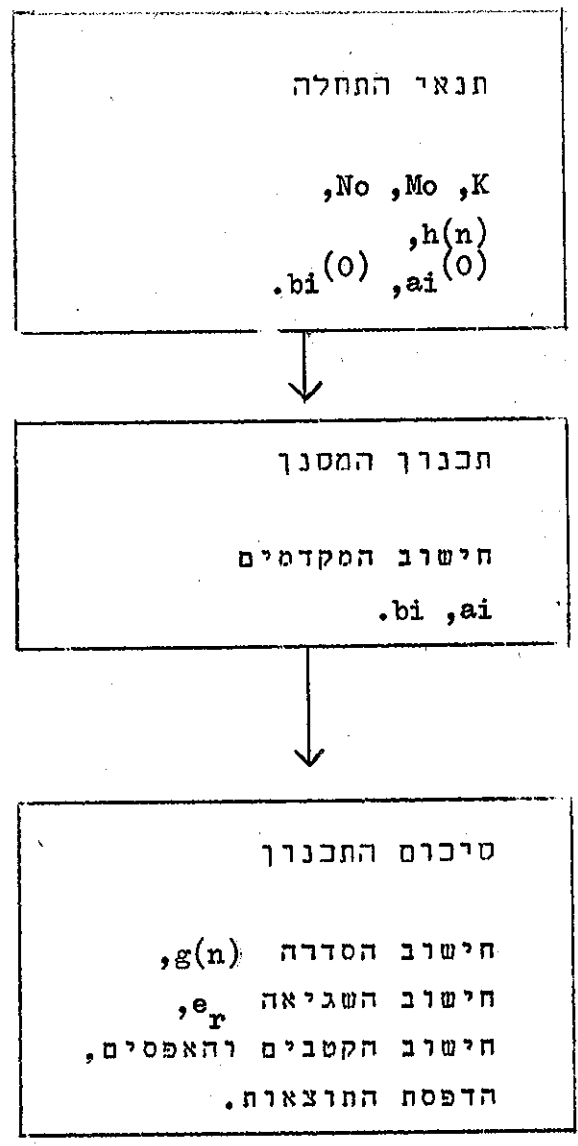
4. אלגוריתמים חישוביים

4.1. כללי

כל האלוגריחמים החישוביים לתכנון מסננים ספרתיים בשיטות שתוארו לעיל בנויים משלושה חלקים עיקריים, כפי שמתואר בצירוף מס' 4.1:

- א. קביעת תנאי התחלה: אורך הסדרה K , סדר המכנה ההתחלתי סדר המונה ההתחלתי, חישוב הסדרה $h(n)$ (במקרה שזו סדרה הניתנת לחישוב אנליטי) או קריאת איברי הסדרה מתוך הבחורים, וקריאת הקירוב הראשון של המקדמים $ai^{(0)}$, $bi^{(0)}$ (בשיטות החישוב האיטרטיביות).
- ב. חישוב המקדמים ai , bi בשיטות השונות.
- ג. חישוב הקטבים והאפסים של המסנן שתוכנן, תגובתו $g(n)$ והשגיאה הריבועית היחסית e_r והדפסת התוצאות.

התכניות נכתבו בשפת התכנות FORTRAN IV וחוד שימוש בתכניות
.System / 360 Scientific Subroutine Package



ציור 4.1: אלגוריתם כללי לחישוב מסנן מסוגים ספרתיים רקורסיביים.

Fig. 4.1: General computation algorithm for the design of digital recursive filters.

בסעיפים להלן יובאו תאורים של האלגוריתמים החישוביים לארבע שיטות התכנון שתוארו בפרק 3 לעיל. מכיוון שלא ניתן קריטריון חד משמעי לבחירת הסדרים M ו- N של המסבן בשיטות השונות מנוצעים כל החישובים בצורה חוזרת עבור סדרים M שונים, ועבור סדר המונה N המסחנה $M - N = 0$ ועד $N = M$ (או במקרים מסויימים $N = M - 1$).

4.2. שיטת השגיאה הריבועית

השיטה שתוארה בסעיף 3.1.1 מורכבת משני חלקים עיקריים: חישוב המקדמים b_i וחישוב המקדמים a_i

חישוב המקדמים b_i

בחישוב זה יש לחשב את מטריצת האוטוקורלציה $[R]$. זו מטריצה סימטרית ואפשר לחשב רק כמחצית מאיבריה. בנוסף לכך יש לחשב את וקטור האוטוקורלציה \bar{r}_0

היפוך המטריצה $[R]$ והכפלת המטריצה ההפוכה בווקטור \bar{r}_0 יחן את המקדמים b_i

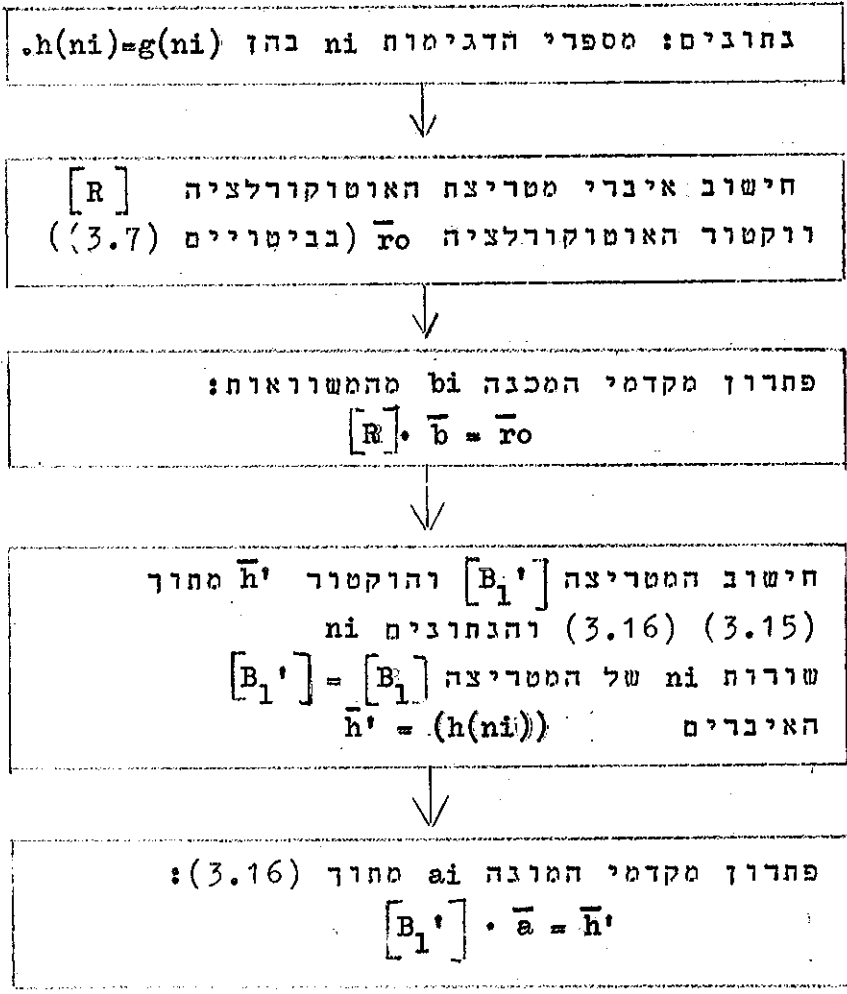
חישוב המקדמים a_i

התהליך שנבחר לחישוב a_i נועד לאפשר השוואת דגימות כלשהן $g(n)$ לדגימות $h(n)$ המתאימות (ראה (3.17) לעיל). לשם כך יש ליצור את המטריצה $[R]^{-1}$, להוציא ממנה את השורות הרצויות ולהכפיל את המטריצה שהתקבלה בווקטור איברי הסדרה $\{h(n)\}$ המתאימים.

לביצוע חישוב זה יש לספק כתבאי התחלה את מספרי הדגימות

הרצויות: $n_0, n_1 \dots n_N$

האלוגריתם החישובי מתואר בצירור מס' 4.2 להלן:



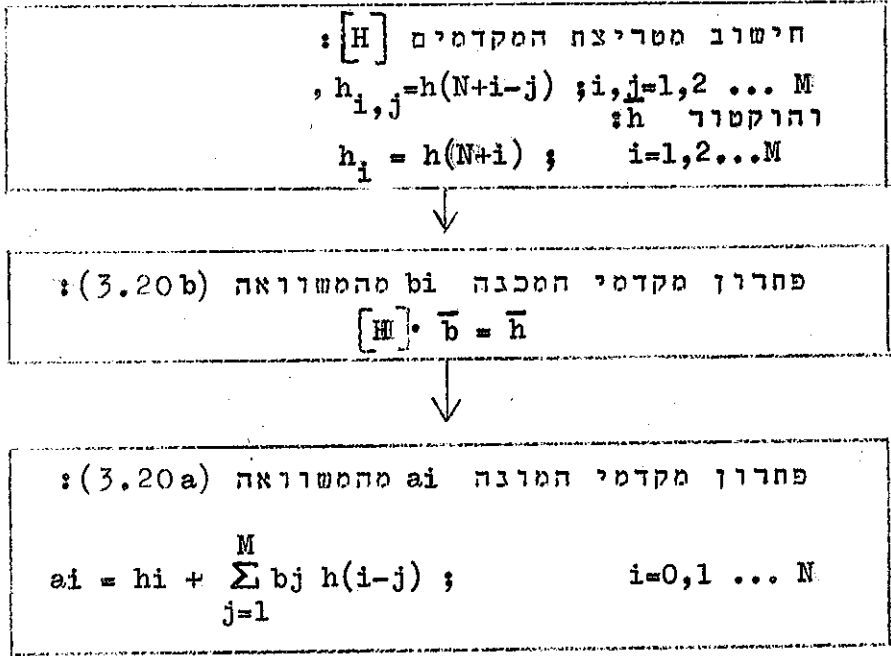
צירור מס' 4.2: שיטת השגיאה הריבועית המורחבת: אלוגריתם חישובי.

Fig. No. 4.2: Modified square error method: computation algorithm.

4.3. קירוב Padé

השיטה שתוארה בסעיף 3.1.2 ניתנה לחישוב בשלב אחד:
 פתרון בו זמני של משוואות (3.20), אולם בוח יותר
 מבחינת זמן החישוב לפתור את מערכת המשוואות (3.20b)
 תחילה, לקבלת המקדמים b_i ומהם לפתור את המקדמים a_i
 בצורה פשוטה ביותר.
 הדבר מונע את הצורך בטיפול במטריצות בגודל $M+N+1$
 ומאפשר טיפול במטריצות בגודל M, N בלבד.

האלגוריתם החישובי מתואר בצירור מס' 4.3 להלן:



צירור מס' 4.3: קירוב Padé: אלגוריתם חישובי.

Fig. No. 4.3: Padé approximant: computation algorithm.

4.4 שיטת Aigrain - Williams

א. בשיטה שתוארה בסעיף 3.2.1 לעיל יש צורך בתנאי התחלה למקדמים b_{1i} או לקטבים של המסגון במישור $z: z^{-1}$. אם נתונים מקדמי המסגון יש לחשב מתוכם את הקטבים. תנאי ההתחלה יכולים להיות המקדמים שהתקבלו באחת השיטות הישירות לעיל או שורשים כלשהם כך ש: $|z_i| > 1$ בחירת המקדמים של אחת השיטות הישירות דורשת שלב של התאמת המקדמים b_i לצורה b_{1i} , בהתאם ל (3.28a) לעיל.

ב. עם קבלת השורשים z_i יש לבצע מירובם לשורשים ממשיים ולשורשים מרוכבים. המיון נעשה ע"י יצירת שני וקטורי מספרים הצמודים לשורשים: \bar{s}, \bar{n} . הוקטור \bar{s} כולל את הריבוי של השורשים z_i . אם לשורש z_i ריבוי m יאוחסן מספר זה במקום ה- i של הוקטור \bar{s} . לכל השורשים האחרים z_i שעבורם קיים $z_j = z_i$ יהיה ערך איבר הריבוי -1 . כך לא יהיה צורך לטפל בהם בשעת חישוב איברי המטריצה. הוקטור \bar{n} מציין אם השורשים מרוכבים או ממשיים בלבד. עבור שורש z_i ממשי $n_s(i)=0$. עבור שורש z_i מרוכב $n_s(i)=1$. מכיוון שמקדמי פולינום המכנה ממשיים הרי שקיום שורש z_i מרוכב מבטיח קיום שורש z_j צמוד ל- z_i , כלומר $z_i = z_j^*$. לאותו שורש z_j ינתן איבר -1 . כך שוב ימנע טיפול בשורש זה בשעת חישוב איברי המטריצה.

מגיעת הטיפול ע"י סימון שורשים באיבר מתאים בוקטור \bar{s} חיונית למגיעת יצירת שוררות זהות במטריצות השונות בפתרון המשוואות למציאת המקדמים $a_{1i}; b_{1i}$.

זיהוי שורשים זהים או צמודים נעשה ע"י מציאת ההפרש בין החלקים הממשיים של השורשים ובין החלקים המדומים.

אם הפרשים אלו קטנים בערכם המוחלט מערך גתון $-dz$ השורשים זהים. אם הדבר כך לגבי החלקים הממשיים של השורשים אבל לא לגבי החלקים המדומים - צבדק ההפרש בין הערכים המוחלטים של החלקים המדומים של השורשים. אם הפרש זה קטן מהערך הגתון $-dz$ השורשים צמודים.

ג. לפתרון המשוואות יש לחשב את שורות המטריצות $[V]$, ו- $[L]$ ואיברי הוקטור \bar{s} בהתאם לביטויים הכלליים (A.7) או (A.8) (לשורשים ממשיים או מרוכבים בהתאמה). מתוך הסתכלות בביטויים אלו ניתן להבחין באפשרות לביצוע חישוב האיברים בצורה רקורסיבית, ונכך צמצום המאמץ החישובי.

שורשים ממשיים

יש ליצור וקטור \bar{z}_n הכולל את הזקות השורש $(k=1,2 \dots M)$

$$z_{n_i} = z_k^{-i} ; \quad i=0,1 \dots (M-1) \quad (4.1)$$

החישוב יכול להיעשות בצורה רקורסיבית:

$$z_{n_0} = 1 \quad (4.2a)$$

$$z_{n_1} = z_k^{-1} \quad (4.2b)$$

$$z_{n_i} = z_{n_{i-1}} \cdot z_{n_1} ; \quad i=2,3 \dots K \quad (4.2c)$$

איברי המטריצה $[V]$ יחושבו בצורה הבאה (מחור (A.7) :

$$v_{k,j} = Z n_{j-1} ; \quad j=1,2 \dots M \quad (4.3a)$$

$$v_{k+c,1} = 0 ; \quad c=1,2 \dots (2m-1) \quad (4.3b)$$

$$v_{k+c,j} = -v_{k+c-1,j} \cdot Z n_1 \cdot (j+c-2) ; \quad j=2,3 \dots M \quad (4.3c)$$

$$c=1,2 \dots (2m-1)$$

התהליך המתואר ב-(4.3) מצריך שתי פעולות כפל בלבד לקבלת כל איבר מטריצה. חישוב ישיר היה דורש מספר רב בהרבה של פעולות כפל.

בצורה דומה ניתן לחשב את איברי המטריצה $[L]$ והוקטור \bar{s} :
 מגדירים וקטור עבודה $\bar{1}_0$ באורך $(2m)$:
 תנאי ההחלה מוגדרים כ:

$$l_{k+c,j} = 0 ; \quad j=1,2 \dots M \quad (4.4a)$$

$$c=0,1,2 \dots (2m-1)$$

החישוב מתחיל ב $n=0$. איברי הוקטור $\bar{1}_0$ הם:

$$l_{00} = -h(0) Z n_1 \quad (4.5a)$$

$$l_{0c} = -l_{0,c-1} \cdot Z n_1 \cdot c ; \quad c=1,2 \dots (2m-1) \quad (4.5)$$

עבור $j=2$ מחשבים:

$$l_{k+c,j} = l_{o_o} \quad c=0,1,2 \dots (2m-1) \quad (4.6)$$

בגמר החישוב מגדילים את j ב-1 ומחשבים את איברי \bar{l}_o החדשים:

$$l_{o_o} = l_{o_o} \cdot Zn_1 \quad (4.7 a)$$

$$l_{o_c} = l_{o_o} \cdot (j+c-2) \cdot Zn_1 ; \quad c=1,2 \dots (2m-1) \quad (4.7 b)$$

חוזרים על החישובים (4.6), (4.7) עד אשר $j=M+1$ (כולל).
עוברים לחישוב עבור $n=1$:

$$l_{o_o} = -h(n) Zn_n \quad (4.8 a)$$

$$l_{o_c} = -l_{o_{c-1}} \cdot (n+c-1) \cdot Zn_1 \quad (4.8 b)$$

עבור $j=1$ מחשבים:

$$l_{k+c,j} = l_{k+c,j} + l_{o_o} \quad (4.9)$$

בגמר החישוב מגדילים את j ב-1 ומחשבים את איברי \bar{l}_o החדשים:

$$l_{o_o} = l_{o_o} \cdot Zn_1 \quad (4.10a)$$

$$l_{o_c} = l_{o_o} \cdot (n+j+c-2) \cdot Zn_1 ; \quad c=1,2 \dots (2m-1) \quad (4.10 b)$$

חוזרים על החישוב (4.9), (4.10) עד $j=M+1$

מבצעים את החישובים (4.8), (4.9), (4.10) עבור n גדול והולך ועד $n=K$ איברי הוקטור \bar{s} מתקבלים תוך כדי החישוב:

$$(s_{k+c}) = -1_{k+c, M+1} \quad (4.11)$$

שורשים מרוכבים

גם כאן יוצרים וקטור חזקת \bar{Zn} :

$$Zn_i = |z_k|^{-1} ; \quad i=0,1 \dots K \quad (4.12)$$

החישוב יכול להיעשות בצורה רקורסיבית כמתואר ב-(4.2) לעיל. בנוסף לכך יש ליצור וקטורים טריגונומטריים \bar{Cn} , \bar{Sn}

$$Sn_i = \sin (i \cdot \theta_k) \quad (4.12a)$$

$$Cn_i = \cos (i \cdot \theta_k) ; \quad i=0,1,2 \dots K+M+m-1 \quad (4.12b)$$

כאשר: θ_k הוא הארגומנט של השורש z_k . איברי המטריצה $[v]$ יחושבו בצורה רקורסיבית. תחילה יחושבו ערכי הביטויים (3.55a), (3.55b) לעיל ללא הפונקציות הטריגונומטריות:

$$v_{k,j} = Zn_{j-1} ; \quad j=1,2 \dots M \quad (4.13a)$$

$$v_{k+p,j} = 0 ; \quad p=1,2 \dots (2m-1) \quad (4.13b)$$

$$v_{k+2c,j} = -v_{k+2c-2,j} \cdot Zn_1 \cdot (j+c-1); \quad (4.13c)$$

$$c=1,2 \dots (m-1)$$

$$j=1,2 \dots M$$

עתה יחושבו ערכי השורות עם הביטויים הטריגונומטריים
המתאימים:

$$v_{k+2c+1,j} = -v_{k+2c,j} \cdot Sn_{j+c-1} \quad (4.14 a)$$

$$v_{k+2c,j} = v_{k+2c,j} \cdot Cn_{j+c-1} ; \quad \begin{array}{l} c=0,1 \dots m-1 \\ j=1,2 \dots M \end{array} \quad (4.14 b)$$

איברי המטריצה $[L]$ והוקטור \bar{S} יחושבו בצורה דקורסיבית דומה:
חזאי ההתחלה הם:

$$l_{k+p,j} = 0 ; \quad \begin{array}{l} p=0,1 \dots ((2m-1)) \\ j=1,2 \dots M \end{array} \quad (4.15)$$

החישוב מתחיל ב $n=0$: איברי הוקטור \bar{l}_0 הם:

$$l_{00} = -h(0) \cdot Zn_1 \quad (4.16 a)$$

$$l_{0c} = -l_{0c-1} \cdot Zn_1 \cdot c ; \quad c=1,2 \dots (m-1) \quad (4.16 b)$$

עבור $j=2$ מחשבים:

$$l_{k+2c,j} = l_{k+2c,j} + l_{0c} \cdot Cn_{j+c-1} \quad (4.17 a)$$

$$l_{k+2c+1,j} = l_{k+2c+1,j} + l_{0c} \cdot Sn_{j+c-1} \quad (4.17 b)$$

$$c=0,1 \dots (m-1)$$

סקדמים את j -ב-1 ומחשבים את איברי \bar{l}_0 החדשים:

$$l_{00} = l_{00} \cdot Zn_1 \quad (4.18a)$$

$$l_{0c} = l_{0c} \cdot (j+c-2) \cdot Zn_1 ; \quad c=1,2 \dots (m-1) \quad (4.18b)$$

חוזרים על החישוב (4.17), (4.18) עד $j=M+1$ (כולל).
עתה יש לחשב עבור $n=1$:

$$l_{00} = -h(n) \cdot Zn_n \quad (4.19a)$$

$$l_{0c} = -l_{0c} \cdot (n+c-1) \cdot Zn_1 ; \quad c=1,2 \dots (m-1) \quad (4.19)$$

עבור $j=1$ מחשבים:

$$l_{k+2c,j} = l_{k+2c,j} + l_{0c} \cdot C_{n+j+c-1}^n \quad (4.20a)$$

$$l_{k+2c+1,j} = l_{k+2c+1,j} + l_{0c} \cdot S_{n+j+c-1}^n \quad (4.20b)$$

$$c=0,1 \dots (m-1)$$

בגמר החישוב מגדילים את j -ב-1 ומחשבים את איברי \bar{l}_0 החדשים:

$$l_{00} = l_{00} \cdot Zn_1 \quad (4.21a)$$

$$l_{0c} = l_{0c} \cdot (n+j+c-2) \cdot Zn_1 ; \quad c=1,2 \dots (m-1) \quad (4.21b)$$

חוזרים על החישובים (4.20), (4.21) עד אשר $j=M+1$ (כולל).
 מבצעים את החישובים (4.19), (4.20), (4.21) לכל n
 עד $n=K$.
 איברי הוקטור \bar{s} מתקבלים מתוך החישוב:

$$s_{k+2c} = -l_{k+2c, M+1} \quad (4.22a)$$

$$s_{k+2c+1} = -l_{k+2c+1, M+1} ; \quad c=0, 1 \dots (m-1) \quad (4.22b)$$

בגמר חישוב המטריצות $[V]$, $[L]$ והוקטור \bar{s} לכל שורשי פולינום המכנה יש לפתור את המשוואות (A.6):

$$[V] \cdot \bar{a}_1 + [L] \cdot \bar{b}_1 = \bar{s}$$

לקבלת הערכים החדשים של b_{1i} .

ד. לאחר קבלת מקדמי פולינום המכנה יש למצוא את השורשים החדשים של הפולינום z_{1j} . מחושב סכום הערכים המוחלטים של ההפרשים בין השורשים שהתקבלו בחישוב הקודם לשורשים החדשים:

$$f_p = \sum_{i=1}^M \left[\left| \operatorname{Re}(z_i) - \operatorname{Re}(z_{1i}) \right| + \left| \operatorname{Im}(z_i) - \operatorname{Im}(z_{1i}) \right| \right] \quad (4.23)$$

ה. אם סכום זה קטן מערך נתון dz מסתיים התהליך. מקדמי המסנן הרקורסיבי הם b_{1i} , a_{1i} . אם $f_p \geq dz$ מבצעים החלפה של השורשים: במקום השורשים הקודמים שבעזרתם בוצע החישוב עד

עתה מוכנסים השורשים החדשים, כלומר:

$$z_{0i} = z_{1i} ; \quad i=1,2 \dots M$$

יש לבצע את ב. ג. ד. לעיל עד לקבלת החכנסות הטהורה, כלומר עד אשר:

$$f_p < \epsilon$$

7. עם קבלת ההחכנסות יש לבצע המרה של המקדמים $\{b_{1i}\}, \{a_{1i}\}$ לצורתם המקובלת על פי (3.28):

$$b_i = \frac{b_{1,i}}{b_{1,0}} \quad i=1,2 \dots M$$

$$a_i = \frac{a_{1,i}}{b_{1,0}} \quad i=0,1 \dots M-1$$

האלגוריתם החישובי מתואר בצירור מס' 4.4 להלן:

תוצאי החחלה $(\text{Re}(z_i), \text{Im}(z_i))$

תוצאי החחלה b_i

היפוך המקדמים:
$$b_{1,i} = \frac{b_i}{b_M}$$

פתרון הפולינום:
$$\sum_{i=0}^{M-1} b_{1,i} X^i + X^M = 0$$

לקבלת פתרון ראשון לקטבים z_i
 $\text{Re}(z_i), \text{Im}(z_i)$

מיון הקטבים z_i
$$o(i) = \begin{cases} m & \text{אז} \\ -1 & \text{אז} \end{cases}$$

$$ns(i) = \begin{cases} 1 & \text{שורש מרוכב} \\ 0 & \text{שורש ממשי} \end{cases}$$

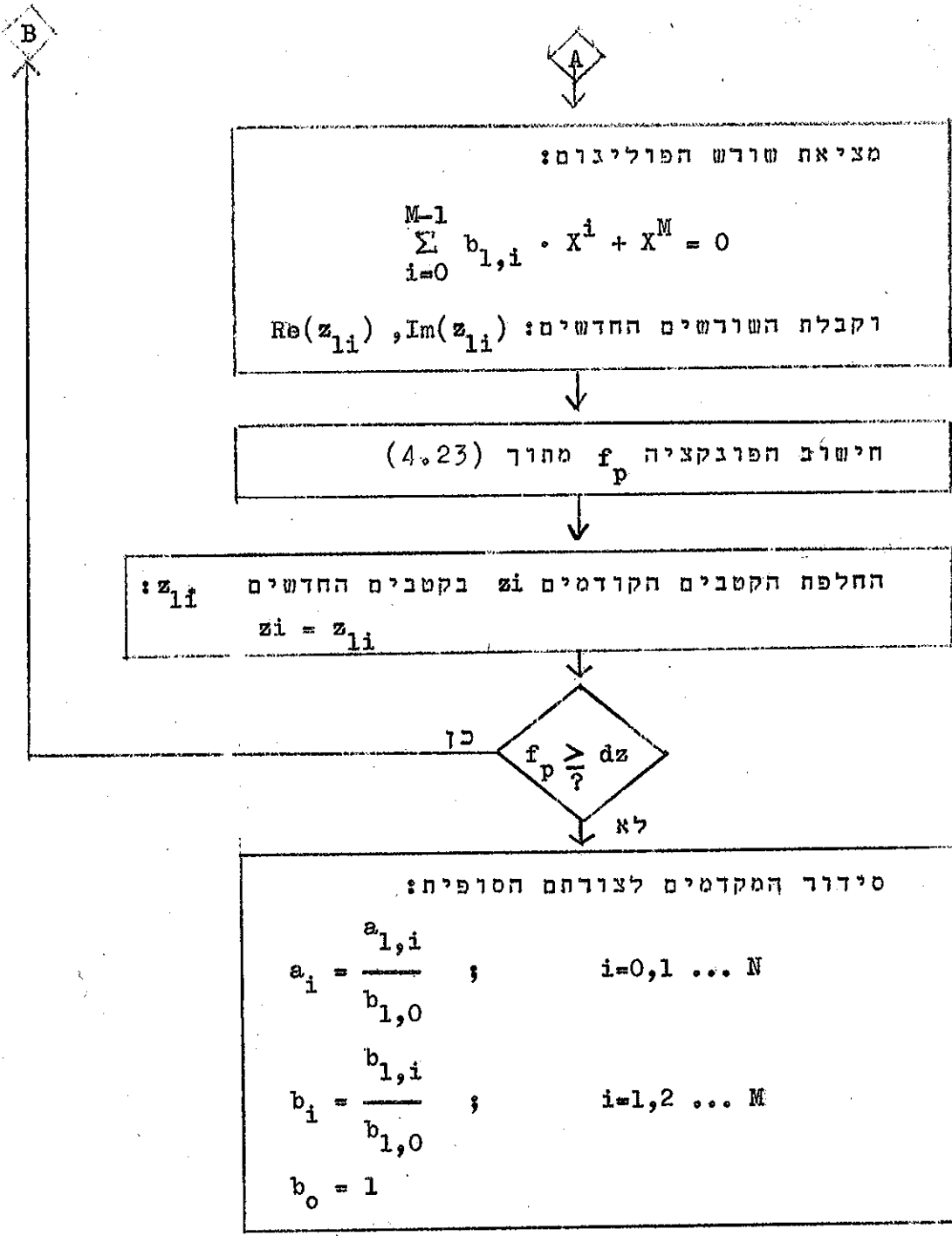
חישוב המטריצות $[V]$, $[L]$ וחוקטור \bar{s}
בצורה רקורסיבית על פי הביטויים (4.1) עד (4.22).

פתרון המשוואות (A.6)
$$[V] \cdot \bar{a}_1 + [L] \cdot \bar{b}_1 = \bar{s}$$

לקבלת $b_{1,i}$ חדש

B

A



ציור מס' 4.4: שיטת Aigrain-Williams : אלגוריתם חישוב.

Fig. No. 4.4: Aigrain-Williams method: computation algorithm.

Gauss - Newton שיטת 4.5

א. בשיטה זו יש להתחיל מתנאי התחלה בתנאים $a_i(0)$, $b_i(0)$.
 תנאים אלו יכולים להתקבל מחישוב באחת השיטות הישירות
 שתוארו לעיל. בסמן:

$$x_0(0) = \{ a_0(0), a_1(0), \dots, a_N(0), b_1(0), b_2(0), \dots, b_M(0) \}$$

ב. מוגדרת השגרה ERROR. שגרה זו מקבלת כמבוא את: פתרון
 הפרמטרים $x_0(i)$, את הפרש הפתרונות $\Delta_0(i)$, את סדרת
 המבוא $\{h(n)\}$, אורך הסדרה K, את סדר המונח N וסדר המכנה M.

במוצא השגרה מתקבלים: ערכי הסדרה
 $g(n) \Big|_{0=0}^{(i+1)}$ ערכי הנגזרות

$$g_{b_k}(n) \Big|_{0=0}^{(i+1)}, \quad g_{a_k}(n) \Big|_{0=0}^{(i+1)}$$

ערכי הפרמטרים $x_0(i+1)$, ערך השגיאה $e(i+1)$ ופרמטר נוסף
 s המתאר את שפוע פונקציית השגיאה e בקרבת הפתרון ה- $i+1$.
 מבנה השגרה יתואר בהמשך.

ג. לקבלת הגדלים $\Delta_0(0)$ משתמשים בשגרה ERROR. כמבוא מקבלת
 השגרה את הפתרון $x_0(0)$. בנוסף לכך מוכנס הפתרון $\Delta_0(0) = 0$.

מחשבים את איברי המטריצות $[L]$, $[V]$ והוקטור \bar{s} תוך שימוש
 בקשר (3.47) ובערכי הסדרות $g(n)$, $g_{a_0}(n-k)$, $g_{b_0}(n-k)$.
 שהתקבלו מחישוב השגרה.

פתרון המשוואות (3.46) יתן את הפתרון $\Delta \bar{0}^0$

ד. מחשבים את השגיאה $e^{(1)}$ בעזרת השגרה אם $s_1 \geq 0$ המינימום הוא בתחום

$$\{\bar{o}^{(0)}, \bar{o}^{(1)}\}$$

אם $s_1 < 0$ קיים מינימום מעבר לתחום

$$\{\bar{o}^{(0)}, \bar{o}^{(1)}\}$$

במקרה זה יש להציב:

$$\bar{o}^{(0)} = \bar{o}^{(1)} \quad (4.24 a)$$

$$e^{(0)} = e^{(1)} \quad (4.24 b)$$

ה. מנקודה זו יש להמשיך את החיפוש. ניתן לחזור על שלבים ג, ד, לעיל לחנאי ההתחלה (4.24). אפשרות אחרת לחיפוש מהיר היא הכפלת הוקטור $\Delta \bar{o}^{(0)}$ בגודל f . ובחירת הערך החדש כשינוי הפתרון $\Delta \bar{o}^{(0)}$:

$$\Delta \bar{o}^{(0)} = f \cdot \Delta \bar{o}^{(0)} \quad (4.45)$$

יש לבצע את שלב ד לעיל עד לקבלת האינטרוול

$$\{\bar{o}^{(0)}, \bar{o}^{(1)}\}$$

שבו מתקיימים התנאים להמצאת המינימום.

ו. לאחר מציאת האינטרוול בו נמצא המינימום יש לבצע חיפוש בתוך האינטרוול. השיטה שנבחרה כאן היא חיפוש Fibonacci [25]. מנרמלים את אינטרוול החיפוש כך ש- $\bar{o}^{(0)}$ יתאים לערך כופל $f_0 = 0$, ו- $\bar{o}^{(1)}$ יתאים לערך כופל $f_1 = 1$.

בשיטת Fibonacci יש לחשב עד שני ערכים בתוך אינטרוול החיפוש בכל איטרציה. המספר הכולל של האיטרציות קובע את גודל אינטרוול החיפוש המינימלי שבו נפסקת האיטרציה. יש לחשב את מספרי Fibonacci

$$d_0 = 1 \quad (4.26a)$$

$$d_1 = 1 \quad (4.26b)$$

$$d_i = d_{i-1} + d_{i-2} \quad (4.26c)$$

ז. עבור H איטרציות יש לחשב את ערך שפוע השגיאה $(s1_2)$ בנקודה:

$$f_2 = \frac{d_{3H-2}}{d_{3H}}$$

כלומר:

$$\Delta \bar{0}(1) = \Delta \bar{0}^0 \cdot f_2$$

ח. אם $s1_2 \geq 0$ המינימום בתחום $\{\bar{0}(0), \bar{0}(2)\}$

$$(\bar{0}(2) = \bar{0}(0) + f_2 \cdot \Delta \bar{0}(0))$$

אם $s1_2 < 0$ יש לחשב את שפוע השגיאה בנקודה:

$$f_3 = \frac{d_{3H-1}}{d_{3H}}$$

אם $s1_3 \geq 0$ המינימום נמצא בתחום $\{\bar{0}(2), \bar{0}(3)\}$

$$(\bar{0}(3) = \bar{0}(0) + f_3 \Delta \bar{0}(0))$$

אם $s_3 < 0$ המינימום נמצא בתחום $\{\bar{o}(3), \bar{o}(1)\}$

ט. התהליך מנוצע בצורה איטרטיבית. נסמן את האינטרוול לאחר האיטרציה מספר i כ:

$$\{\bar{o}(0)^i, \bar{o}(1)^i\}$$

כאשר:

$$\bar{o}(0)^i = f_0^i \cdot \Delta \bar{o}(0)$$

$$\bar{o}(1)^i = f_1^i \cdot \Delta \bar{o}(0)$$

בחור האינטרוול $f_1^i - f_0^i$ מהשניים:

$$f_2^i = \frac{d_{3H-3i-2}}{d_{3H}} \cdot (f_1^i - f_0^i) + f_0^i \quad (4.27 a)$$

$$f_3^i = \frac{d_{3H-3i-1}}{d_{3H}} \cdot (f_1^i - f_0^i) + f_0^i \quad (4.27 b)$$

חוזרים על שלב ח' לאיחור האינטרוול החדש בו נמצא המינימום.

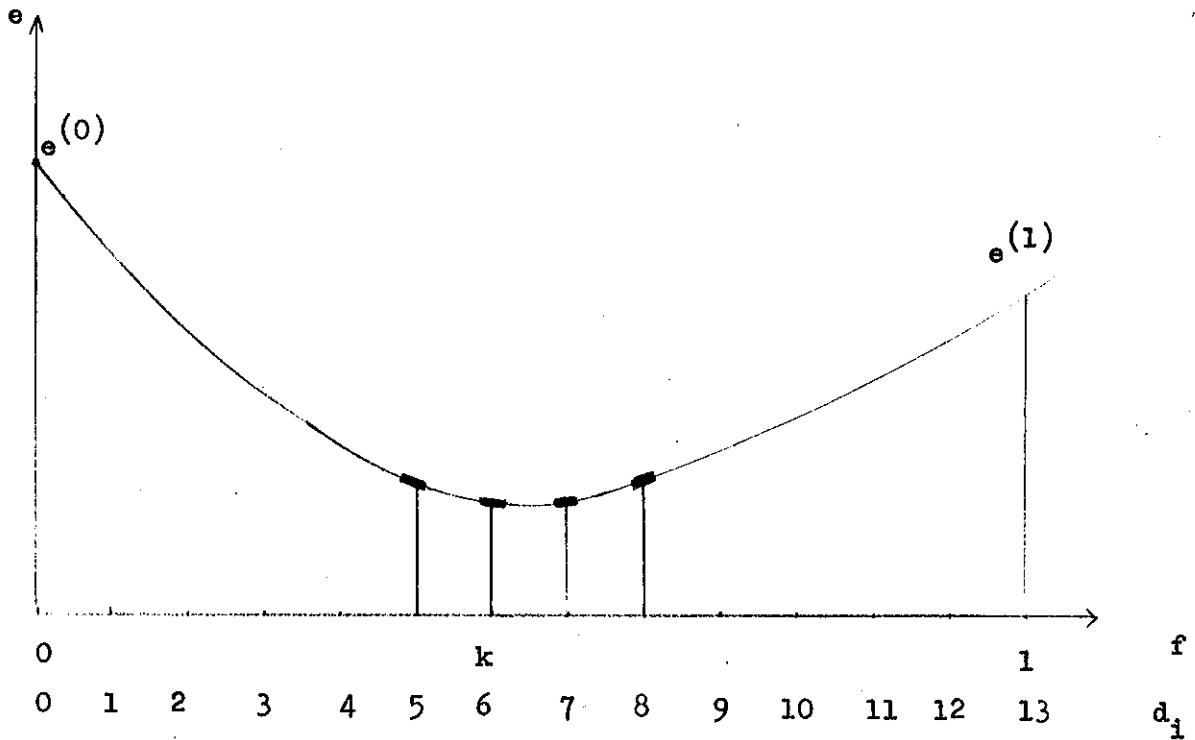
י. באיטרציה האחרונה מחולק האינטרוול לשני חלקים שווים ובודקים את שיפוע הפונקציה e באמצע האינטרוול. על פי שיפוע זה קובעים את מקום המינימום. הערך המינימלי של הפונקציה מחושב כערך הקיצוני באינטרוול זה.

ביצוע 6 איטרציות מאפשר את איחור המינימום באינטרוול שערכו כ-1% מערך האינטרוול ההתחלתי.

ציור מס' 4.5 מדגים את תהליך החיפוש עבור 2 איטרציות.

מספרי Fibonacci למקרה זה הם:

i	0	1	2	3	4	5	6
d_i	1	1	2	3	5	8	13



ציור מס' 4.5: חיפוש Fibonacci

Fig. No. 4.5: Fibonacci search.

שגרה ERROR

$N, M, K, h(n), \Delta \bar{0}^{(i)}, \bar{0}^{(i)}$

כאמור, מנרא השגרה הם:

א. תחילה מחשבת השגרה את הוקטור $\bar{0}^{(i+1)}$ ווקטור נוסף $\bar{0}^2$

שיטת להגדרת השיפוע:

$$\bar{0}(i+1) = \bar{0}(i) + \Delta \bar{0}(i) \quad (4.28a)$$

$$\bar{0}^2 = \bar{0}^1 + 1.01 \cdot \Delta \bar{0}(i) \quad (4.28b)$$

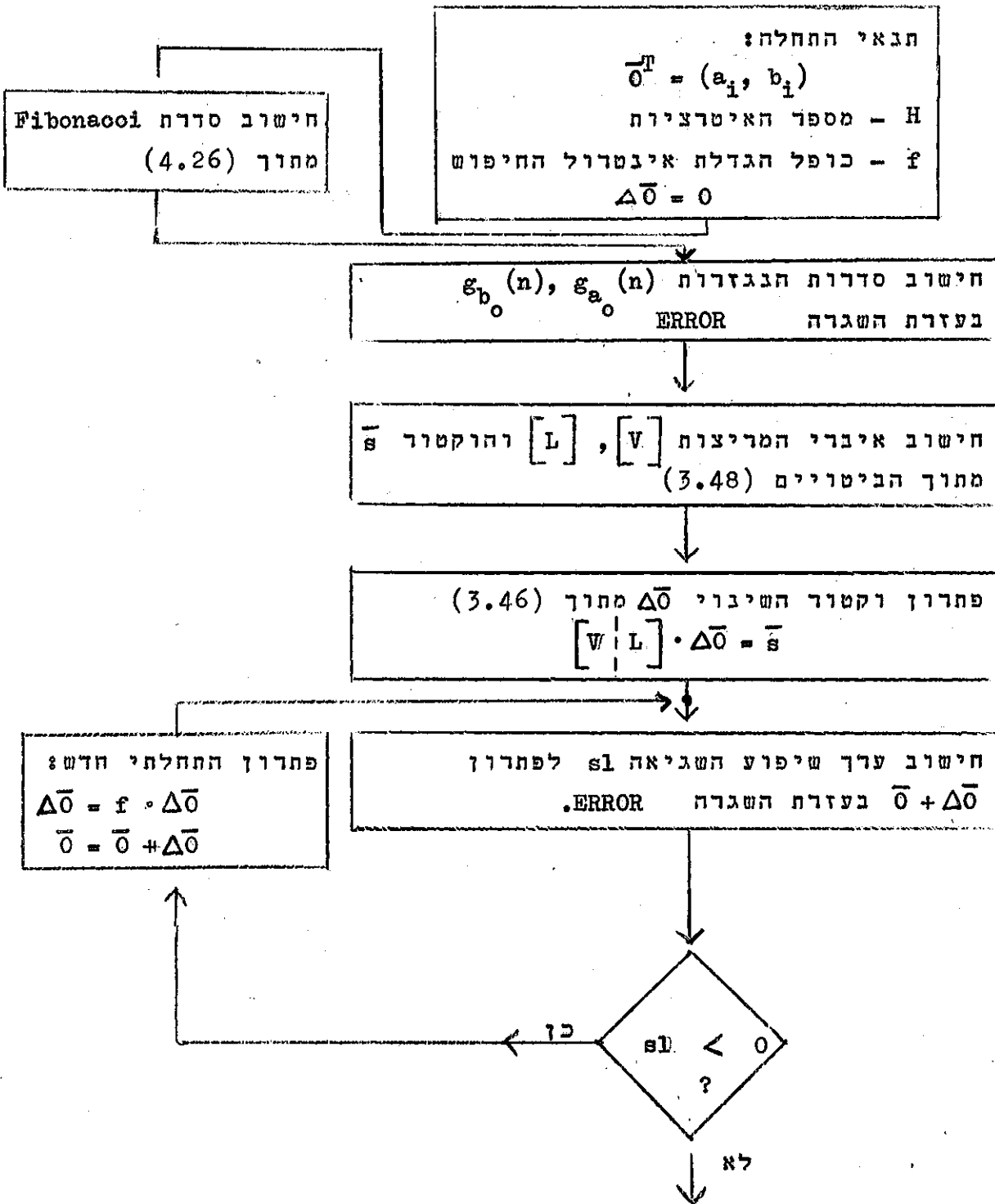
ב. ערכי הסדרה $\xi(n) \Big|_{\bar{0}=\bar{0}}(i+1)$ מחושבים בצורה רקורסיבית בעזרת המשוואות (1.5). בנוסף לכך מחושבים ערכי הנגזרות הרקורסיה (3.42). כמו כן מחושבות הסדרות לעיל עבור הפתרון $\bar{0} = \bar{0}^2$

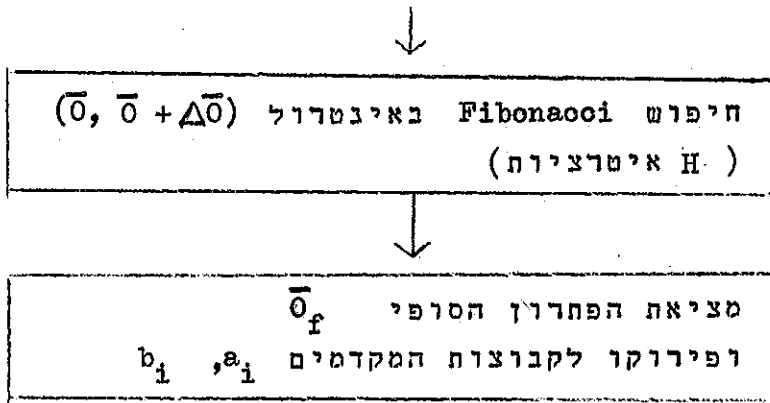
ג. מחושבת השגיאה $e^{(i+1)} \Big|_{\bar{0}=\bar{0}}(i+1)$ והשגיאה $e^{i+1} \Big|_{\bar{0}=\bar{0}^2}$ כוון השיפוע sl בקנע כ:

$$sl = \begin{cases} 1 & ; e' - e \geq 0 \\ -1 & ; e' - e < 0 \end{cases} \quad (4.29)$$

ציור מס' 4.6 מתאר את האלגוריתם החישובי לשיטת Gauss-Newton.

ציור מס' 4.7 מתאר את האלגוריתם החישובי לשגיאת ERROR

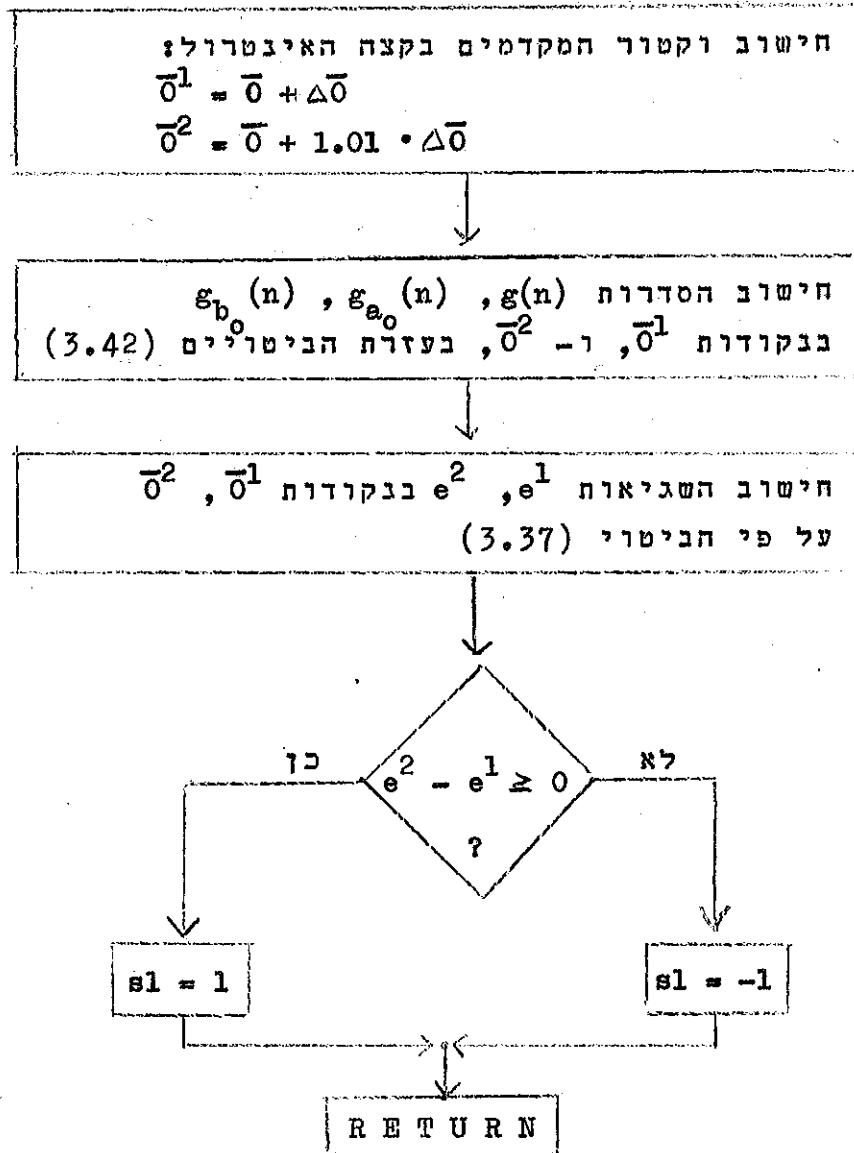




ציור מס' 4.6: שיטת Gauss - Newton: אלגוריתם חישוב.

Fig. No. 4.6: Gauss - Newton method: Computation algorithm.

הגדרה:
SUBROUTINE ERROR [$h(n), \bar{0}, \Delta\bar{0}, K, M, N, g(n), g_{a_0}(n), g_{b_0}(n), \bar{0}^1, e^1, s1$]



ציור מס' 4.7: שיטת Gauss - Newton: הגדרה: ERROR.

Fig. No. 4.7: Gauss - Newton method: Subroutine ERROR.

5. דוגמאות

שיטות תכנון מסובנים ספרתיים שתוארו לעיל בנחנו לגבי
יעילותן במספר דוגמאות.

חדוגמאה שבדקו היו:

א. קירובים למסנן דקורסיבי בתוך.

ב. תכנון מסנן מעביר זמוכים.

ג. תכנון מסנן מתואם.

ד. תכנון מסנן איזטרפולציה לשמוש בתהליך שתזור פונקציות

רב מימדיות מתוך היטליחן.

5.1 קירובים למסנן דיקורסיבי בחוץ

נבחר מסנן בעל ארבעה קטבים:

$$h(n) = 0.3^n + 0.7^n - 0.4^n - 0.5^n \quad ; n=0,1 \dots \quad (5.1)$$

פונקציית התמסורת של מסנן זה היא:

$$H(z) = \frac{1}{1-0.3z^{-1}} + \frac{1}{1-0.7z^{-1}} - \frac{1}{1-0.4z^{-1}} - \frac{1}{1-0.5z^{-1}}$$

$$H(z) = \frac{0.1z^{-1} - 0.02z^{-2} - 0.011z^{-3}}{1 - 1.9z^{-1} + 1.31z^{-2} - 0.389z^{-3} + 0.042z^{-4}} \quad (5.2)$$

מכאן בחוץ המסנן האידיאלי:

טבלה 5.1: בחוץ המסנן.

Table 5.1: Filter data

$$N = 3$$

$$M = 4$$

i	a _i	b _i
0	0	1
1	0.1	-1.9
2	-0.02	1.31
3	-0.011	-0.389
4		0.042

הקטבים p_i והאפסים z_i של המסנן במישור z^{-1} הם:

טבלה 5.2: קטבים ואפסים של המסנן

Table 5.2: Poles and zeroes of the filter.

i	zi	pi
1	0	1.4286
2	2.2401	2.0
3	-4.0583	2.5
4		3.3333

לתכנון מסנן כזה נבחרה סדרה בת 64 איברים, כלומר K=63. כתוצאה מקיצוץ זה של אורך הסדרה (לעומת הסדרה האינסופית (5.1)) תהיה פונקציית התמסורת של המסנן:

$$H_1(z) = H(z) - \left[\frac{(0.3)^{64} z^{-64}}{1-0.3z^{-1}} + \frac{(0.7)^{64} z^{-64}}{1-0.7z^{-1}} - \frac{(0.4)^{64} z^{-64}}{1-0.4z^{-1}} - \frac{(0.5)^{64} z^{-64}}{1-0.5z^{-1}} \right]$$

$$H_1(z) = H(z) - z^{-64} \left[\frac{1.15 \cdot 10^{-33}}{1-0.3z^{-1}} + \frac{1.74 \cdot 10^{-10}}{1-0.7z^{-1}} - \frac{8.51 \cdot 10^{-26}}{1-0.4z^{-1}} - \frac{1.08 \cdot 10^{-19}}{1-0.5z^{-1}} \right] \quad (5.3)$$

מתוך (5.3) ברור שהקיצוץ באורך הסדרה אינו גורם לשגיאה משמעותית בפונקציית התמסורת מכיון שהמקדם הגדול ביותר במונה האיברים הנוספים כתוצאה מהקיצוץ הוא בערך 10^{-10} . לעומת המונה הקטן ביותר בפונקציית המקורית שהוא -0.011.

ביחן גם לחשב את שארית האנרגיה בחלק המקוצץ של הסדרה
(ראה (2.9)). ערך זה הינו $3 \cdot 10^{-20}$ שהם כ- $5 \cdot 10^{-19}\%$
מהאנרגיה בכל הסדרה. השיקולים לעיל מראים שהסדרה הסופית
היא קירוב טוב של הסדרה האינסופית ולכן ביחן להניח ש:
 $H_1(z) \approx H(z)$
בעשה ביסיון לתכנון את המסגון בכל השיטות שתוארו לעיל.

5.1.1

שיטת השגיאה הריבועית

בעשה תכנון בשיטה המורחבת. בעשו בסיונות לחשונות $N+1$
דגימות של הסדרה $g(n)$ ל- $N+1$ הדגימות של הסדרה $h(n)$, החל
מהדגימה ה-0, ה-1, ה-5, וה-9 (בארבעה ביסיונות שונים).
סדר המכנה M שונה החל מ- $M=2$ ועד $M=8$.
התקבלו התוצאות הבאות:

- א. עבור ערך $M=2,3,4$ הגדלה דרגת המונה N הקטינה את
השגיאה הריבועית e_r .
- ב. למקרה המיוחד $M=4$, $N=3$, שבו אמור היה להתקבל המסגון
הרצוי, התקבל פתרון לא יציב. בדיקת הקטבים העלתה שלמסגון
קוטב $z^{-1} = -0.85393$.
- ג. עבור דרגות מכנה גדולות מ-4 התקבלו פתרונות שנתנו
שגיאה רבועית יחסית זמוכה כאשר דרגת המונה היא $N=2$.
- ד. לדרגת מכנה גדולה מ-8 התקבלה מטריצה סינגולרית לחישוב
מקדמי המכנה.
- ה. השגיאה הזמוכה ביותר התקבלה כאשר השוואת $N+1$
הדגימות של הסדרה $g(n)$ לאלו של הסדרה $h(n)$ בוצעה החל
מהדגימה הראשונה ($n=0$).
- ו. הפתרון האופטימלי נתון בטבלה 5.3 לחלון:

טבלה 5.3: קירוב אופטימלי למסנן ריקורסיבי: שיטת השגיאה הרבועית.

Table 5.3: Optimal approximation for recursive filter: square error method.

$$M = 7$$

$$N = 1$$

i	מקדמי מונה Nominator coeff. a_i	מקדמי מכנה Denominator coeff. b_i
0	0.0	1.0
1	0.1	-1.69997
2		1.07985
3		-0.35966
4		0.08825
5		-0.02122
6		0.00481
7		-0.00077

$$\sqrt{e_r} = 0.013\%$$

5.1.2 קירוב Padé

התכנון בוצע עבור דרגות מכנה M שונות, החל ב-M=2 ועד M=8, התוצאות שהתקבלו:

א. למסנן מטיפוס all-pole (N=0) התקבלה מערכת משוואות סינגולרית לפתרון המקדמים b_i . זאת בגלל שהאיבר הראשון של הסדרה $h(n)$ הינו 0. הדבר גורם למקדמים 0 באחת המשוואות לפתרון b_i .

ב. עבור דרגת מכנה מסויימת M הגדלת דרגת המונה גורמת להקטנת השגיאה.

ג. הפתרון האופטימלי התקבל למקרה הרצוי M=4, N=3. הוא נתון בטבלה 5.4:

טבלה 5.4: קירוב אופטימלי למסנן ריקורסיבי: קירוב פאדֶ

Table 5.4: Optimal approximation for recursive filter: Padé approximant

$$M = 4$$

$$N = 3$$

i	מקדמי מונה Nominator coeff. a_i	מקדמי מכנה Denominator coeff. b_i
0	0.0	1.000
1	0.1000	-1.8780
2	-0.0178	1.2780
3	-0.0105	-0.3745
4		0.0400

$$\sqrt{e_r} \approx 0.001\%$$

i	אפסים Zeros z_i	קטבים Poles p_i
1	0.0	1.42817
2	2.3563	2.0295
3	-4.0587	2.6188
4		3.2977

הטבלה לעיל מצביעה על כך שהפתרון שהתקבל קרוב מאוד לפתרון הרצוי המחואר בטבלאות 5.1, 5.2.
ד. עבור דרגת מונה $N=1$ מתקבל אפס בנקודה 0.0. עבור $N=2$ מתקבלים האפסים בנקודות:

$$z_1 = 0.0$$

$$z_2 = -4.05$$

מקום האפס השני משתנה בהתאם לערך M . עבור $M=3$ מחקבל:

$$z_2 = -4.05424$$

$$z_2 = -4.16424$$

ועבור $M = 8$

אולם האפס הוא בסביבת האפס הרצוי $z = -4.0583$.

הדרגת המונה N הוא הגורם הדומיננטי לקבלת פתרון אנפטימלי.

טבלה 5.5. מתארת את העתקה הקטבים למסגור בעל דרגת מכונה

$M=7$ וסדר מונה משתנים:

טבלה 5.5: העתקה קטבים כחלוח בדרגת המונה N

Table 5.5: Pole displacement us. nominator order N .

דרגת מונה Nominator order $N = :$	1	2	3	קטבים נחוצים Given poles
	קוטב pole (p_1)	קוטב pole (p_1)	קוטב pole (p_1)	
	1.3953	1.4276	1.4202	1.4286
	$1.9062 \pm j0.6069$	2.0908	1.8312	2.0000
	$1.3892 \pm j2.7174$	$4.7074 \pm j0.7087$	2.2057	2.5000
	$-1.9489 \pm j3.2810$	$-1.2868 \pm j8.8064$	3.5606	3.3333
		-9.0843	15.2959	
			$-10.3350 \pm j15.7026$	

ו. הגדלת דרגת המונה N מעבר לדרגת הרצויה ($N=3$) גורמת

להוצרות קטבים ואפסים באותו מקום (או בקרבה רבה), בנוסף

לקטבים והאפסים הרצויים.

לדוגמא: הפתרון $N=4, M=5$:

$$\begin{aligned}z_1 &= 0.0 \\z_2 &= 2.1937 \\z_3 &= -4.0583 \\z_4 &= -0.9035 \\p_1 &= 1.4287 \\p_2 &= 1.9847 \\p_3 &= 2.4593 \\p_4 &= 3.3437 \\p_5 &= -0.9035\end{aligned}$$

ניתן לחבתינ ש- $z_4 = p_5$ ולאחר ביטול האפס והקוטב נותרים הקטבים והאפסים הרצויים.

חישוב הפתרון החדש מתוך z_1, z_2, z_3 ו- p_1, p_2, p_3, p_4 בלבד יתן את המקדמים:

$$\begin{aligned}a_0 &= 0 & b_0 &= 1 \\a_1 &= 0.0979 & b_1 &= -1.9095 \\a_2 &= -0.0205 & b_2 &= 1.3238 \\a_3 &= -0.011 & b_3 &= -0.3953 \\& & b_4 &= 0.0429\end{aligned}$$

(הערה: המקדמים a_i התקבלו לאחר חכפלה בגורם ההגבר -0.011).
בראה שפתרון זה, לאחר צמצום קטבים ואפסים משותפים, טוב
אף יותר מחפתרון האופטימלי, המתואר בטבלה 5.4 לעיל.
ז. כאשר דרגת המכנה M גדלה מעבר לדרגה של המסנן הרצוי,
כאשר דרגת המונה N היא הדרגה הרצויה - נוצרים קטבים,
המרוחקים מהקטבים הרצויים, בנוסף לקטבים באזור הקטבים
הרצויים. ניתן לראות זאת בטבלה 5.5 לעיל. השפעת קטבים
אלו על תגובת המסנן קטנה וניתן לבטלם.

מתוך התוצאות לעיל ניתן להסיק שכאשר לסדרה $h(n)$ קיים
קירוב טוב ע"י מסנן ריקורסיבי (לסדרה "מסנן ריקורסיבי
טבעי"). קירוב $Padé$ יתן תוצאות טובות. במקרה כזה רצוי

לחשב את המסנן עבור דרגת מכנה מסוימת M גבוהה ולשנות את N עד לקבלת ביטול קטנים של M . לאחר מכן רצוי לבטל קטנים החורגים בערכם המוחלט בהרבה מחגודל המוחלט הממוצע. בגמר תהליך הביטול יש לחשב את מקדמי המסנן מחוץ הקטנים והאפסים שנותרו. לחישוב המקדמים יש צורך לתקן את גורם ההגבר שיתקבל.

5.1.3

שיטת Aigrain - Williams

התכנון בוצע עבור דרגות מכנה M החל מ- $M=2$ ועד $M=5$. כפתרון התחלתי נבחרו קטבים יציבים כלשהם. התוצאות שהתקבלו:

א. לדרגת מכנה $M=2$ החקבל מסנן ששגיאתו היחסית היא:

$$\sqrt{\sigma_r^2} = 6.59\%$$

מקדמי המסנן וקטביו ואפסיו במישור z^{-1} הם:

$$a_0 = -0.0061$$

$$b_0 = 1.0000$$

$$a_1 = 0.1249$$

$$b_1 = -1.3927$$

$$b_2 = 0.5035$$

$$z_1 = 0.0488$$

$$p_1 = 1.3830 + j0.27094$$

$$p_2 = 1.3830 - j0.27094$$

פתרון זה התקבל לפתרונות התחלתיים שונים. בכל מקרה היתח התייצבות לפתרון זה. רק מספר האיטרציות השתנה.

ב. לדרגות מכנה גדולות מ-2 לא ניתן לקבל פתרון לכל תנאי התחלה שהם. בכל מקרה התקבלו משוואות תלויות לפתרון מקדמי המסנן לאחר איטרציה אחת או שתיים. הדבר נובע מחוסר האפשרות לחכנן בעזרת השיטה מסננים ששגיאתם שווה זהותיה לאפס (ראה סעיף 3.2.1. לעיל).

5.1.4 שיטת Gauss - Newton

בפתרונות התחלתיים לשיטה זו נבחרו מקדמים כלשהם לדרגות המסנן הבאות:

$$N=3, M=4 ; N=2, M=3 ; N=1, M=2$$

התוצאות שהתקבלו:

א. בכל המקרים התכנסו הפתרונות לתוצאה שהיתה קרובה מאוד לפתרון ההתחלתי. על הקרבה מעיד ערכו הסופי של הכופל f אשר בכל המקרים היה קטן מ-1. הפתרונות הסופיים נתנו שגיאות גדולות.

לדוגמא: עבור $M=4, N=3$ אחד הפתרונות ההתחלתיים שנבחר היה:

$a_0 = 0.0000$	$b_0 = 1.0000$
$a_1 = 0.0500$	$b_1 = -2.0000$
$a_2 = -0.0150$	$b_2 = +1.5000$
$a_3 = -0.0090$	$b_3 = -0.4000$
	$b_4 = 0.0500$

ערך הפתרון הסופי:

$a_0 = 0.0054$	$b_0 = 1.0000$
$a_1 = 0.0500$	$b_1 = -2.3310$
$a_2 = -0.0150$	$b_2 = 2.0999$
$a_3 = -0.0090$	$b_3 = -0.7876$
	$b_4 = 0.0932$

$$\sqrt{e_x} = 61.67\%$$

השגיאה הריבועית שהתקבלה:

ב. ערכי מקדמי המכנה b_1 השתנו במידה רבה יחסית לערכי מקדמי המונה a_1 . הדבר הגיוני, בהתחשב בעובדה שמקדמי המכנה משפיעים בצורה חריפה יותר על השגיאה הריבועית, כלומר שנגזרות השגיאה הזו לפי ערכים אלו גדולות יותר מנגזרותיה לפי מקדמי המונה.

5.2. מסגן מעביר בטוכים

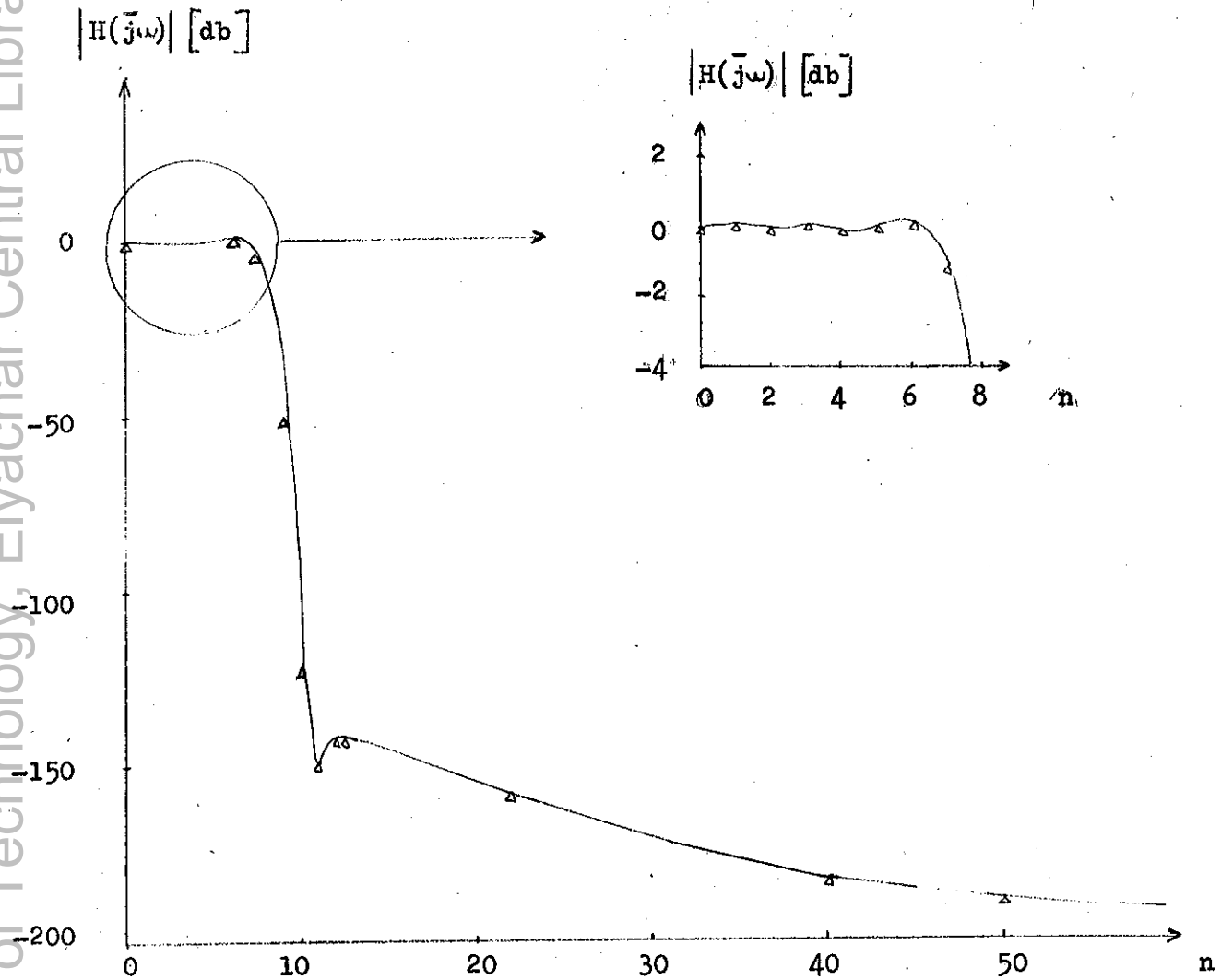
מסגן מעביר הנטוכים שנבחר כמטרת החכרון הוא מסגן אידיאלי מוכפל בחלון Hanning [2], להקטנת הגליות. הביטוי לסדרה h(n) נתון ע"י

$$h(n) = \frac{\sin(\xi_r \cdot n)}{\xi_r \cdot n} \cdot \left[0.54 + 0.46 \cos\left(\frac{\pi n}{K-1}\right) \right] ; n=0,1,\dots(5.4)$$

אורך הסדרה K נבחר K=63 הפרמטר ξ_r מבטא את היחס בין חדר הקטעון לחדר הדגימה fs פרמטר זה נבחר כי: $\xi_r = 0.125$ לקבלת מסגן סיבתי יש להזיז את הסדרה h(n) כך שהיא תהיה סימטרית. במקרה הנ"ל יש ליצור סדרה h'(n) כך ש:

$$h'(n) = \begin{cases} h(n-64) & ; n=64, 65 \dots 127 \\ h(64-n) & ; n=0, 1 \dots 63 \end{cases} (5.5)$$

צירור מס' 5.1 מחאר את תגובת המסגן במישור החדר:



ציור מס' 5.1: תגובת חדר של המסנן האידיאלי.

Fig. No. 5.1: Frequency response of the ideal filter.

בסיונות תכנון מסנן על פי הסדרה $h^*(n)$ שבביטוי (5.5) לעיל לא הצליחו, מכיון שהשגיאה הריבועית שהתקבלה הייתה גדולה, או שהתקבלו מסננים לא יציבים. לפיכך שונתה גישת התכנון. תוכנון מסנן אשר יקרב את הסדרה $h(n)$ שבביטוי (5.4). בעזרת מסנן זה ניתן לממש מסנן מעביר בטוחים. בסמן את פונקציית התמסורת של המסנן שבביטוי (5.4) כ- $H(z)$. ליצירת הסדרה $h^*(n)$ שבביטוי (5.5) צריכה פונקציית

התמסורת של המסגון להיות:

$$H'(z) = H(z) \cdot z^{-K} + H(z^{-1}) \quad (5.6)$$

מכאן ברור שניתן לממש את המסגון $H'(z)$ בעזרת שני ענפים מקבילים: ענף אחד בו מושהית סדרת המבוא בהשהיה באורך K וענף שני בו מועברת סדרת המבוא דרך המסגון $H(z^{-1})$. מכיון שביכולתנו להסתמך על המסגון $H(z)$ בלבד יש לשנות את סבבה ענף זה.

בתבונן בהתמרת z של סדרת המוצא $y(n)$ של ענף זה. היא תכונה $Y(z)$. אם התמרת z של סדרת המבוא $x(n)$ לענף זה היא $X(z)$ הרי שקיים:

$$Y(z) = H(z^{-1}) X(z) \quad (5.7)$$

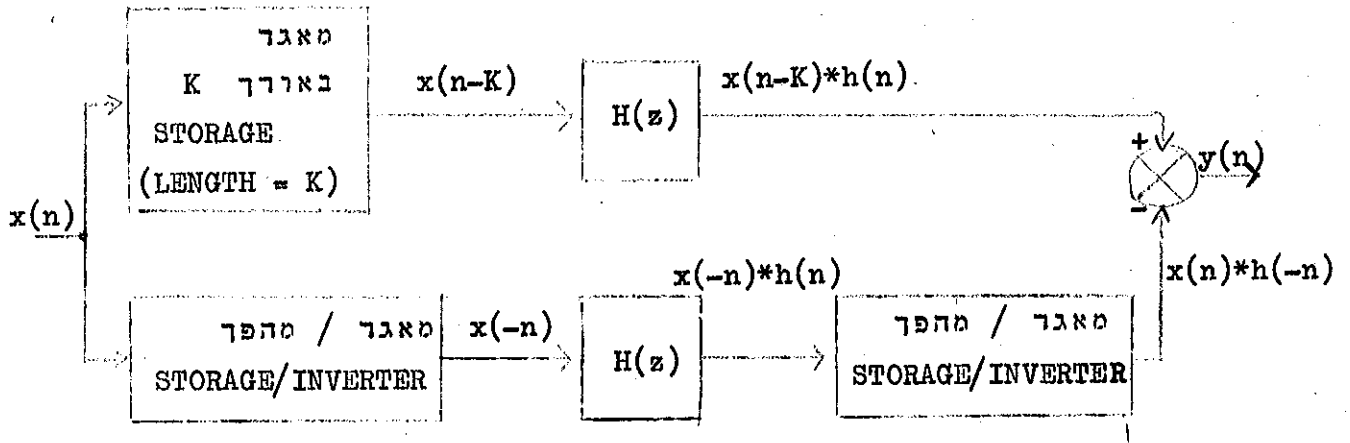
ביטוי (5.7) ניתן לכתיבה גם בצורה:

$$Y(z) = \left\{ X(z^{-1}) \cdot H(z) \right\} \Big|_{z=z^{-1}} \quad (5.8)$$

מביטוי (5.8) ברור כי את המוצא הרצוי ניתן לקבל בשלושה שלבים: היפוך הסדרה $x(n)$ לסדרה $x(-n)$, העברת סדרה זו דרך המסגון $H(z)$, והיפוך גוסף של סדרת המוצא. ביטוי (5.6) יכתב בצורה הבאה:

$$H'(z) = H(z) \cdot z^{-K} + H(z) \Big|_{z=z^{-1}} \quad (5.9)$$

היפוך סדרות אינו ניתן לביצוע מידי ודורש לאכסן את הסדרה תחילה. לכן בכל מהפך חייב להיות מאגר מתאים לשם כך. מימוש המסגון כולו מתואר בציור מס' 5.2 להלן:



ציור מס' 5.2: מימוש מסבן מעביר בתוכים דקורסיבי:

Fig. No. 5.2: Recursive low-pass filter realization.

מימוש מסבן כמחואר לעיל מעשי לסדרות מבווא קצרות יחסית. המסבן מעביר הזמוכים חוכבן לצורת מימוש כזו בשיטות החכבון השונות. כמדד לטיב החכבון נבדקו חגובות החדר של המסבנים המתוכבבים.

5.2.1 שיטת השגיאה הריבועית

גם כאן, כמו ב-5.1.1 לעיל געשו בסיונות להשוות $N+1$ דגימות של הסדרה $g(n)$ ל- $N+1$ דגימות של הסדרה $h(n)$, החל מהדגימה ה-0, ה-1, ה-5, וה-9 (בארבעה בסיונות שונים). דרגת המכנה M שונתה החל מ- $M=2$ ועד $M=8$. התקבלו החוצאות הבאות:

א. במקרים רבים התקבל פתרון לא יציב. נחלק מסקרים אלו גבע הדבר מהגדלה יתרה של דרגת המונה N ויצירת אפס אשר בוטל ע"י קוטב לא יציב. הדבר בלט במיוחד עבור דרגת מונה

N=4 . למקרה זה, עבור דרגות מכנה M=5,6,8, החקבלה חופעת ביטול הקטבים והאפסים.

N = 4

לדוגמא:

M = 5

$z_{1,2} = 1.6536 \pm j0.6139$

$z_3 = 1.2814$

$z_4 = -0.7763$

$p_1 = 1.0077$

$p_2 = 2.9261$

$p_{3,4} = 1.1020 \pm j0.5235$

$p_5 = -0.7777$

האפס z_4 והקוטב p_5 כמעט שווים זה לזה וניתן לבטלם.

כחוצאה מכך נוצר מסבן שבחוזיו: M=4, N=3.

הדבר מצביע לכאורה שהמסבן "הטבעי" הוא מסבן שסדר המונה

שלו הוא 3. אולם מסבנים, שעבורם N=3 אינם יציבים, יש

להם קטבים שערכם המוחלט במישור z^{-1} קטן מ-1 ואשר אינם

מתבטלים ע"י אפסים זהים.

ב. לדרגות מכנה M עד M=6 מחקבלת שגיאה ריבועית מינימלית,

עבור דרגת מונה N=2

טבלה 5.6 מתארת מצב זה למקרה של השוואת N+1 הדגימות

הראשונות של g(n) לדגימות המתאימות של h(n)

טבלה 5.6: שגיאה ריבועית יחסית למסנן מעביר בטוחים
 Table 5.6: Relative square error for low-pass filter.

דרגת מכנה Denominator order M	דרגת מונה Nominator order N	שגיאה ריבועית יחסית Relative square error $\sqrt{e_r}$ [%]
3	0	23.51
	1	18.54
	2	7.860
4	0	15.39
	1	16.39
	2	9.04
	3	לא יציב unstable
5	0	11.28
	1	15.55
	2	9.20
	3	לא יציב
	4	unstable
6	0	11.01
	1	16.02
	2	6.04
	3	לא יציב
	4	unstable
	5	פתרון סינגולרי singular solution

טבלה זו מצביעה על כך שכנראה פתרון אופטימלי קיים

לדרגת מונה $N=2$

ג. שימוש בשיטה המורחבת, כלומר השוואת ערכי $g(n)$ לערכי $h(n)$ החל מ- n_0 כלשהו, שונה מאפס, אינו נותן תוצאות חד-משמעיות. במקרים מסויימים גם הדבר לשיפור התכנון ובאחרים - להרעה.

יחד עם זאת בגרם שיפור למקרה האופטימלי $N=2$. טבלה 5.7 מתארת את התנהגות השגיאה הריבועית היחסית כאשר ההשנואה בין הדגימות בעשיית החל מהדגימה n_0 . כאשר $n_0 = 0, 1, 5, 9$

טבלה 5.7: אופטימיזציה של השגיאה ע"י שיטת השגיאה הריבועית המורחבת

Table 5.7: Error optimization by the modified least square method

דרגת מונה: $N = 2$; Nominator order:

דרגת מכנה Denominator order M	דגימה מושווית ראשונה First equalled sample n_0	שגיאה ריבועית יחסית Relative square error	
		e_r	%
3	0	7.86	
	1	7.39	
	5	7.58	
	9	7.70	
4	0	9.04	
	1	8.00	
	5	6.57	
	9	6.11	
5	0	9.20	
	1	7.83	
	5	7.77	
	9	5.08	
6	0	6.04	
	1	5.22	
	5	6.88	
	9	4.71	

הטבלה לעיל מצביע על כך שניתן להשיג אופטימיזציה של השגיאה הריבועית היחסית בשיטה המורחבת. אולם אין אופטימיזציה זו מהווה בהכרח אופטימיזציה של התכנון הרצוי. במקרה של מסגן מעביר צמוכים הנדון, האופטימיזציה כנ"ל גורמת להקטנת גליות המסגן במישור החדר בתחום המעבר אולם להקטנה משמעותית של הזיחות מחוץ לתחום המעבר.

לדוגמא, למקרה: $N = 2, M = 6$

עבור $n_0 = 0$ הגליות בתחום המעבר (שיא לשיא) היא כ-3 ד"ב והזיחות מחוץ לתחום מגיע עד כדי 190 ד"ב (בממוצע).

עבור $n_0 = 9$ הגליות בתחום המעבר (שיא לשיא) היא כ-1.75 ד"ב אבל הזיחות מחוץ לתחום ירד לכ-125 ד"ב. יחד עם זאת הזיחות במקרה השני אחיד, בשעה שהזיחות במקרה הראשון הוא בעל גליות של כ-30-40 ד"ב.

לקבלת המסגן האופטימלי בשיטה זו בוצע תכנון לדרגת מרצה $N = 2$ עבור דרגות מכנה $M = 3, 4, 5, 6$ כאשר n_0 משחנה מ-2 ועד $n_0 = 14$. בטבלה 5.8 להלן מסוכמים ערכי n_0 הנוחגים פתרון מינימלי לדרגות השונות והשגיאות היחסיות המחאימות. לערכי n_0 גדולים מ-10 מתחילה השגיאה הריבועית לעלות בצורה חדה. המסגנים המחקבלים לערכי n_0 קטנים מ-10 נוחגים גליות בתחום המעבר הנעה בין 1.5 ל-2.5 ד"ב (שיא לשיא) וזיחות הנע בין 100 ל-170 ד"ב מחוץ לתחום המעבר. בד"כ מתקבל זיחות גדול יותר כאשר הגליות גדולה יותר. אין המסגן האופטימלי מבחינת תכונות אלו מתקבל לשגיאה היחסית המינימלית.

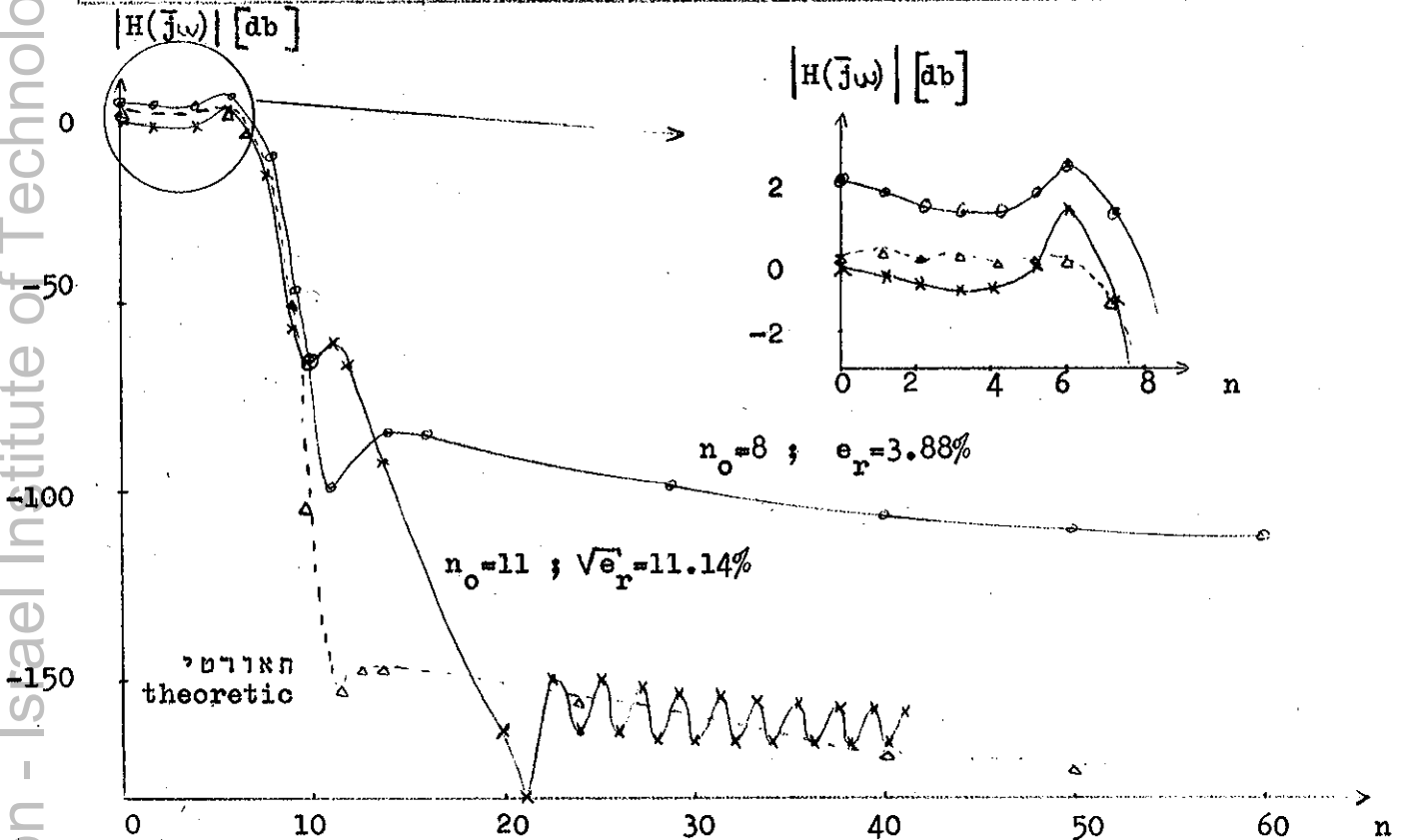
ציור מס' 5.2 מתאר את תגובות החדר של שני מסגנים בעלי הדרגות $N = 2, M = 6$, האחד בעל שגיאה ריבועית יחסית מינימלית ($n_0 = 8$) והשני בעל שגיאה ריבועית יחסית של 11.14%, כאשר השוואת הדגימות בו מתחילה החל מ- $n_0 = 11$.

טבלה 5.8: שיטת השגיאה הריבועית המורחבת: שגיאה יחסית מינימלית

Table 5.8: Modified least square error method: minimum relative error.

$N = 2$

דרגת המכנה Denominator order M	תחילת השוואת דגימה Beginning of samples equation n_0	שגיאה ריבועית יחסית Relative square error $\sqrt{e_r}$ [%]
3	2	7.35
4	8	6.05
5	9	5.08
6	8	3.88



צירוף מס' 5.2: מסנן מעביר במרכיבים: שיטת השגיאה הריבועית המורחבת

Fig: No. 5.2: Low pass filter: least square error method (modified)

הצירוד מצביע על כך שתכונות הגליות החתום המעבור של המסבן בעל השגיאה הריבועית המינימלית טובות יותר מהמסבן האחר אולם תכונות הניחות גרועות בהרבה.
 ד. המסבנים שתוכננו בשיטה זו (כפלי שניחן לראות מצירוד מט' 5.2) מאופיינים בהגבר יתר (overshoot) בקצה חתום המעבור. הניחות בתחום הקיטעון משחבה בין 100 ד"ב לכ-180 ד"ב.

5.2.2 קירוב Padé

התכנון בוצע עבור דרגות מכנה $M=2$ עד $M=8$.

התקבלו התוצאות הבאות:

א. לדרגת מונה מסויימת N הגדלת דרגת המכנה גורמת להקטנת השגיאה הריבועית.

ב. מסבן מטיפוס all - pole ($N=0$) גותן לעיחים קרובות

תכנון שהשגיאה הריבועית שלו קטנה מזו של דרגות מונה גבוהות

יותר, לדרגת מכנה מסויימת. טבלה 5.9 מדגימה את הדבר עבור

דרגות מכנה $M=5,6$

טבלה 5.9: שגיאה ריבועית יחסית בשיטת קירוב Padé

Table No. 5.9: Relative square error for the Padé approximant.

דרגת מכנה Denominator order M	דרגת מונה Nominator order N	שגיאה ריבועית יחסית Relative square error $\sqrt{e_r} [\%]$
5	0	16.02
	1	19.96
	2	17.30
	3	20.29
	4	לא יציב - unstable
6	0	9.63
	1	14.25
	2	11.41
	3	10.93
	4	7.00
	5	16.29

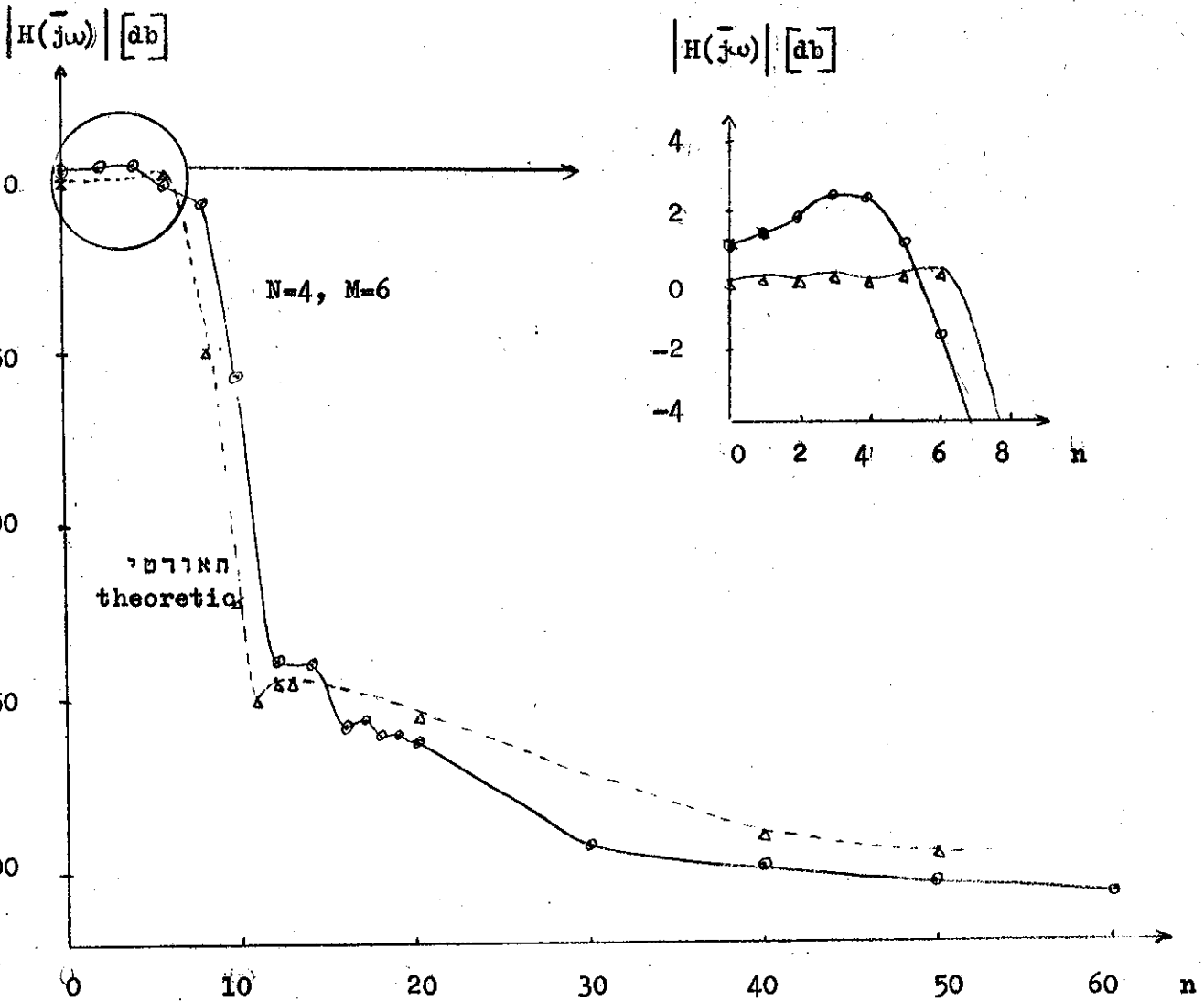
ג. לדרגות מכנה גבוהות מ-5 ודרגות מונה גבוהות מ-4 קיימת גטיה לקבל קטבים ואפסים זהים. כאשר דרגה המונה אינה מספיק גדולה לביטול הקטבים המיוחדים - נוצר קוטב שערכו המוחלט גבוה.
טבלה 5.10 מתארת חופעה זו עבור $M=7$, $N=5,6$:

טבלה 5.10 קירוב Pade: קטבים ואפסים לסדרים גבוהים במישור z^{-1}
Table 5.10: Pade approximant: Poles and zeros for high orders in z^{-1} plane.

דרגות המסנן Filter orders	i	אפסים Zeros	קטבים Poles
M = 7, N = 5	1	$1.2148 + \bar{j}0.2386$	1.2129
	2	$1.2148 - \bar{j}0.2386$	$1.0885 + \bar{j}0.3141$
	3	$0.9825 + \bar{j}0.4662$	$1.0885 - \bar{j}0.3141$
	4	$0.9825 - \bar{j}0.4662$	$0.96153 + \bar{j}0.4557$
	5	<u>-0.6474</u>	$0.96153 - \bar{j}0.4557$
	6		<u>-0.6474</u>
	7		<u>52104.5938</u>
M = 7, N = 6	1	$1.2365 + \bar{j}0.2523$	1.2365
	2	$1.2365 - \bar{j}0.2523$	$1.0981 + \bar{j}0.3229$
	3	$0.9865 + \bar{j}0.4738$	$1.0981 - \bar{j}0.3229$
	4	$0.9865 - \bar{j}0.4738$	$0.9664 + \bar{j}0.4601$
	5	<u>-0.7318</u>	$0.9664 - \bar{j}0.4601$
	6	<u>7.2618</u>	<u>-0.7319</u>
	7		<u>7.2578</u>

מטבלה זו נראה בבירור שהמסגון שואף לדרגה הטבעית $N=4$,
 $M=5$. גם מיקום הקטבים והאפסים נשאר בערך באותו מקום.
אולם למסגון שעבורו $N=4$, $M=5$ יש קוטב ואפס המנטלים
זה את זה. עובדה זו יכולה להצביע על כך שהדרגה "הטבעית"
של המסגון היא בין מונה מדרגה 3 למונה מדרגה 4. ואכן
התוצאות לדרגות גבוהות מאמתות עובדה זו. בדרגות אלה
במצאים קטבים ואפסים זהים (או קרובים) או, לדרגות מונה
גמוכות מדי, קטבים בערכים מוחלטים גדולים. הקטבים
והאפסים הנותרים יוצרים מסגון מדרגה $N=4$, $M=5$ או
 $N=3$, $M=4$. לאימות נוסף הורף תכנון נוסף למסגון מדרגה
 $M=9$. לדרגות מונה $N=4$ צומצם קוטב ואפס והתקבלה דרגת
מונה 3. בנוסף לכך בוצרו 3 קטבים מרוחקים.
לדרגות מונה $M=5$ והלאה צומצמו קטבים ואפסים לקבלת
דרגת מונה סופית - 4 ודרגת מכנה - 5 (לאחר ביטול קטבים
מרוחקים).

ד. מסגנים שתוכננו בשיטת קירוב Padé בוחנים שגיאה ריבועית
גבוהה יחסית לשיטת השגיאה הריבועית.
ה. המסגנים מעבירי המוכים שתוכננו בשיטה זו מאופיינים
בשיא הגבר באמצע תחום המעבר ובניחות גבוה (כ- 200 עד
300 ד"ב) בתחום הקיטעון.
ציור מס' 5.3 מתאר מסגון מעביר במוכים שתוכנן בשיטת קירוב
 Padé . למסגון זה דרגה $N=4$, $M=5$ ושגיאה ריבועית יחסית
של 7.00%



ציור מס' 5.3: מסנן מעביר נמוכים: שיטת קירוב Padé.

Fig. No. 5.3: Low pass filter: Padé approximant.

5.2.3 שיטת Aigrain - Williams

בשיטה זו נלקחו כפתרונות התחלתיים קטבים יצולבים כלשהם או קטבים של תכנונים בשיטות הישירות לעיל. התוצאות שהתקבלו:

א. השיטה נוטה להגיע לעיתים קרובות למצב של התבדרות. הדבר מתבטא ביצירת מטריצת סינגולריות במשוואות לפתרון מקדמי המסנן. הדבר תלוי בבחירת הפתרון התחלתי. כאשר

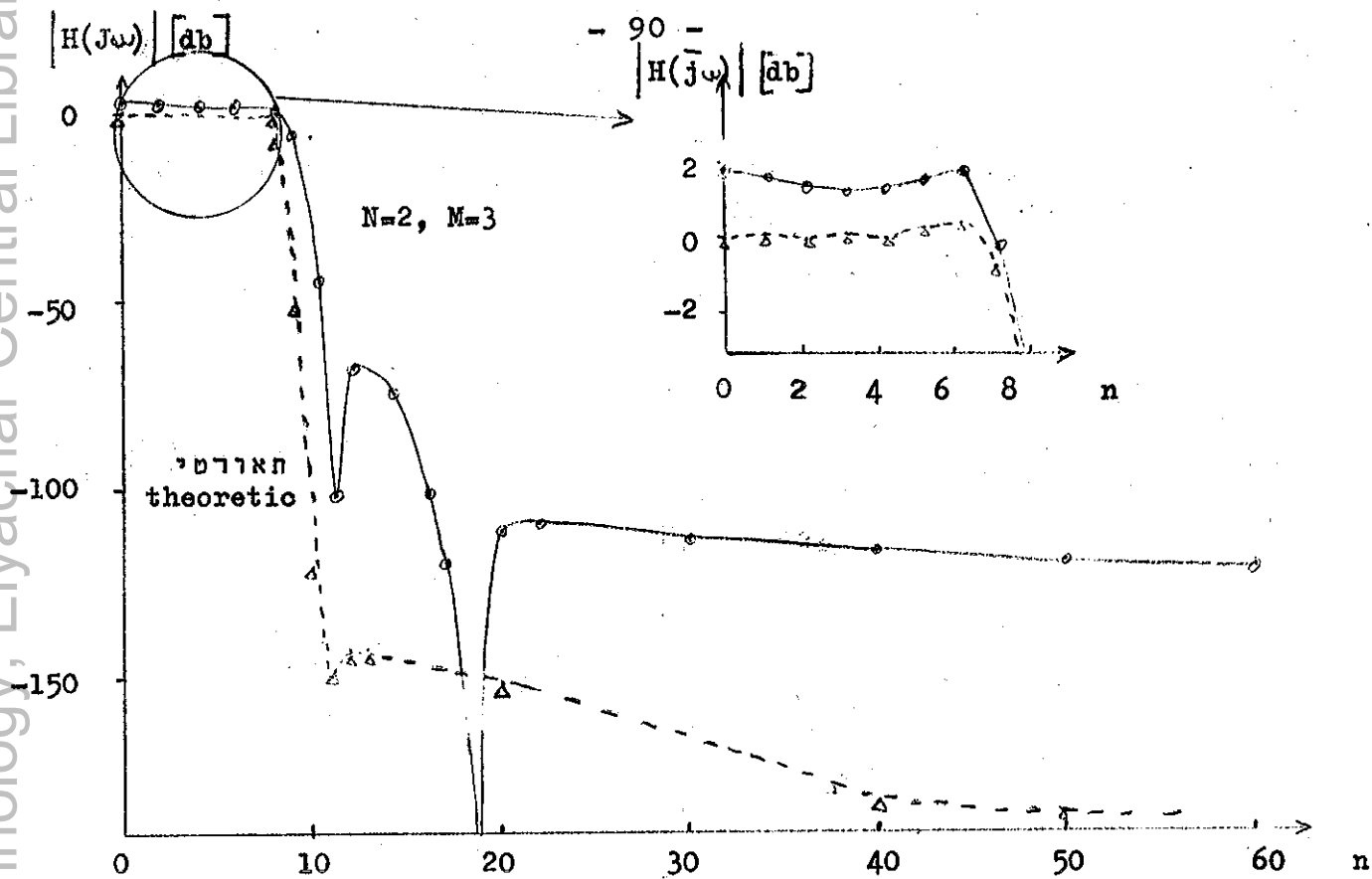
הפתרון ההתחלתי מביא להתכנסות - ההתכנסות היא לערך מינימלי קבוע של השגיאה הריבועית. מספר האיטרציות להתכנסות משתנה, כמובן, כתלות בפתרון ההתחלתי. ב. לא ניתן להגיע בשיטה זו לתכנון מסנן מדרגה הגבוהה מ-4 (N=3).

ג. טבלה 5.11 להלן מסכמת את השגיאה הריבועית היחסית שהושגה עבור דרגות מסנן שונות. שגיאה זו מושונית לשגיאה המינימליות שהושגו בשיטת הישירות.

טבלה 5.11: שיטת Aigrain - Williams : תכנון מסנן מעביר במוכים
Table 5.11: Aigrain - Williams method: Low - pass filter design.

דרגת מסנן Denominator order M	שגיאה ריבועית יחסית Relative least square error $\sqrt{e_r}$ [%]	
	שיטת איגריין וויליאמס Aigrain - Williams method	שיטת ישירה Direct method
2	12.61	22.01
3	2.72	7.35
4	4.26	6.05

ציר ד מס' 5.4 מחאר מסנן מעביר במוכים מדרגה 3 שתוכנן בשיטה זו.



ציור מס' 5.4: מסנן מעביר נמוכים: שיטת Aigrain - Williams
 Fig. No. 5.4: Low - pass filter: Aigrain - Williams method.

בטבלה 5.12 מפורטים נתוני המסנן האופטימלי לעיל.

טבלה 5.12: שיטת Aigrain - Williams: מסנן מעביר נמוכים אופטימלי

Table 5.12: Aigrain - Williams method: Optimal low-pass filter.

$N = 2$

$M = 3$

i	מקדמי מונה Nominator coeff. a_i	מקדמי מכנה Denominator coeff. b_i
0	1.0131	1.0
1	-1.4976	-2.4242
2	0.6543	2.0652
3		-0.6039

Gauss - Newton שיטת .5.2.4

כפתרונות התחלתיים לשיטת זו בחרו פתרונות השיטה הריבועית למקרה $N=2$, וסדרי מכנה $M=5,6,7$. כן חושבו מקדמי המסנן שהתקבל בשיטת קירוב Pade לאחר צמצום קטבים ואפסים זהים, וצמצום המסנן מדרגה $N=6, M=7$, לדרגה $N=4, M=5$ וצמצום דומה מהדרגות $N=4, M=5$ לדרגות $N=3, M=4$. התוצאות שהתקבלו:

א. כאשר הפתרון ההתחלתי לחישוב בשיטה זו היה פתרון בשיטת השגיאה הריבועית למקרה $n_0=0$ החקבל שיפור קטן בשגיאה הריבועית. טבלה 5.13 מסכמת את השגיאה היחסית שהתקבלה בשיטה זו לעומת השגיאה בשיטת השגיאה הריבועית.

טבלה 5.13: השגיאה היחסית בשיטת Gauss - Newton לעומת שיטת השגיאה הריבועית.

Table 5.13: Relative errors for the Gauss - Newton and the least square error methods.

N = 2

דרגת מכנה Denominator order M	שגיאה ריבועית יחסית Relative least square error $\sqrt{e_r}$ [%]	
	שיטת גאוס-ניוטון Gauss-Newton method	שיטת השגיאה הריבועית Least square error method
5	9.18	9.20
6	5.32	6.04
7	11.54	13.53

השוואת טבלה זו לטבלה 5.7 מראה שניתן להשיג שגיאה קטנה יותר בשיטת השגיאה הריבועית המורחבת. השוואת תכונות המסננים שהתקבלו מראה שהשיפור בחחום המעבר

של המסבון קטן ביותר בשעה שהניחות בתחום הקיטעון גרוע
 בד"כ יותר מאשר הפתרון ההתחלתי. ציור מס' 5.5 מתאר את
 שני המסבונים: המסבון שהתקבל בפתרון ההתחלתי והמסבון הסופי
 למקרה $M=6, N=2$.

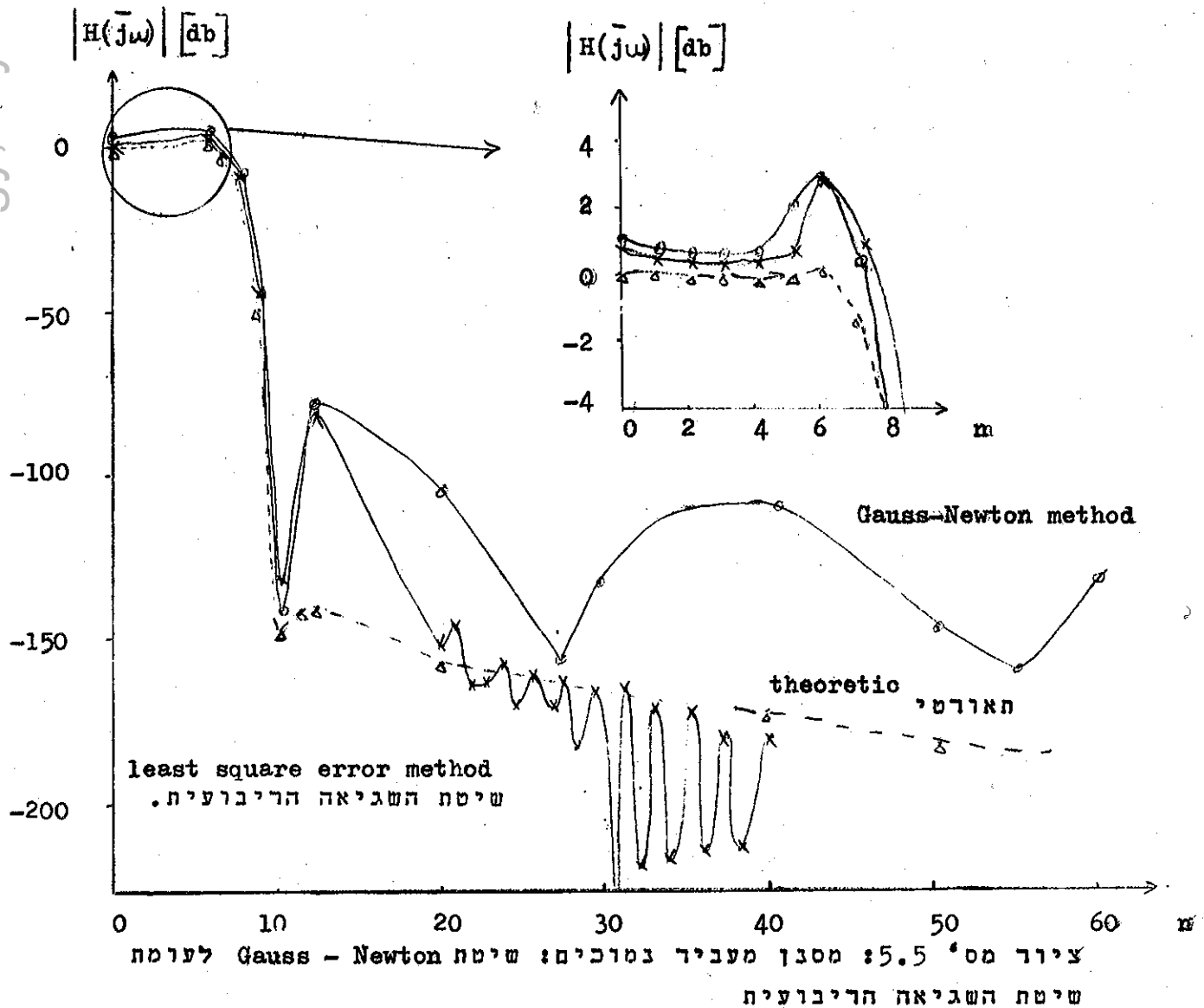


Fig. No. 5.5: Low-pass filter: Gauss-Newton method vs. least square error.

ב. שיטת פתרון קירוב Pade המצומצם למקרה $M=4, N=3$ הניא לפתרון לא יציב בשיטה זו.
 למקרה $M=5, N=4$ התקבל מסגן בעל תכונות טובות למדי אולם יש לציין שמסגן טוב היה מתקבל מהפתרון ההתחלתי שבלקח. זאת ניתן לראות מהעובדה שהשינוי בערכי המקדמים היה קטן ביותר. טבלה 5.14 משורה את המקדמים שהתקבלו בשיטה זו לעומת הפתרון ההתחלתי.

טבלה 5.14: השוואה הפתרון הסופי לפתרון ההתחלתי בשיטת Gauss-Newton

Table 5.14: Comparison between first and final solution for the Gauss-Newton method.

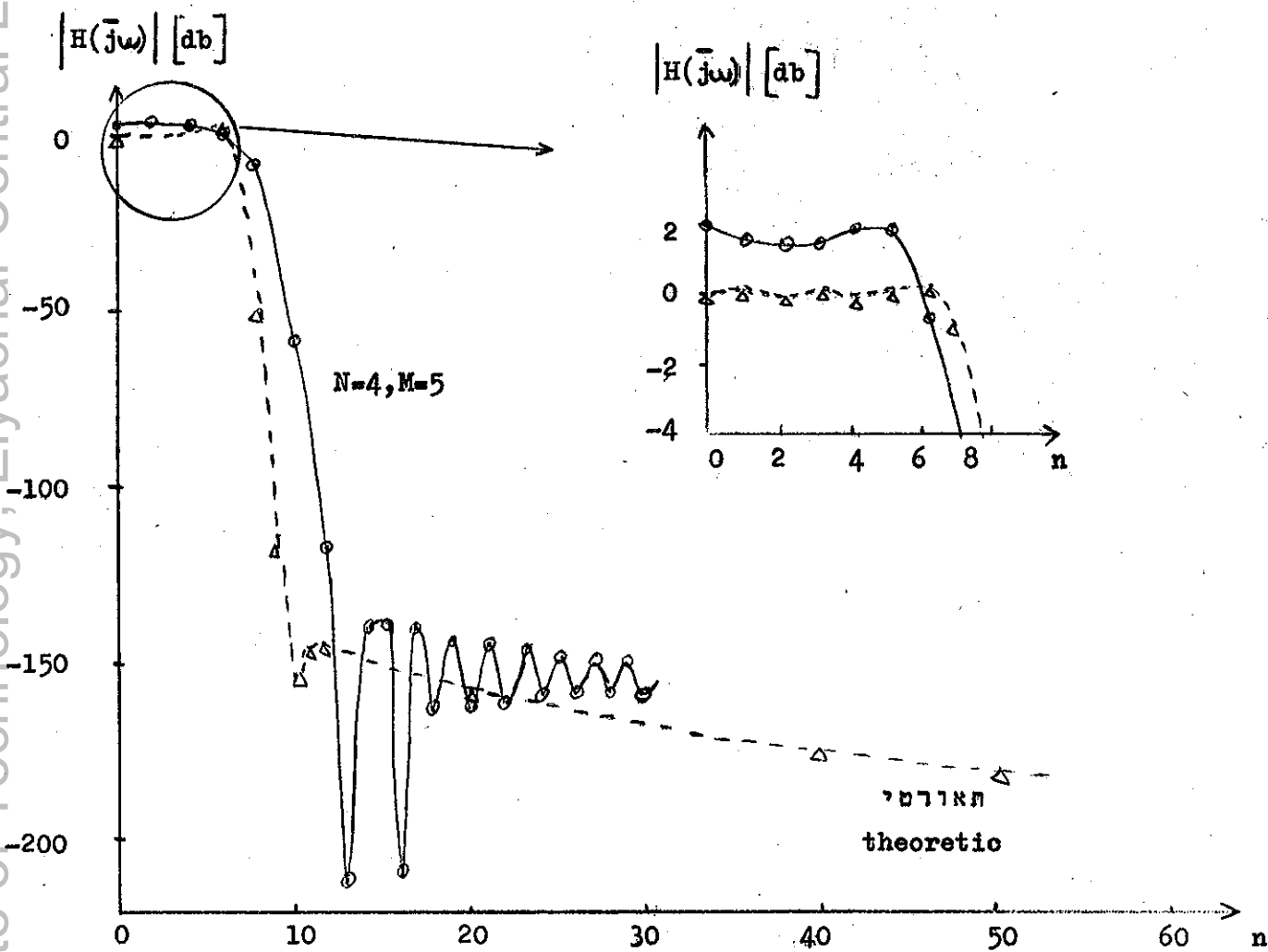
$N = 4, M = 5$

$e_r = 10.54\%$

i	מקדמי מונה		מקדמי מכנה	
	Nominator coeff.		Denominator coeff.	
	a_i		b_i	
	החלתי	סופי	החלתי	סופי
	first	final	first	final
0	1.0000	0.9999	1.0000	1.0000
1	-3.2001	-3.2001	-4.1724	-4.1705
2	4.0207	4.0207	7.1850	7.1768
3	-2.3307	-2.3308	-6.3622	-6.3485
4	0.5242	0.5242	2.8915	2.8813
5			-0.5389	-0.5360

ניתן להבחין שהשינוי העיקרי הוא במקדמים b_i , ואף הוא במידה מועטה.

צירוף מס' 5.6 מחאר את המסגן שחוכבן:



צירור מס' 5.6: מסנן מעביר נמוכים: שיטת גאוס-ניוטון

Fig. No. 5.6: Low-pass filter: Gauss-Newton method.

5.3. מסנן מתואם (Matched filter)

המסנן המתואם משפר את אפשרות הגילוי של אותות המופיעים עם רעש [27], [28]. יש לגלות אות בעל ערך מכסימלי A והנמצא בחוץ רעש בעל הספק N. הסחברות הגילוי של האות פרופורציונלית ליחס A^2/N . העברת האות עם הרעש דרך המסנן המתואם מאפשרת קבלת ערך מכסימלי ליחס זה במוצא המסנן. כאשר האות איתו רוצים לגלות הוא בעל התגובה $x(t)$ והרעש הוא רעש לבן - צריכה תגובת המסנן להלם להיות:

$$H(f) = X^*(f) e^{-j\omega t_0} \quad (5.10)$$

כאשר: $H(f)$: תגובת החדר של המסנן
 $X(f)$: התמרה פוריה של האות הרצוי
 $X^*(f)$: הפונקציה הצמודה ל- $X(f)$
 t_0 : השתיה קבועה.

או בתחום הזמן:

$$h(t) = x(t_0 - t) \quad (5.11)$$

כדוגמא לתכנון נבחר מסנן מתואם, אשר יאפשר גילוי אופטימלי של האות בצורת משולש:

$$X(n) = \begin{cases} \frac{n}{16} & ; 0 \leq n \leq 16 \\ \frac{32-n}{16} & ; 17 \leq n \leq 32 \end{cases} \quad (5.12)$$

בגלל הסימטריה של האות שווה התגובה לדגם יחידה של המסנן לאות הרצוי. אולם תגובה זו נבחרה באורך של 64 ערכים ($K=63$) כמתואר להלן:

$$h(n) = \begin{cases} \frac{n}{16} & ; 0 \leq n \leq 16 \\ \frac{32-n}{16} & ; 17 \leq n \leq 32 \\ 0 & ; 33 \leq n \leq 63 \end{cases}$$

לשם חישוב הערך האופטימלי של יחס האות לרעש $\frac{A^2}{N}$ יש לחשב את ערך המוצא המכסימלי של המסבן ואת עצמת הרעש במוצא המסבן. אות המבוא למסבן הנזר:

$$x_1(n) = x(n) + \delta(n) \quad (5.14)$$

הערך המכסימלי של האות הנזר ערך אות המוצא של המסבן במקרה המכסימלי $n_0 = 16$

$$A = \left| \sum_{n=0}^{16} h(n) \cdot x(16-n) \right| \quad (5.15)$$

אם הרעש הינו רעש לבן עוצמת רעש המוצא הינה ערך התגובה לדגם היחידה $\delta(n)$:

$$N = N_0 \sum_{n=0}^K h(n)^2 \quad (5.16)$$

כאשר: N_0 מציין את עצמת הרעש.
מכאן יחס האות לרעש למסבן האידיאלי:

$$\frac{A^2}{N_{\max}} = \frac{\left| \sum_{n=0}^{16} h(n) \cdot x(16-n) \right|^2}{N_0 \sum_{n=0}^K h(n)^2}$$

נד"כ מבוטא יחס זה בד"ב כלומר:

$$\text{SNR} = 10 \cdot \log \left(\frac{A^2}{N} \right) \quad (5.18)$$

לבדיקה טיב תכנון המסנן הריקורסיבי יש לחשב את הערכים A ו- N כאשר התגובה לדגם היחידה של המסנן היא $g(n)$ ואות המבוא הינו $x(n)$ כמתואר ב-(5.12) לעיל. על מנת לאפשר השוואה של התכנון המעשי לתכנון האופטימלי יש להוסיף לחישוב יחס האות לרעש המסנן המתוכנן גורם הגבר. גורם זה צריך להבטיח שוויון בין תגובת המסננים בערך $n=16$. מכאן:

$$GA = \frac{h(16)}{g(16)} \quad (5.19)$$

על מנת להבטיח שוויון זה יש לכפול את מקדמי המסנן הריקורסיבי a_i בערך GA . כפל זה שווה ערך להכפלת כל ערכי התגובה לדגם יחידה של המסנן בגורם ההגבר. יחס האות לרעש המסנן יהיה:

$$\frac{A^2}{N} = \frac{\left| \sum_{n=0}^{16} g(n) \cdot x(16-n) \right|^2}{N_0 \sum_{n=0}^K g(n)^2} \cdot \frac{1}{GA} \quad (5.20)$$

בשיטת התכנון השונוח חושבה הסטייה שבין יחס האות לרעש שהושג במסנן המתוכנן ליחס האות לרעש האופטימלי שב-(5.17).

הגורם N_0 נבחר כ-1. במקרה זה יחס האות לרעש האופטימלי

$$\text{SNR}_{\max} = -10.56 \text{ [db]} \quad \text{חושב כ:}$$

5.3.1.

שיטת השגיאה הריבועית

בשיטה זו תוכננו מסבגים לדרגות המכנה M החל מ- $M=2$ ועד $M=9$.

התקבלו התוצאות הבאות:

א. יחס האות לרעש האופטימלי התקבל בדרגות מונה $N=2$.
לדרגות מכנה 3,4,5 התקבלו ערכים דומים של יחס האות לרעש.
הערך האופטימלי של יחס האות לרעש לדרגות מכנה אלו היה:

$$\text{SNR} = -10.83 \text{ [db]}$$

כלומר סטייה של 0.27 ד"ב בלבד מהערך התיאורטי.

$$\Delta \text{SNR} = -0.27 \text{ [db]}$$

ב. ככל שגדלה דרגת המכנה מעבר ל- $M=5$ הלכה הסטייה מהערך התיאורטי וגדלה. טבלה מס. 5.15 מתארת את סטית יחס האות לרעש מהערך התיאורטי לדרגות מונה $N=2$ ודרגות מכנה $M=2$ עד $M=9$:

טבלה מס' 5.15: סטיית יחס האות לרעש מערכה התאורטי כחלוח בדרגת המכנה.

Table No. 5.15: Deviation of signal to noise ratio from its theoretic value vs. denominator order.

$N = 2$

דרגת מכנה Denominator order (M)	סטיית יחס האות לרעש Signal to noise deviation (Δ SNR), [db]
2	-0.29
3	-0.27
4	-0.27
5	-0.27
6	-0.31
7	-1.42
8	-1.58
9	-3.97

ג. בשיטת השגיאה הריבועית המורחבת לא הושג שיפור ביחס האות לרעש. הערכים האופטימליים לכל דרגת מסנן התקבלו כבר בשיטה הרגילה.

ד. לא היה קשר בין השגיאה הריבועית לסטיית יחס האות לרעש מערכו התיאורטי. בכל המקרים התקבלה שגיאה ריבועית של עשירית אחוזים. אולם לעיתים, בשגיאה ריבועית גדולה יותר, התקבל תכנון טוב יותר מבחינת יחס האות לרעש. לדוגמא, בשיטה המורחבת בדרגות המסנן $N=2$, $M=2$ התקבלה באחד המקרים שגיאה ריבועית של 95.2% וסטיית יחס האות לרעש של 0.39 ד"ב ובמקרה אחר שגיאה ריבועית של 77.9% וסטיית יחס האות לרעש של 2.13 ד"ב.

שיטת קירוב Pade 5.3.2

בשיטה זו לא ניתן לקבל קירוב לסדרה הנחוצה $h(n)$. הדבר
בובע מכך שהמשוואות לפתרון מקדמי המסבן כוללות את המידע
על איברי הסדרה הראשונים בלבד. מתוך מידע זה אין אפשרות
לצפות שהסדרה משנה את שיפועה החל מהאיבר ה-17 ואילך,
או מתאפסת מהאיבר ה-32 ואילך. הסדרות $g(n)$ שנוצרו
בתכנון בשיטה זו המשיכו ועלו באופן ליניארי ככל שגדל
מספר האיבר n .

שיטת Aigrain - Williams 5.3.3

בשיטה זו בלקחו כקירוב ראשון השורשים של הפתרונות שהתקבלו
בשיטת השגיאה הריבועית. התוצאות שהתקבלו:
א. לא ניתן לקבל התכנסות לפתרון סופי למסבנים שדרגתם
 M עולה על 2.
ב. במסבן מדרגה $M=2$ התקבל פתרון אשר שיפר במידה רבה את
השגיאה הריבועית היחסית. התקבלה שגיאה של 41.67% לעומת
שגיאה של 55.25% שהתקבלה לפתרון ההתחלתי בשיטת השגיאה
הריבועית. אולם הסטייה של יחס האות לרעש מהערך התיאורטי
היתה 2.61- ד"ב לעומת סטייה של 0.29- ד"ב לפתרון ההתחלתי.

שיטת Gauss - Newton 5.3.4

בשיטה זו נבחרו כפתרונות התחלתיים מקדמי שיטת השגיאה הריבועית
לדרגות מוגה $N=2$ ולדרגות המכנה $M=2,3,4$.
התוצאות שהתקבלו הן:
א. השגיאה הריבועית היחסית שופרה במידה ניכרת. לדוגמא,
למסבן שדרגת המכנה שלו היא $M=2$ שופרה השגיאה לכ-38.67%,
לעומת 55.25% הפתרון ההתחלתי.
ב. הסטייה ביחס האות לרעש מערכו התיאורטי גדלה ל-3.91- ד"ב
במקרה הטוב ביותר ($M=2, N=2$) וכ-4 ד"ב במקרים האחרים.
זאת לעומת סטייה של 0.29- ד"ב בפתרון ההתחלתי.

5.4. שחזור אותות רב-מימדיים מתוך היטליהם

הבעיה של שחזור אותות רב-מימדיים מתוך היטליהם הנתונים במרחבים בעלי מימד קטן יותר מופיעה במספר רב של שימושים. הבולט שבהם הוא שחזור צורת עצמים תלת מימדיים מתוך היטליהם הדו-מימדיים. בעיה זו חשובה במיוחד ברפואה (פענוח צלומי רנטגן) ובביולוגיה מוליקולרית (פענוח צלומי מיקרוסקופ אלקטרוני).

קיימים מספר אלגוריתמים לשחזור [29]. אלגוריתמים אלו מופעלים על ההיטלים הנתונים של האותות או על התמרות פוריה של אלגוריתמים אלו. (השימוש בהתמרות פוריה מתאפשר הודות למשפט ה"היטל-חתך" (Projection-slice theorem) על פי משפט זה התמרת פוריה של היטל $N-1$ -מימדי של פונקציה N -מימדית הינה חתך דרך התמרת הפוריה ה- N מימדית של הפונקציה).

תהא פונקציה דו-מימדית $f(x_1, x_2)$, מוגבלת סרט, ומחוארת ע"י אוסף דגימות בריבוע שבו $K \times K$ דגימות, לפי משפט ההיטל היחיד (One-Projection theorem) פונקציה זו ניתנת לתאור מדויק ע"י היטל יחיד שלה בזווית θ מסוימת הנקראת הזווית הקריטית.

על פי משפט זה ניתן להגיד כי את דגימות הפונקציה הדו-מימדית $f(x_1, x_2)$ ניתן לשחזר מתוך דגימות ההיטל החד-מימדי. אולם לעיתים תהליך השחזור פשוט ואמין יותר כאשר מסתמכים על מספר היטלים בזוויות שונות, θ_1 .

אחד מההליכי השחזור המחוארים ע"י Merserau, Oppenheim [29] מורכב מהשלבים הבאים:

1. בתונים ערכי הדגימות של ההיטלים בזוויות השונות. ערכים אלו יכולים להיות בתונים במרחב התמרת פוריה או במרחב הממשי.
2. יש להעביר ערכים אלו דרך מסנן האינטרפולציה הנתון ב(5.21) להלן:

$$H(\omega) = |\omega| \quad ; \quad -\frac{W}{2} \leq \omega \leq \frac{W}{2} \quad (5.21)$$

כאשר: W - הוא רוחב הסרט של הפונקציה.
 חלק זה מכונה תהליך "מריחה" (smearing).
 סדרות המוצא של המסנן להיטלים השונים $p_{\theta_i}(k)$ יסומנו
 ב- $y_i(u_i)$

$$y_i(u_i) = h(k) * p_{\theta_i}(k) \quad (5.22)$$

כאשר: $h(k)$ הינה התמרת פוריה הדיסקרטית מהפוכה של
 $H(\omega)$ ב-(5.21).
 3. הפונקציה הדו-מימדית מחושבת מתוך (5.23) להלן:

$$f(x_1, x_2) = \frac{2W^2}{3\pi K^2} S_{\theta_0}(0) + \frac{2W^2}{\pi^2 K^2} \sum_{i=0}^{R-1} \Delta\theta_i y_i(u_i) \quad (5.23)$$

כאשר: $S_{\theta_0}(\omega)$ הינה התמרת פוריה של היטל בזווית θ_0 מסויימת.
 $\Delta\theta_i$ הינו ההפרש בין זווית חיתוך אחת לסמוכה לה.
 R הינו מספר זוויות החיתוך.

בדוגמא שלהלן נבדקת פעולת המריחה בלבד. הפעולה מבוצעת
 במרחב הממשי, על פי (5.22) לעיל.
 המסנן שתוכנן צריך לקרב את הפונקציה $H(\omega)$. אולם,
 כפונקציה הקירוב נבחרה פונקציה המסנן עם חלון טסוויים,
 כמתואר ב-(5.24) להלן:

$$H_1(k) = |k| \left\{ 1 + \cos \left[\pi \cdot \left(\frac{k}{K} \right)^3 \right] \right\}^6 \quad (5.24)$$

גם כאן היה צורך בצורת השימוש שבה מומש מסנן מעביר
 הזמוכים בדוגמא לעיל ע"מ לקבל חכנונים משביעי רצון.
 במקרה זה צורת מימוש זו אינה מציבה קשיים מיוחדים
 מכיון שבד"כ השימוש במסנן זה אינו בזמן אמיחי.

חושבת החמרה הפוכה של מסנן זה לקבלת סדרת התגובה $h_1(k)$. לבדיקת טיב התכנון נבדק היטל הדו-מימדי של גליל בניצב לציר האורך שלו, כלומר המעגל:

$$p_0(k) = [k \cdot (D-k)]^{\frac{1}{2}} \quad ; k=0,1 \dots D \quad (5.25)$$

כאשר D הינו קוטר המעגל. תוצאת הקובולוציה (5.22) צריכה לתח להיטל זה ערך קבוע עבור D הדגימות באמצע סדרת המוצא $y(k)$. לבדיקת טיב התיכנון חושב הממוצע של דגימות אלו וחסימה המכסימלית (באחוזים) מהערך הממוצע לכל מסנן שתוכנון. כיחוס בוצע התהליך עבור סדרת התגובה הנחוצה $h_1(k)$. אורך הסדרה נבחר כ- $K=256$. הסטייה המכסימלית שהתקבלה הייתה בשיעור של 26.89%. סטייה גדולה זו נובעת מרגישותו הרבה של תהליך המריחה לאי-דיוקים הנובעים מתהליך החישוב.

5.4.1. שיטת השגיאה הריבועית

בשיטה זו תוכנון מסננים בדרגות מכנה החל מ- $M=5$ ועד $M=15$. התקבלו התוצאות הבאות:

א. לא ניתן לתכנון מסננים בשיטה המורחבת. זאת בגלל הצורך בשיטה זו ליצור מטריצה בגודל $K \times K$ (מטריצה $[B]$), ראה (3.13) לעיל). הדבר דורש מערך של 65,536 תאים למטריצה זו בלבד, דבר שעבר בהרבה את מכסת הזיכרון שעמדה לרשות התכנית.

ב. עבור דרגת מכנה מסויימת הגדלת דרגת המונה גרמה להקטנת השגיאה הריבועית היחסית. הדבר נכון עד לדרגת המונה $N=7$ מעבר לדרגה זו גדלה השגיאה הריבועית. הגדלת דרגת המכנה גרמה גם היא להקטנת השגיאה הריבועית היחסית. בכל המקרים היתה השגיאה הריבועית היחסית אחוזים ספורים וירדה עד כדי 0.08%.

ג. הקטנת השגיאה היחסית לערכים כה קטנים לא גרמה בהכרח

לשיפור בסטיית התגובה הנבדקת לכניסת פונקציית הטעגל מהקו הישר הנדרש. סטייה זו געה ברוב המקרים בסביבת 20% מערך הממוצע.

ד. הפתרון האופטימלי התקבל לדרגות מסבן $M=7$, $N=7$. במסבן זה התקבלה שגיאה ריבועית יחסית של 0.09%. הסטייה המכסימלית מהממוצע הייתה בשיעור של 16.29%.

שיטת קירוב Pade .5.4.2

גם בשיטה זו תוכננו מסבנים בדרגות מכנה החל מ- $M=5$ ועד $M=15$.

התקבלו התוצאות הבאות:

א. לדרגות מכנה גדולות מ-11 התקבלו מסבנים לא יציבים. לדרגות מונה קטנות מ-3 התקבלו שגיאות overflow במהלך פתרון המשוואות בשיטה זו.

ב. הגדלת דרגת המונה לדרגת מכנה מסוימת גרמה להקטנת השגיאה הריבועית היחסית. גם הגדלת דרגת המכנה גרמה להקטנת שגיאה זו. השגיאה הייתה בערך של אחוזים אחדים וירדה עד כדי חלקי אחוז.

ג. הסטייה מהקו הישר הממוצע בתגובה לכניסת פונקציית הטעגל געה בסביבת 20% מהממוצע. השינוי היה בערך $\pm 1\%$ מערך זה.

ד. הפתרון האידיאלי למדד הטיב שנבחר היה מסבן בעל הדרגות $M=8$, $N=7$. במקרה זה הייתה הסטייה 19.61%. השגיאה הריבועית היחסית הייתה 0.175%.

שיטת Aigrain - Williams .5.4.3

בשיטה זו נעשו בסיונות לתכנון מסבנים בעלי דרגות מכנה $M=4$ עד $M=10$, בתנאי התחלה שונים.

התקבלו התוצאות הבאות:

א. רק במקרים $M=4$ ו- $M=5$ התקבלה התכנסות לפתרון של משוואות Aigrain - Williams. במקרים האחרים לא התקבלה התכנסות ככל הנראה בגלל העובדה שהשגיאה הריבועית קטנה מדי והמשוואות מתקרבות לזהות.

ב. למסגן בדרגה $M=4$ התקבלה סטייה מהממוצע בשיעור של 11.51% . השגיאה הריבועית היחסית למקרה זה היתה 3.57% .
למסגן בדרגה $M=5$ התקבלה סטייה מהממוצע בשיעור של 18.86% .
השגיאה הריבועית היחסית היתה 0.70% .

5.4.4 שיטת Gauss - Newton

בשיטה זו בעשה בסיון לחכגן מסגנים בדרגות שונות, כאשר כקירוב ראשון לתהליך האיטרציה בבחרו המקדמים שהתקבלו בשיטת השגיאה הריבועית. בכל מקרה התקבלה הוראה `overflow` במהלך החישוב או מיד בתחילתו. הדבר גרע מערכי הנגזרות הגבוהים של איברי הסדרה $g(n)$ לפי המקדמים a_k המתקבלים במסגן זה.

בפרקים לעיל תוארו שיטות ישירות ואיטרטיביות לתכנון מסבנים ספרתיים רקורסיביים. מתוך דוגמאות התכנון מתבודד שיטת השגיאה הריבועית המורחבת יכולה להת תוצאות טובות למדי במקרים רבים. שיטת קירוב Pade יכולה לשמש לבדיקת הסדר הטבעי של המסנן הרצוי. השיטה המורחבת, כפי שהצטיירה מתוך הדוגמאות, הכוללת תכנון מסנן בעל דרגה גבוהה בשיטת קירוב Pade, וצמצום הקטבים והאפסים לדרגה במוכה יותר, בוחנת תוצאות משביעות רצון, כפי שהוכח בשימוש בשיטה זו כפתרון לשיטת Gauss - Newton. שיטות הקירוב האיטרטיביות תלויות מאוד בבחירת הפתרון ההתחלתי לאיטרציות. שיטת Aigrain - Williams הוכחה כשיטה יעילה ביותר מכיון שהיא מתכנסת לאותה בקודת מינימום מפתרונות שונים. שיטת Gauss - Newton יעילה פחות. היא מתכנסת לנקודות מינימום מקומיות שונות. מן האמור לעיל נראה שבכל מקרה שבו דרגת המוגה קטנה מדרגת המכנה של המסנן הרקורסיבי ב-1 רצוי להשתמש בשיטת Aigrain - Williams. למקרים בהם דרגת המוגה קטנה מדרגת המכנה במספר הגדול מ-1 יש להשתמש בשיטת תכנון ישירה, כאשר אפשר להשתמש בשיטת קירוב Pade המורחבת, רצוי עם זאת לבדוק גם תכנון בדרגות שנמצאו בקירוב Pade בעזרת שיטת השגיאה הריבועית. מתוך הדוגמאות הובהר גם שסדרות על ציר הזמן שהאנרגיה שלהן אינה מרוכזת בסביבת האפס. (כגון מסנן מעביר במוכים סיבתי) קשות לתכנון בשיטות שתוארו לעיל. התוצאות המתקבלות צוטות לחוסר יציבות או לשגיאות גדולות.

נספח א'

Aigrain - Williams הרחבת שיטת

שיטת Aigrain-Williams כפי שפותחה ע"י Miller [21] דנה במקרה הפרטי שבו הקטבים z_i של פולינום המכנה של המסגון הרקורסיבי ממשיים פשוטים. להלן מובאת הרחבה של השיטה למקרה הכללי, שבו הקטבים z_i יכולים להיות מרוכבים ובעלי ריבוי גדול מאחד.

שורשים מרוכבים

גביה שלפולינום המכנה $D_1(z)$ שורש מרוכב z_k כך ש:

$$z_k = \text{Re}_k + j \text{Im}_k$$

$$z_k^* = \text{Re}_k - j \text{Im}_k$$

מכיון שמקדמי הפולינום $D_1(z)$ הם ממשיים הינו שורש של הפולינום.

נסמן:

$$|z_k| = \sqrt{\text{Re}_k^2 + \text{Im}_k^2} \tag{A.1}$$

$$\theta_k = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\text{Im}_k}{\text{Re}_k} \right) \tag{A.2}$$

מכאן:

$$z_k^{-m} = |z_k|^{-m} \cos(m \theta_k) - j |z_k|^{-m} \sin(m \theta_k) \tag{A.3}$$

הצבה (3.36) למשוואות (3.38) תתן שני חלקים לכל איבר של מטריצה ווקטור: ממשי ומדומה. גם השורש z_k^* יתרום שני חלקים זהים.

לכן במקום ארבע המשוואות שתורמים שני שורשים ממשיים שונים למערכת (3.35) (כל שורש תורם שתי משוואות) ניתן להכניס כ"תרומת" השורשים z_k^*, z_k ארבע משוואות גם כן, כאשר שתיים מהן מתאימות לתרומת החלק הממשי ושתיים - לתרומת החלק המדומה. שורת המטרצות אשר יתאימו לשורשים אלו יהיו:

$$(v_{k,j}) = |z_k|^{-j+1} \cos [(j-1)\theta_k] \quad (A.4a)$$

$$(v_{k+1,j}) = -|z_k|^{-j+1} \sin [(j-1)\theta_k] \quad (A.4b)$$

$$(l_{k,j}) = -\sum_{n=0}^K h(n) |z_k|^{-(n+j-1)} \cdot \cos [(n+j-1)\theta_k] \quad (A.4c)$$

$$(l_{k+1,j}) = +\sum_{n=0}^K h(n) |z_k|^{-(n+j-1)} \cdot \sin [(n+j-1)\theta_k] \quad (A.4d)$$

$$(w_{k,j}) = (j-1) |z_k|^{-j} \cos (j\theta_k) \quad (A.4e)$$

$$(w_{k+1,j}) = -(j-1) |z_k|^{-j} \sin (j\theta_k) \quad (A.4f)$$

$$(p_{k,j}) = -\sum_{n=0}^K (j+n-1) h(n) |z_k|^{-(n+j)} \cos [(n+j)\theta_k] \quad (A.4g)$$

$$(p_{k+1,j}) = +\sum_{n=0}^K (j+n-1) h(n) |z_k|^{-(n+j)} \sin [(n+j)\theta_k] \quad (A.4h)$$

$$(s_k) = \sum_{n=0}^K h(n) |z_k|^{-(n+M)} \cos [(n+M)\theta_k] \quad (A.4i)$$

$$(s_{k+1}) = - \sum_{n=0}^K h(n) |z_k|^{-(n+M)} \sin \left[(n+M)\theta_k \right] \quad (\text{A.4j})$$

$$(t_k) = \sum_{n=0}^K (n+M) h(n) |z_k|^{-(n+M+1)} \cos \left[(n+M+1)\theta_k \right] \quad (\text{A.4k})$$

$$(t_{k+1}) = - \sum_{n=0}^K (n+M) h(n) |z_k|^{-(n+M+1)} \sin \left[(n+M+1)\theta_k \right] \quad (\text{A.4l})$$

$j=1,2 \dots M$

: 7085

שורשים מרובים

אם לפולינום $D_1(z)$ שורש z_k בעל ריבוי מסויים $m > 1$ פיתוח המשוואות (3.33) לשורש כזה יתן:

$$ES(z_k) = 0$$

$$ES'(z_k) = 0 \tag{A.5}$$

$$ES''(z_k) = 0$$

⋮

$$ES^{(2m-1)}(z_k) = 0$$

כאשר:

$$ES^{(i)}(z) = \frac{d^i(ES)}{dz^i}$$

מתוך משוואת (A.5) ניתן לדאוג כי השורש z_k חורם למערכת המשוואות (3.35) $2m$ משוואות. זה בדיוק אותו מספר משוואות שהיו בוצרות אילו במקום השורש z_k בעל ריבוי m היו m שורשים שונים. בשכתב את המשוואות (3.35) לצורה הבאה:

$$[V] \cdot \bar{a}_1 + [L] \bar{b}_1 = \bar{s} \tag{A.6}$$

כאשר: $[V]$, $[L]$ הן מטריצות בגודל $2M \times M$ \bar{s} הינו וקטור בעל $2M$ איברים.

איברי המטריצות והוקטור למקרה הכללי הנ"ל יהיו:

$$(v_{k+c,j}) = \begin{cases} 0 & ; j=1 \text{ וגם } c=1,2 \dots (2m-1) \\ (-1)^c \frac{(j-2+c)!}{(j-2)!} \cdot z_k^{-j-c+1} & ; \text{ לכל צרוף } j, c \text{ אחר.} \end{cases} \quad (A.7a)$$

$$(l_{k+c,j}) = \begin{cases} (-1)^{c+1} \sum_{n=1}^K \frac{(j+n+c-2)!}{(j+n-2)!} h(n) \cdot z_k^{-(n+j+c-1)} & ; j=1 \text{ וגם } c=1,2 \dots (2m-1) \\ (-1)^{c+1} \sum_{n=0}^K \frac{(j+n+c-2)!}{(j+n-2)!} h(n) z_k^{-(n+j+c-1)} & ; \end{cases} \quad (A.7b)$$

. לכל צרוף j, c אחר.

$$(s_{k+c}) = (-1)^c \sum_{n=1}^K \frac{(n+M+c-1)!}{(n+M-1)!} h(n) z_k^{-(n+M+c)} \quad (A.7c)$$

$; j=1,2 \dots M$

$; c=0,1 \dots (2m-1)$

הביטויים (3.36) הם מקרה פרטי של (A.7) עבור $m=1$.
הביטויים הכלליים למשוואות עבור שורשים מרוכבים בעלי דיברי m הם:

$$(v_{k+2c,j}) = \begin{cases} 0 & ; j=1 \text{ וגם } c=1,2 \dots (2m-1) \\ (-1)^c \frac{(j+c-2)!}{(j-2)!} |z_k|^{-j-c+1} \cdot \cos \left[(j+c-1)\theta_k \right] & ; \end{cases} \quad (A.8a)$$

. כל צרוף אחר של j, c .

$$(v_{k+2c+1, j}) = \begin{cases} 0 & ; j=1 \\ (-1)^{c+1} \frac{(j+c-2)!}{(j-2)!} |z_k|^{-j-c+1} \cdot \sin [(j+c-1)\theta_k] & ; j=2, 3 \dots M \end{cases} \quad (A.8b)$$

$$(l_{k+2c, j}) = \begin{cases} (-1)^{c+1} \sum_{n=1}^K \frac{(j+n+c-2)!}{(j+n-2)!} h(n) |z_k|^{-(n+j+c-1)} \cdot \cos [(n+j+c-1)\theta_k] & ; j=1 \text{ וגם } c=1, 2 \dots (m-1) \\ (-1)^{c+1} \sum_{n=0}^K \frac{(j+n+c-2)!}{(j+n-2)!} h(n) |z_k|^{-(n+j+c-1)} \cdot \cos [(n+j+c-1)\theta_k] & \end{cases} \quad (A.8c)$$

c, j כל צריך אחר של

$$(l_{k+2c+1, j}) = \begin{cases} (-1)^c \sum_{n=1}^K \frac{(j+n+c-2)!}{(j+n-2)!} h(n) |z_k|^{-(n+j+c-1)} \cdot \sin [(n+j+c-1)\theta_k] & ; j=1 \text{ וגם } c=1, 2 \dots (m-1) \\ (-1)^c \sum_{n=0}^K \frac{(j+n+c-2)!}{(j+n-2)!} h(n) |z_k|^{-(n+j+c-1)} \cdot \sin [(n+j+c-1)\theta_k] & \end{cases} \quad (A.8d)$$

c, j כל צריך אחר של

$$(s_{k+2c}) = (-1)^c \sum_{n=0}^K \frac{(n+M+c-1)!}{(n+M-1)!} h(n) |z_k|^{-(n+M+c)} \cdot \cos [(n+M+c) \cdot \theta_k] \quad (A.8e)$$

$$(s_{k+2c+1}) = (-1)^{c+1} \sum_{n=0}^K \frac{(n+M+c-1)!}{(n+M-1)!} h(n) |z_k|^{-(n+M+c)} \cdot \sin [(n+M+c)\theta_k] \quad (A.8f)$$

$$; c=0, 1, 2 \dots (m-1)$$

נספח ב'

תכניות מחשב לתכנון מסננים רקורסיביים

בנספח זה מובאת התכנית שנכתבו לתכנון מסננים רקורסיביים בכל אחת משיטות התכנון שתוארו לעיל. התכנית נכתבו בשפת FORTRAN IV.

בכל תכנית מופיעים חלקים זהים: הכנסת מידע על איברי סדרת המבוא $h(n)$ או חישוב של איברים אלו, חישוב סדרת התגובה $g(n)$ לאחר חישוב מקדמי המסנן, חישוב השגיאה הריבועית היחסית, חישוב הקטבים והאפסים של המסנן והדפסת תוצאות. התכנית מתארות את תהליך חישוב מקדמי המסנן בלבד פרט לתכנית התכנון בשיטת השגיאה הריבועית הכוללת, כדוגמא, את החלקים המשותפים לכל התכניות.

.B.1. שיטת השגיאה הרבועית

.B.1.1 השיטה הרגילה

```
C LEAST SQUARE ERROR METHOD
  DIMENSION H(1000),G(1000),R(1000),HV(25),
  1A(25),B(25),ROOTR(25),ROOTI(25),LW(25),MW(25)
  K = 04
  KI = 2*K
  KF = KI+1
  KFF = 2*KI
  LH = K+1
  LHI = LH+1
C   REQUIRED RESPONSE (H(I));
C   (COMPUTATION OR DATA INPUT)
C   .
C   .
C   INPUT ENERGY CALCULATION
  REL = 0.0
  DO 6 I = 1,K
6  REL = REL+H(I)*H(I)
  REL = SQRT(REL)
  DO 800 M = 6,10
  M = M+1
  NCON = M+2
  DO 800 N = 1,M
  NCON = N+1
C   CORRELATION FUNCTIONS
C   R = AUTOCORRELATION MATRIX
C   HV = AUTO CORRELATION VECTOR
  DO 10 J=1,M
  DO 10 I=1,M
  IJ = I + M*(J-1)
  R(IJ) = 0.0
  DO 10 ICOR=NCOR .,K
  IF (ICOR-I) 10,10,9
9  IF (ICOR-J) 10,10,12
12 R(IJ) = R(IJ)+H(ICOR-I)*H(ICOR-J)
10 CONTINUE
  DO 11 J=1,M
  HV(J) = 0.0
  DO 11 ICOR=NCOR .,K
  IF (ICOR-J) 11,11,13
13 HV(J) = HV(J)+H(ICOR)*H(ICOR-J)
11 CONTINUE
C   CHECKING FOR SINGULARITY AND SOLVING FOR E(I)
  CALL MINV (R,M,D,LW,MW)
  WRITE (6,15) D
  IF (ABS(D)-0.1E-15) 60,60,20
20 CALL GMPRD(R,HV,B,M,N,1)
C   SOLVING FOR A(I)
  A(1)=H(1)
  G(1) = A(1)
```



```
IF (N-1) 30,30,31
31 DO 33 I=2,N
  A(I)=H(I)
  LI=I-1
  DO 33 J=1,LI
33 A(I)= A(I)-H(I-J)*B(J)
  RESPONSE COMPUTATION
  DO 41 I = 2,N
    G(I) = A(I)
    IJ = I-1
    DO 41 J = 1,IJ
41 G(I) = G(I) + B(J) *G(I-J)
30 DO 43 I=NCOR,LH
  G(I)=0.0
  DO 40 J=1,M
  IF (I-J) 40,40,39
39 G(I)=G(I)+B(J)*G(I-J)
40 CONTINUE
43 CONTINUE
  RELATIVE ERRCH COMPUTATION
  E=0.0
  DO 50 I = 1,K
50 E=E +(H(I)-G(I))*(H(I) - G(I))
  E=SQRT(E)
  FEL=E/REL
  ROOTS CALCULATION
  NI=N-1
  CALL POLRT (A,S,NI,ROOTR,ROOTI,IER)
  DO 950 I = 1,NI
950 WRITE (6,67) I,ROOTR(I), ROOTI(I)
  CALL POLRT (B,COF,M ,ROOTR,ROOTI,IER)
  DO 970 I = 1,M
970 WRITE (6,67) I,ROOTR(I), ROOTI(I)
  RESULTS PRINTING
80 WRITE (6,100) N,M
  WRITE (6,61) A(1)
  MCA = M+1
  DO 65 I = 2,MCA
  J = I-1
  IF (I-N) 62,62,63
63 WRITE (6,66) J,B(I)
  GO TO 65
62 WRITE (6,67) J,A(I),B(I)
65 CONTINUE
  MK = K/4
  DO 68 I = 1,MK
68 WRITE (6,69) I,((H(J),G(J)), J = 1,K,MK)
  WRITE (6,120) K,E,FEL
  GO TO 800
60 WRITE (6,70) N
800 CONTINUE
15 FORMAT (2X,'C=',F15.12)

61 FORMAT (45X,'FILTER S COEFFICIENTS'//4X,'J',9X,'H(J)',9X,'G(J)',
142X,'I',7X,'A(1)',9X,'B(1)'// 71X,'0',3X,F11.5,7X,'1.00000')
66 FORMAT (70X,12.17X,F11.5)
67 FORMAT (70X,12.2(3X,F11.5))
69 FORMAT (1X, 13, 8(3X,F11.5))
70 FORMAT (1H0,3X,'LEAST MEAN SQUARE ERRCR METHCD'///3X,
1 'FILTER S ORDER = ',13/3X,'SINGULAR LINEAR EQUATIONS,REDUCE ORDER
20F FILTER OR INCREASE NUMBER OF SAMPLES')
100 FORMAT (1H0,3X,'LEAST MEAN SQUARE ERRCR METHCD'///3X,
1'ORDER OF NMINATOR = ',13/3X,'ORDER OF DENOMINATOR = ',13//)
120 FORMAT (1H ,3X,'NUMBER OF SAMPLES = ',12/3X,'LEAST MEAN SQUARE ERR
10R = ',F8.5/3X,'RELATIVE ERRCR = ',F8.5/ )
150 STOP
END
```

```

C      MODIFIED LFAST SQUARE ERROR METHOD
      DIMENSION H(1000),G(1000),HSD(5000),HV(500),
      RT(5000),R(5000),PRD(5000),A(25),E(25),
      LW(1000),MW(1000),FOOTR(25),FOOTI(25)
      K = 64
      KI = 2*K
      KF = 1+KI
      LH = 1+K
      LMI = 1+LH
      KFF = 2*KI
C      *REQUIRED RESPONSE (H(I));
C      * (COMPUTATION OR DATA INPUT)
C      *
C      *
C      INPUT ENERGY CALCULATION
      REL = 0.0
      DO 6 I = 1,K
6      REL = REL+H(I)*H(I)
      RFL = SQRT(REL)
C
      DO 800 M = 2,10
      DO 800 N = 1,M
      L = K-N
C      FSD = MATRIX F
C      TV = VECTOR H
      DO 10 J=1,M
      DO 10 I=1,L
      IJ = 1+L*(J-1)
      IF (N-J+I) 9,9,12
9      FSD(IJ) = 0.0
      GO TO 10
12     FSD(IJ) = H(N-J+I)
10     CONTINUE
      DO 11 I=1,L
11     TV(I)=-H(I+N)
C      COMPUTATION OF THE MATRIX R: F = ((F)T*H)**(-1)
      MS=0
      CALL MTRA (HSD,RT,L,M ,MS)
      CALL GMPRD (RT,HSD,R,M ,L,M)
      CALL MINV (R,M,D,LW,MW)
      IF (ABS(D)-1.E-15) 90,90,15
C      COMPUTATION OF B(I)
15     CALL GMPRD (RT,HV,PRD,M ,L,1)
      CALL GMPRD (R,PRD,B,M ,M ,1)
C      SOLVING FOR A(I)
C      TRIANGULAR MATRIX B (= R)
      DO 23 I=1,K
      DO 23 J=1,K
      IJ = 1+K*(J-1)

```

```
IF (I-J) 21.19.20
19 H(IJ) = 1.0
GO TO 23
20 IF (J-I+M+1) 21.21.22
22 H(IJ) = P(I-J)
GO TO 23
21 H(IJ) = 0.0
23 CONTINUE
CALL MINV (R,K,DET,LW,MW)
WRITE (6,35) DET
DO 800 NO = 2,12,4
WRITE (6,45) NO
CALL XCPY (R,RT,NO,1,N,N,K,K,MS)
DO 42 I = 1,N
42 G(I) = H(NO + I-1)
CALL MINV (RT,N,DEB,LW,MW)
CALL GMPRD (RT,G,A,N,N,1)
```

RESPONSE COMPUTATION

RELATIVE ERROR COMPUTATION

ROOTS CALCULATION

RESULTS PRINTING

```
GO TO 800
90 WRITE (6,100) N
800 CONTINUE
35 FORMAT (2X,F8.5)
36 FORMAT (3(2X,F9.5)/)
45 FORMAT (2X,'EQUATING G(I) TO H(I) FROM NO = ',I2)
50 FORMAT (1H0,3X,'MODIFIED LEAST SQUARE ERROR METHOD',3X,
1'ORDER OF NOMINATOR = ',I3/3X,'ORDER OF DENOMINATOR = ',I3//)
61 FORMAT (45X,'FILTER S COEFFICIENTS',4X,'J',9X,'H(J)',9X,'G(J)',
142X,'I',7X,'A(I)',9X,'B(I)')// 71X,'G',3X,F11.5,7X,'1.00000')
66 FORMAT (70X,I2,17X,F11.5)
67 FORMAT (70X,I2,2(3X,F11.5))
69 FORMAT (1X,I3,8(3X,F11.5))
70 FORMAT (1H,3X,'NUMBER OF SAMPLES = ',I2/3X,'MEAN SQUARE ERROR = '
1,F11.5/3X,'RELATIVE ERROR = ',F11.5//)
100 FORMAT (1H0,3X,'MODIFIED LEAST SQUARE ERROR METHOD',3X
0,'FILTER S ORDER = ',I3/
13X,'SINGULAR EQUATIONS FOR B(I).REDUCE ORDER OF FILTER OF INCREASE
2 NUMBER OF SAMPLES')
130 STOP
END
```

```

PADE APPROXIMATION METHOD
DIMENSION H(1000),G(1000),SHB(1000),A(25),
IE(25),ROOTR(25),ROOTI(25)

```

```

K = 64
KI = 2*K
LH = K+1
LHI = LH+1
KF = 1+KI
KFF = 2*KI

```

```

REQUIRED RESPONSE (H(I)):
(COMPUTATION OR DATA INPUT)

```

```

INPUT ENERGY CALCULATION

```

```

REL = 0.0
DO 6 I = 1,K
6 REL = REL+H(I)*H(I)
REL = SQRT(REL)

```

```

DO 800 M = 2,10
MN = M+1
DO 800 N = 1,M
SOLVING FOR E(I)
DO 20 I=1,M
DO 10 J=1,M

```

```

IJ = I + M*( J-1)
IF (N+I-J) 11,11,9
9 SHB(IJ) = -H(N+I-J)
GO TO 10

```

```

11 SHB(IJ) = 0.0
10 CONTINUE
20 E(I) = H(N+I)
(CALL SIMQ (SHB,B,M,KS)
IF (KS) 25,25,160
SOLVING FOR A(I)

```

```

25 NC=N+1
A(1)=H(1)
30 DO 33 I=2,N
A(I)=H(I)
LI=I-1
DO 33 J=1,LI

```

```

33 A(I)= A(I)+H(I-J)*B(J)
RESPONSE COMPUTATION

```

```

RELATIVE ERROR COMPUTATION

```

```

ROOTS CALCULATION

```

```

RESULTS PRINTING

```

```

GO TO 800
160 WRITE (6,170) M
170 FORMAT (1H0,3X,'PADE APPROXIMATION METHOD'///3X,'FILTER S ORDER =
1',13,3X,'SINGULAR SOLUTION FOR B(1) (COEFFICIENTS)')
800 CONTINUE
66 FORMAT (70X,12,17X,F11.5)
67 FORMAT (70X,12,2(3X,F11.5))
69 FORMAT (1X,13,8(3X,F11.5))
240 STOP
END

```

Aigrain - Williams 0070 .B.3

```

C      AIGRAIN - WILLIAMS METHOD
      DIMENSION F(1000),G(1000),ZR(25),ZI(25),NS(25),
1CS(25),T(25),DV(1500),ZNR(25),ZNI(25),A(25),
2E(25),LW(50),MW(50),ROCTR(25),ROOTI(25)
      K = 256
      KI = 2*K
      LH = K+1
      LHI = LH+1
      KF = KI+1
      KFF = 2*KI
C      REQUIRED RESPONSE (H(I)):
C      (COMPUTATION OR DATA INPUT)
C      *
C      INPUT ENERGY CALCULATION
      REL = 0.0
      DO 6 I = 1,K
6      REL = REL+H(I)*H(I)
      REL = SQRT(REL)
C
      DO 800 M = 2,10
      N = M
      NM = N
      NN=2*N
C      FIRST APPROXIMATION FOR B(I)
      READ (5,10) (ZR(IK),IK = 1,M)
      READ (5,10) (ZI(IK),IK = 1,M)
      WRITE (6,35) ( ZR(I) .I = 1,M)
      WRITE (6,35) ( ZI(I) .I = 1,M)
      ITNO= 0
      LEN+1
      LS=2*N
C      ROOTS' SELECTION
      LN = 2*N
39 DO 42 I=1, LN
      CS(I)= 0.0
      IF (ABS(ZI(I)) - 1.0E-5 ) 42,42,41
41 CS(I) =0.5
42 NS(I) =0
      DO 52 I=1,N
      IF (NS(I)) 52,43,43
43 NS(I) =1
      JL= I+1
      IF (IL-N) 44,44,52
44 DO 52 J=IL,N
      IF (NS(J)) 52,46,46
46 IF (ABS(ZR(I) -ZR(J))- 1.0E-5 ) 47,47,52
47 IF (CS(I)) 49,49,48
48 IF (ABS(ZI(I) -ZI(J)) -1.0E-5 ) 49,49,50
50 IF (ABS(ABS(ZI(I)) - ABS(ZI(J))) -1.0E-5 ) 51,51,52

```

```
49 NS(I) =NS(I) +1
51 NS(J) =-1
52 CONTINUE
C   AIGRAIN - WILLIAMS EQUATIONS
C   COEFFICIENTS * CALCULATION
C   DV = MATRIX V
C   I = VECTOR T
    DO 54 I=1,LN
      I(I) =0.0
      DO 54 J=1,N
        IJ = I+ (J-1) *LN
54   DG(IJ) =0.0
        IFIN = 1
        DO 80 I=1,N
          CV =CS(I)
          IF (NS(I)) 80.80.53
53   LR = 2*NS(I)
          IF (CV) 55.55.56
55   ARG =0.0
          Z = 1.0/ZR(I)
          GO TO 57
56   ARG = ATAN(ZI(I)/ZR(I))
          ARG = ABS(ARG)
          Z = 1.0/(SQRT(ZR(I)**2 + ZI(I)**2))
57   DO 65 J=1,N
          F = (J-1)*ARG
          IA = IFIN
          D = Z**(J-1)
          IJ = IA +LN*(J-1)
          DV(IJ) = D* COS(F)
          IF(CV) 59.59.58
58   IA =IA+1
          IJ = IA +LN*(J-1)
          DV(IJ) =-D*SIN(F)
59   DO 61 L=2,LR
          F = F+ARG
          IA = IA+1
          D = D * (J+L-3)*Z
          IJ = IA +LN*(J-1)
          DV(IJ) = D* COS(F)
          IF (CV) 61.61.60
60   IA= IA+1
          IJ = IA +LN*(J-1)
          DV(IJ) =-D*SIN(F)
61   CONTINUE
          DO 65 KS=1,K
            KJL=KS+J-2
            F=KJL*ARG
            D = -H(KS)*(7**KJL)
71   IA = IFIN
          IJ = IA +LN*(J-1)
          DG(IJ) = DG(IJ) +D*COS(F)
```

```
IF (CV) 63,63,62
62 IA = IA+1
   IJ = IA +LN*(J-1)
   DG(IJ) = DG(IJ) -D*SIN(F)
63 DO 65 L=2,LR
   IA = IA+1
   C=KJL*D*Z
73 F = F+ARG
   IJ = IA +LN*(J-1)
   DG(IJ) = DG(IJ) +D*COS(F)
   IF (CV) 65,65,64
64 IA = IA+1
   IJ = IA +LN*(J-1)
   DG(IJ) = DG(IJ) -D*SIN(F)
65 CONTINUE
72 DO 69 KS=1,K
   F = (N+KS-1) *ARG
   D=H(KS)*(Z**(N+KS-1))
74 IA = IFIN
   T(IA) = T(IA)+D*COS(F)
   IF (CV) 67,67,66
66 IA = IA+1
   T(IA) = T(IA)-D*SIN(F)
67 DO 69 L=2,LR
   F = F+ARG
   IA = IA+1
   D = D *(N+L+KS-3)*Z
75 T(IA) = T(IA)+D*COS(F)
   IF (CV) 69,69,68
68 IA = IA+1
   T(IA) = T(IA)-D*SIN(F)
69 CONTINUE
76 IF (CV) 83,83,84
83 IFIN = IFIN + LR
   GO TO 80
84 IFIN = IFIN + 2*LR
80 CONTINUE

C   CALL CTIE (DV, DG, CM, NN, N, 0,0,N )
   NNN = NN**2
   NM = NNN/2
   CALL MINV (CM,NN, C, LW, MW)
   IF (ABS(D)- 1.0E-10) 340,340,81
81 CALL GMPRD (CM,T, CRX,NN, NN, 1)
   NK = N+1
   CALL RCUT (CRX, NK, A, B, NN, 1, 0)
C   NEXT APPROXIMATION FOR POLES
   L=N+1
   E(L)=1.0
   CALL POLRT (B,COF,M,ZNF,ZNI,IER)
   WRITE (6,35) (ZR(IK),IK = 1,M)
   WRITE (6,35) (ZI(IK),IK = 1,M)
```

```
IF (IER-3) 140,380,140
CONVERGENCE TEST
140 DO 160 J=1,N
      DZR=ABS(ZNR(J)-ZR(J))
      DZI=ABS(ZNI(J)-ZI(J))
      IF (DZR-1.E-5) 150,150,170
150 IF (DZI-1.E-5) 160,160,170
160 CONTINUE
      GO TO 185
170 DO 180 I=1,N
      ZR(I)=ZNR(I)
180 ZI(I)=ZNI(I)

      ITNO=ITNO+1
      IF (ITNO-50) 39,39,400
      A(I) AND B(I) NORMALIZATION
185 F = B(I)
      DO 190 I=1,N
      A(I)=A(I)/F
190 B(I)=B(I)/F
      E(L)=1.0/F
RESPONSE COMPUTATION

RELATIVE ERROR COMPLTATION

ROOTS CALCULATION

RESULTS PRINTING
340 WRITE (6,350) N
      GO TO 800
380 WRITE (6,390) N
      GO TO 800
400 WRITE (6,410) N
800 CONTINUE
10 FORMAT (7 (2X,F9.5))
35 FORMAT (2X, 7(2X,F9.5)/)
350 FORMAT (1H0.3X,'RESIDUES METHOD'///3X,'FILTER S CRDER = '.13/3X,
1'SINGULAR SOLUTION FOR A(I) AND B(I) CCEFFICIENTS'/)
390 FORMAT (1H0.3X,'RESIDUES METHOD'///3X,'FILTER S CRDER = '.13/3X,
1'NO ROOTS FOR NEXT ITRATION'/)
410 FORMAT (1H0.3X,'RESIDUES METHOD'///3X,'FILTER S CRDER = '.13/3X,
1'NUMBER OF ITERATIONS EXCEEDS 50.PROCESS INTERRUPTED'/)
700 STOP
      END
```


Gauss - Newton שיטת .B.4
תכנית ראשית .B.4.1

```

C      GAUSS - NEWTON METHOD
      DIMENSION H(1000),G(1000),TET(50),DTET(50),
      1TE1(50),DTE1(50),DM(2500),C(50),LW(50),M1(50),
      2UN(25),UD(25),A(25),B(25),ROCTR(25),RECT1(25)
      K = 64
      LH = 1+K
      LHI = 1+LH
      KI = 2*K
C      REQUIRED RESPONSE (H(I)):
C      (COMPUTATION OR DATA INPUT)
C      *
C      INPUT ENERGY CALCULATION
      REL = 0.0
      DO 6 I = 1,K
6      REL = REL+H(I)*H(I)
C      *
      DO 800 M = 5.8
      DO 800 N = 3.4
      LNM = N+1
      LNMF = N+M
      LK = N
      LC = LK +1
      LD = M+N
      LE =LD-1
C      TET = VECTOR C
C      ID = SIGN OF THE ERROR FUNCTION SLOPE
C      FIRST APPROXIMATION FOR A(1)
      READ (5,10) (TET(J),J = 1,N)
      READ (5,10) (TET(J),J = LNM,LNMF)
      DO 71 I = 1,LD
71      DTET(I) = 0.0
      CALL ERROR (TET,DTET,G, H, N, K, RJ, UN, UD,TE1,IC,M)
      WRITE (6,72) ID
C      DO CALCULATION
C      DM = MATRIX V
C      C = VECTOR T
C      DTET = VECTOR DO
      DO 30 I=1,LK
      DO 30 J=1,LK
      IJ = (I-1) *LD +J
      DM(IJ) = 0.0
      DO 30 KS =J,K
30      DM(IJ) = DM(IJ) + UN(KS+1-J) * UN(KS +1-I)
      DO 74 I = 1,LK
      DO 74 J = 1,M
      IJ = (LK+J-1)*LD+I
      DM(IJ) = 0.0
      DO 74 KS = 1,K
      KSI = KS-I +1

```

```
KSJ = KS-J+1
IF (KSI) 74.74.31
31 IF (KSJ) 74.74.32
32 DM(IJ) = DM(IJ) + UD(KSJ) * UN(KSI)
74 CONTINUE
DO 38 I = 1,M
DO 38 J = 1,LK
IJ = (J-1)*LD+I+N
DM(IJ) = 0.0
DO 38 KS = 1,K
KSI = KS-I
KSJ = KS-J + 1
IF (KSI) 38.38.75
75 IF (KSJ) 38.38.76
76 DM(IJ) = DM(IJ)+ UN(KSJ) * UD(KSI)
38 CONTINUE
DO 33 I = LC,LD
DO 33 J = LC,LD
IJ = (J - 1)*LD + I
DM(IJ) = 0.0
DO 33 KS = 1,K
KSI = KS-I+1
KSJ = KS-J
IF (KSI) 33.33.77
77 IF (KSJ) 33.33.78
78 DM(IJ) = DM(IJ) + UD(KSI)*UD(KSJ)
33 CONTINUE
DO 36 I = 1,LK
C(I) = 0.0
DO 36 KS = 1,K
KSI = KS-I+1
IF (KSI) 36.36.80
80 C(I) = C(I)+ (H(KS)-G(KS))*UN(KSI)
36 CONTINUE
DO 37 I = LC,LD
C(I) = 0.0
DO 37 KS = 1,K
KSI = KS-I+1
IF (KSI) 37.37.79
79 C(I) = C(I)+ (H(KS)-G(KS))*UD(KSI)
37 CONTINUE
LF = LD
CALL MINV (DM,LD,D,LW,MW)
IF (ABS (D) - 1.0E-10) 110.34.34
34 CALL GMPRD (DM,C,DTET,LF,LF,1)
C FIBONACCI SEARCH FOR THE INTERVAL CONTAINING
C THE MINIMUM OF THE ERROR FUNCTION
C XA = BEGINNING OF THE INTERVAL
C YA = END OF THE INTERVAL
IT = 1
XA = 0.0
YA = 1.0
```

```
C      LAMBDA <> 1?
40 CALL ERROR (TET,DTET,G,H,N,K,RJ1,UN,UD,TE1,ID,M)
   WRITE (6,72) ID
   RE= RJ1
41 AB = (RJ1-RJ) /REL
   IF (AB-1.E-5) 60,60,42
C     E(1) >E(0)
42 DEL = YA -XA
43 X = XA+0.333*DEL
   DO 44 I = 1,LF
44 DTE1(I) = X*DTET(I)
   CALL ERROR (TET,DTE1,G,H,N,K,RJ2,UN,UD,TE1 ,ID,M)
   WRITE (6,72) ID
   RE= RJ2
45 AB =(RJ2-RJ)/REL
   IF (AB-1.E-5) 49,49,46
C     E(1/3) > E(0)
46 YA = X
   IT = IT+1
   IF (IT-10) 42,42,121
121 RE = RJ
   GO TO 110
C     E(1/3) < E(0)
49 IF (ID) 50,50,46
50 Y=XA +0.667*DEL
   DO 51 I = 1,LF
51 DTE1(I) = Y *DTET(I)
   CALL ERROR (TET,DTE1,G,H,N,K,RJ3,UN,UD,TE1,ID,M)
   RE= RJ3
   WRITE (6,72) ID
   IF (ID) 52,52,53
C     MINIMUM Y<LAMBCA<YA
52 XA = Y
   IT = IT+1
   IF (IT-10) 42,42,122
122 IF (RJ3-RJ2) 123,123,124
123 RE = RJ3
   GO TO 110
124 RE = RJ2
   GO TO 110
53 YA = Y
   XA = X
   IT = IT+1
   IF (IT-10) 42,42,125
125 IF (RJ3-RJ1) 126,126,127
126 RE= RJ3
   GO TO 110
127 RE = RJ1
   GO TO 110
60 IF (ID) 61,42,42
61 DEL = YA -XA
   XA=YA
```

```

YA= XA+ 4.0*DEL
DO 62 I = 1,LF
TET(I) = TE1(I)
62 DTET(I) = YA* DTET(I)
RJ = RJ1

IF (DEL - 300.0) 40.40, 160
160 WRITE (6,165) DEL
GO TO 800
110 DO 112 I = 1,N
112 A(I) = TET(I)
DO 113 I = 1,M
113 E(I) = TET(I+N)
RESPONSE COMPUTATION
RELATIVE ERROR COMPUTATION
ROOTS CALCULATION
RESULTS PRINTING
GO TO 800
150 WRITE (6,155) IT
800 CONTINUE
10 FORMAT (7 (2X,F11.5))
100 FORMAT (6(43X,F11.5/))
72 FORMAT (2X, 'ID = ',I3)
155 FORMAT (1H .3X, 'NUMBER OF ITERATIONS GREATER THAN ',I3/)
165 FORMAT (1H .3X, 'LAMBDA GREATER THAN ',F10.4/)
500 STOP
END

```

ERROR שגרה .B.4.2

```

SUBROUTINE ERROR (TET,DTET ,G,H,M,K,E,UN,UC,TE1,IC,N)
DIMENSION TET(75),DTET(75),TE1(75),TE2(75),G(1024),H(1024),
1 UN(1024),UD(1024),C(1024),U1(1024),U2(1024)
M = M-1

```

```

11 = M + N + 1
CALCULATING THE VECTOR Q+DO
DO 1 I=1,11
TE2(I) = TET(I)+ 1.01 *DTET(I)
1 TE1(I) = TET(I)+DTET(I)
CALCULATING G(I)
G(I) = TE1(I)
C(I) = TE2(I)
L = M+1
IF (M ) 4.4,S
5 DO 2 I=2,L
G(I) =TE1(I)
C(I) =TE2(I)
IL =I-1
DO 2 J=1,IL
C(I) =C(I) -TE2( M+1+J)*C(I-J)
2 G(I) =G(I) -TE1( M+1+J)*G(I-J)

```

```

4  LFI= L+1
   KI = K+1
   DO 3 I=LFI,KI
     G(I) =0.0
     C(I) =0.0
     DO 3 J=1,N
       IF (I-J) 3,3,6
6  G(I) =G(I) -TE1 ( N+J+1)*G(I-J)
   C(I) =C(I) -TE2 ( N+J+1)*C(I-J)
3  CONTINUE
   WRITE (6,100) I
C  CALCULATING DERIVATIVES
   UN(1) = 1.0
   U1(1) = 1.0
   UD(1) =-G(1)
   U2(1) =-C(1)
   DO 11 I=2,N
     SUM1=0.0
     SUM2= 0.0
     SUM3=0.0
     SUM4=0.0
     KI =I-1
     DO 10 J=1,KI
       SUM2= SUM2- UD(I-J)*TE1(J+M+1)
       SUM4= SUM4- U1(I-J)*TE2(J+M+1)
       SUM3= SUM3- U2(I-J)*TE2(J+N+1)
10  SUM1= SUM1- UN(I-J)*TE1(J+N+1)
     UN(I) =SUM1
     U1(I) =SUM4
     U2(I) =SUM3-C(I)
11  UD(I) =SUM2-G(I)
     LH = N+1
     WRITE (6,100) I
     DO 13 I= LH,K
       SUM1=0.0
       SUM3=0.0
       SUM4=0.0
       SUM2=0.0
       DO 12 J=1,N
         SUM2= SUM2- UD(I-J)*TE1(J+M+1)
         SUM3= SUM3- U2(I-J)*TE2(J+N+1)
         SUM4= SUM4- U1(I-J)*TE2(J+M+1)
12  SUM1=SUM1- UN(I-J)*TE1(J+M+1)
       UN(I) = SUM1
       U1(I) = SUM4
       U2(I) =SUM3-C(I)
13  UD(I) =SUM2-G(I)
     WRITE (6,100) I
C  ERROR CALCULATION
     F= (H(I)- G(I) -UN(I)*DTET(I))
     E = E*E
     H= (H(I)- C(I) -U1(I)*1.01* DTET(I))

```

```
R = R*R
DO 21 I=2.N
SUM1=0.0
SUM2=0.0
SUM3=0.0
SUM4=0.0
KI = I-1
DO 20 J=1.KI
SUM3= SUM3 - U2(I-J)*1.01* DTET(J+M+1)
20 SUM2= SUM2 - UD(I-J)*DTET(J+M+1)
DO 19 J = 1,L
IF ( I+1-J) 19,19,25
25 SUM1 =SUM1 -UN(I+1-J)*DTET(J)
SUM4= SUM4 -U1(I+1-J)*1.01* DTET(J)
19 CONTINUE
RH = (H(I)-C(I)+SUM3 +SUM4)
EH = (H(I)-G(I)+SUM1 +SUM2)
RH = RH*RH
EH = EH*EH
R = R+RH
21 E = E+EH
WRITE (6,100) I
DO 23 I=LH,K
SUM2 =0.0
SUM1 =0.0
SUM3 =0.0
SUM4 =0.0
DO 24 J=1.L
IF ( I+1-J) 24,24,26
26 SUM1 =SUM1 -UN(I+1-J)*DTET(J)
SUM4 =SUM4 -U1(I+1-J)*1.01* DTET(J)
24 CONTINUE
DO 22 J=1.N
SUM3 =SUM3 -U2(I-J)*1.01* DTET(J+M+1)
22 SUM2 =SUM2 -UD(I-J)*DTET(J+M+1)
RH = (H(I)- C(I)+SUM3 +SUM4)
EH = (H(I)- G(I)+SUM1 +SUM2)
RH = RH*RH
EH = EH*EH
E = E+EH
23 R = R+RH
IF (E-R- 1.F-5) 30,31,32
30 ID = 1
GO TO 40
31 ID= 0
GO TO 40
32 ID = -1
40 N = M+1
100 FORMAT (I2)
RETURN
END
```

REFERENCES

1. Rabiner, L.R. et al. "Terminology in digital signal processing".
IEEE Trans. Audio Electroacoust. Vol. AU-20,
Dec. 1972, pp. 322-337.
2. Rabiner, L.R. "Techniques for designing finite-duration impulse
response digital filters."
IEEE Trans. Comm. Technol. Vol. COM-19, No. 2,
April 1971, pp. 188-195.
3. Maria, G.A., Fahmy, M.M. "An lp design technique for two dimensional
digital recursive filters."
IEEE Trans. Acoust. Speech and Sig. Proc.,
Vol. ASSP-22, No. 1, Feb. 1974, pp. 15-21.
4. Makhoul, J. "Linear prediction: A tutorial review".
Proc. IEEE, Vol. 63, No. 4, April 1975, pp. 561-580.
5. Chow, J.C. "On estimating the orders of an autoregressive moving
average process with uncertain observations".
IEEE Trans. Automat. Contr., Vol. AC-17, Oct. 1972,
pp. 707-709.
6. Brophy, F., Salazar, A.C. "Recursive digital filter synthesis in
the time domain".
IEEE Trans. Acoust. Speech and Sig. Proc.,
Vol. ASSP-22, No. 1, Feb. 1974, pp. 44-55.
7. Pistor, P. "Stability criterion for recursive filters".
IBM J. Res. Develop., Jan. 1974, pp. 59-71.

8. Bordner, G.W. "Time domain design of stable recursive digital filters".
Ph. D dissertation, State University of New-York,
May 1974.
9. Walters, T.L. "Optimal design of recursive digital filters".
University of Illinois, UILU-ENG 73-2230, Sept. 1973.
10. Kuo, F.K., Magnuson, W.G. "Computer aided circuit design".
Prentice-Hall, 1969.
11. Prony, R. "Essai experimental et analytique". Paris J. l'Ecole
Polytechnique, Vol. 1, cahier 2, 1795, pp. 24-76.
12. Yengst, W.C. "Approximation to a specified time response".
IRE Trans. Circuit. Th., Vol. CT-9, June 1962,
pp. 152-162.
13. Shanks, J.L. "Recursion filter for digital processing".
Geophysics, Vol. XXXII, No. 1, 1967, pp. 33-51.
14. Barrus, C.S., Parks, T.W. "Time domain design of recursive digital
filters".
IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-18,
June 1970, pp. 137-141.
15. Evans, A.G., Fischl, R. "Optimal least squares time-domain synthesis
of recursive digital filters".
IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-21,
Feb. 1973, pp. 61-65.

16. Brophy, F., Salazar, A.C. "Considerations of the Padé approximant technique in the synthesis of recursive digital filters".
IEEE Trans. Audio Electroacoust., Vol. AU-21,
No. 6, Dec. 1973, pp. 500-505.
17. Chau, K-S., Lu, K-S. "On sequential refinement schemes for recursive digital filter design".
IEEE Trans. Circuit Th., Vol. CT-20, No. 4,
July 1973, pp. 396-401.
18. Kelly, L.G. "Handbook of numerical methods and applications."
Addison Wesley 1974, pp. 281-285.
19. Kalman, R.E. "Design of a self-optimizing control system".
Trans. ASME, Feb. 1958, pp. 468-478.
20. Steiglitz, K., McBride, L.E. "A technique for identification of linear systems".
IEEE Trans. Auto. Cont., Vol. AC-10, Oct. 1965,
pp. 461-464.
21. Miller, G. "Least-square rational Z-transform approximation".
Journal Frankling Inst., Vol. 295, No. 1,
Jan. 1973, pp. 1-7.
22. Aigrain, P.R., Williams, E.M. "Synthesis of n-reactive networks for desired transient response".
J. Appl. Physics, Vol.-20, June 1949, pp. 567-600.

23. Bertran, M.S. "Approximation of digital filters in one and two dimensions".
IEEE Trans. Acoust. Speech, Sig.Proc., Vol. ASSP-23,
No. 5, Oct. 1975, pp. 438-443.
24. Hartley, H.O. "The modified Gauss-Newton method for the fitting
of non-linear regression functions by least squares".
Technometrics, Vol. 3, No. 2, May 1961, pp. 269-280.
25. Wilde, D.J. "Optimum seeking methods".
Prentice-Hall, 1964.
26. Mullis, C.I., Roberts, R.A. "The use of second-order information
in the approximation of discrete-time linear systems".
IEEE Trans. Acoust., Speech, Sig. Proc., Vol. ASSP-24,
No. 3, June 1976, pp. 226-238.
27. Schwartz, M. "Information transmission, modulation, and noise".
McGraw-Hill 1970.
28. Carlson, A.B. "Communication systems".
McGraw-Hill 1968.
29. Merserau, R.M., Oppenheim, A.V. "Digital reconstruction of
multidimensional signals from their projections".
Proc. IEEE, Vol. 62, No. 10, Oct. 1974, pp. 1319-1338.

RECURSIVE DIGITAL FILTER SYNTHESIS

IN THE TIME DOMAIN

FINAL PAPER

SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS

FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE

IN ELECTRICAL ENGINEERING

BY

JOEL TIEGER

SUBMITTED TO THE SENATE OF THE TECHNION - ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

TISHREI 5737

HAIFA

OCTOBER 1976

This final paper was written in the Faculty of Electricity under the supervision of Dr. DAVID MALACH.

Dr. DAVID MALACH's supervision of this paper is gratefully acknowledged.

TADIRAN, Israel Electronics Company generous help is gratefully acknowledged.

ABSTRACT

The following work describes and compares design methods of digital recursive filters to approximate a given finite duration response in the time domain. These filters may have various numerator and denominator degrees, as long as the numerator degree (N) is less or equal the denominator degree (M). The figure of merit for the design methods is the least square error between the given and achieved responses, normalized by the total energy of the given response. The full minimization problem of this error is non-linear, and therefore there is no direct method for the design of a recursive filter for minimum error.

Four design methods are described: Two direct (for partial minimization) and two iterative.

The direct methods force several of the described filter's response samples to match the given response. The iterative methods compute iteratively the filter's parameters (numerator and denominator coefficients) until convergence to a final solution (not necessarily the optimum one) is achieved.

The direct methods are: The least square error method and the Padé approximant method.

In the least square error method the autocorrelation functions of $K-N$ samples of the given response are computed. From them the denominator coefficients are computed. The nominator coefficients are solved to fulfill the requirement that the first $N+1$ samples of the filter's response match those of the given response. Those coefficients are solved from simple linear equations.

In the modified method the nominator coefficients are solved so that any $N+1$ given samples match those of the filter's response.

In the Padé approximant method the $N+M+1$ first samples of the given and designed responses are matched. A linear set of equations for the solution of both the nominator's and denominator's coefficients is formed.

The iterative methods are: The Aigrain-Williams method and the Gauss-Newton method.

The Aigrain-Williams method starts with an initial solution set for the filter's poles in the Z plane. From the poles a set of equations for the solution of the filter's coefficients, which minimize the error, is formed. From the coefficients a new set of poles is computed and the process repeated, until the filter's poles converge to their final values.

The Gauss-Newton method starts with an initial solution set for the filter's coefficients. The sum of squares of the error is expanded into a Taylor series around this solution. The error is computed from the first two expressions of this expansion. A new set of coefficients, which minimizes this error, is computed. As the error is not exactly the sum of squares of the error this set of coefficients serves only as some measure for the iteration. The differences between it and the initial solution set serves as an interval, in which the minimum error is sought. If the minimum is not in this interval, the interval is extended by a given factor and a minimum in the new interval is sought. The process is repeated until the interval which contains the minimum is found. The minimum in this interval is found by the Fibonacci search.

Four design examples were computed: approximation to a given recursive

filter, design of a low-pass filter, design of a matched filter and of an interpolation filter, which is used in the process of reconstruction of multi-dimensional signals from their projections.

The first two examples led to the possibility of the identification of the filter's degrees with the aid of the Padé approximant method.

The first example shows that a filter can be designed by those methods to match a given recursive filter.

Design of a low-pass filter is more difficult, possibly because its energy is concentrated in samples, which are far from the beginning of the sequence. Therefore the prediction requirements of the filter are more stringent. For a satisfactory design a special realization method was required.

Matched filters, which gave a signal to noise ratio close to the theoretical value, were designed. This was achieved despite the fact that the relative least squares error was considerable.

In the case of the interpolation filter various designs gave good approximations to the given response and quality criterion, even though the relative least squares error varied by several orders of magnitude from one design to another.