



הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
Technion – Israel Institute of Technology

ספריות הטכניון
The Technion Libraries

בית הספר ללימודי מוסמכים ע"ש ארווין וג'ואן ג'ייקובס
Irwin and Joan Jacobs Graduate School

©

All rights reserved

*This work, in whole or in part, may not be copied (in any media), printed, translated, stored in a retrieval system, transmitted via the internet or other electronic means, except for "fair use" of brief quotations for academic instruction, criticism, or research purposes only.
Commercial use of this material is completely prohibited.*

©

כל הזכויות שמורות

אין להעתיק (במדיה כלשהי), להדפיס, לתרגם, לאחסן במאגר מידע, להפיץ באינטרנט, חיבור זה או כל חלק ממנו, למעט "שימוש הוגן" בקטעים קצרים מן החיבור למטרות לימוד, הוראה, ביקורת או מחקר. שימוש מסחרי בחומר הכלול בחיבור זה אסור בהחלט.

קידוד תמונות בשיטות מורפולוגיות

חיבור על מחקר
לשם מילוי חלקי של הדרישות לקבלת התואר
מגיסטר למדעים
בהנדסת חשמל

2117701



000002473840



הטכניון מכון טכנולוגי לישראל

מאת

מאת

גישרמו ספירו

טכניון
פקולטה להנדסת חשמל
פקולטה למדעי מחשב
ספריה מס' 1120

הוגש לסנט הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

המחזקר נעשה בהנחיית פרופ' דוד מלאך בפקולטה להנדסת חשמל - טכניון, חיפה.

אני מרגיש שללא העזרה של מספר אנשים, מחקר זה לא היה מצליח. ברצוני להביע בשורות הבאות את תודתי להם.

תודה לפרופ' דוד מלאך, לא רק על הנחייתו המסורה, אלא גם על החינוך למחקר ועל התמיכה והעזרה הנדיבה שקבלתי ממנו במהלך השתלמותי. לא ניתן לתאר במלים כמה שלמדתי ממנו, וכמה שנזר ויעץ לי. שוב תודה.

תודה לכל אנשי המעבדה לעיבוד אותות: ליורם אור-חן, ש"אימך" אותי במעבדה בימים הראשונים שלי בטכניון ועזר לי בהחלטות רבות. לנמרוד פלג ולזיוה אבני, שלא רק עזרו לי בבעיות טכניות במחשב אלא שגם גרמו לסביבת עבודה נחמדה ביותר. לאבי רוזן, על הבדיחות. ולכולם ביחד ולכל אחד לחוד, תודה על הסבלנות ועל החיוך אתו קיבלתם את פני תמיד.

תודה לעמיתי בטכניון, וביניהם במיוחד לשמואל פרקש, איתו למדתי לראשונה את הנושא של דחיסת תמונות, ולאהוד וינר.

תודה לעמיתי וחברי גבריאל ויסמן ובני זלברשטיין.

תודה מיוחדת לחברים שלי, גושו איזיפס ודריו רינגץ, איתם ביליתי יותר משש שנים בטכניון. למדנו ביחד, אכלנו ביחד, התוכחנו, עברנו תקופות של לחץ ביחד, ומה שחשוב מכל, תמיד עמדנו אחד ליד השני כדי לעזור ולעודד. תודה.

תודה לחברים שלי מימי אלטר, מיגל אופנהיים, ומרסלו סבירסקי. הם אינם קשורים למקצוע, ואולי אפילו לא מבינים את המחזקר שלי, אבל ללא ספק עזרו לי רבות. תודה רבה על החברה, על התמיכה והעידוד.

תודה, למרות שמילה זאת קטנה בשבילה, לחברה שלי, דליה גיילר. היא גורמת לי לאושר רב, וזה מאפשר לי, בין היתר, ללמוד ולחקור.

לבסוף, אני רוצה להודות למשפחה שלי. להורים, מרים וחובו, שחינכו אותי כאיש סקרן ובעל רצון ללמוד. תכונות אלו הובילו אותי להמשיך את השתלמותי לתואר גבוה. לאחי, אלבי, תודה על התמיכה. תודה מאוד מיוחדת לאמי ולאחותי, רוסי, שלמרות המרחק הפיזי הרב המפריד בינינו, היו תמיד לצידי, מהרגע הראשון שלי בטכניון. רק מי שחי את זה יכול להבין כמה קשה לחיות וללמוד כאשר חלק כה חשוב של המשפחה רחוק כל כך, אבל תמיכתן המתמידה עזרה לי להתגבר על הבעיות.

לכל אלה שהבעתי כאן את תודותי, אני מאוד מקווה שלא אכזבתי אתכם, ושתרגישו שכל מה שהשקעתם בי היה שווה. אני גם מקווה שבעתיד, נמשיך לעבוד ולחלוק את החיים יחד, כך הם הרבה יותר יפים.

אני מודה למשפחת גוטווירט על התמיכה הכספית הנדיבה בהשתלמותי.

למרים, רוסי, ודליה

תוכן הענינים

1 תקציר
3 רשימת סמלים וקיצורים
6 1. מבוא
6 1.1 הצגת הבעיה
7 1.2 סיכום התרומות העקריות של העבודה
8 1.3 מבנה העבודה
10 2. מושגים במורפולוגיה מתמטית בינרית
10 2.1 מבוא
12 2.2 הגדרות במורפולוגיה בינרית
17 2.3 תכונות בסיסיות של מורפולוגיה בינרית
20 2.4 הרחבה של מורפולוגיה בינרית למורפולוגיה רבת-רמות
21 2.5 פעולות מורפולוגיות על קוד שרשרת
21 2.5.1 קוד שרשרת עם ארבעה כוונים
23 2.5.2 פעולות מורפולוגיות על קוד שרשרת עם ארבעה כוונים
31 3. שלד מורפולוגי לייצוג תמונות
31 3.1 שלד במרחב רציף
34 3.2 חישוב שלד במרחב רציף בשיטות מורפולוגיות
36 3.3 שלד מורפולוגי בתמונות בינריות בדידות
39 3.3.1 חישוב שלד מינימלי
41 3.4 יתרונות השלד המורפולוגי הבדיד
42 3.5 שלד מורפולוגי משופר

תוכן העניינים (המשך)

47 3.5.1 יתרון השלד המורפולוגי המשופר למטרות קידוד
 3.5.2 קשר בין השלד המורפולוגי המשופר וייצוגים
49 מורפולוגים אחרים
52 4. משפט הדגימה הגאומטרית ופלוג אורך השלד
52 4.1 משפט הדגימה הגאומטרית
52 4.1.1 הצגת הבעיה
54 4.1.2 הגדרות נוספות
55 4.1.3 משפטים על ייצוגים יחידים בעזרת השלד
56 4.2 פלוג אורך השלד וספקטרום הצורה
57 4.2.1 ספקטרום הצורה
60 4.2.2 פלוג אורך השלד הרציף
62 4.2.3 אנלוגיה עם עבוד אותות אלגברי
62 4.2.4 פלוג אורך השלד הבדיד
64 5. קידוד מורפולוגי של תמונות
64 5.1 קידוד תמונות בינריות
65 5.1.1 ייצוג תמונות ע"י השלד המורפולוגי המשופר
65 5.1.2 הפחתת היתרות בשלד המורפולוגי המשופר
67 5.1.3 קידוד של השלד המורפולוגי המשופר והמופחת
69 5.2 קידוד תמונות רבות-רמות
70 5.2.1 עבוד מוקדם
70 5.2.1.1 הורדה במספר הסיביות לייצוג התמונה
72 5.2.1.2 ייצוג ערכי תאי התמונה
74 5.2.2 ייצוג של מישורי הסיבית

תוכן העניינים (המשך)

75 5.2.3 שידור פרוגרסיבי על בסיס גאומטרי
78 6. תוצאות סימולציה
78 6.1 תוצאות עבור התמונה "לנה"
79 6.1.1 שידור פרוגרסיבי על בסיס גאומטרי
89 6.2 תוצאות עבור התמונה "פילפלים"
92 7. סיכום, מסקנות וכווני המשך
92 7.1 סיכום ומסקנות
93 7.2 בעיות פתוחות וכווני המשך
97 נספח א - תכונות נוספות של מורפולוגיה בינרית
100 נספח ב - מורפולוגיה רבת-רמות
100 B.1 הגדרות במורפולוגיה רבת-רמות
104 B.2 תכונות בסיסיות של מורפולוגיה רבת-רמות
106 B.3 מורפולוגיה רבת-רמות עם איבר תצורה בינרי
108 B.4 פרוק של מורפולוגיה רבת-רמות למורפולוגיה בינרית
109 נספח ג - הוכחות
116 נספח ד - מבוא לאלגוריתם של simulated annealing
118 מקורות
I תקציר באנגלית

תקציר

בעבודה זאת מוצגת סכימת לקידוד תמונות רבות-רמות אשר משתמשת בפעולות בסיסיות של מורפולוגיה מתמטית. גישת הקידוד הינה גישה גאומטרית ולא אלגברית, כמקובל ברוב שיטות הקידוד. הגישה מבוססת על משפט הדגימה הגאומטרית (*Geometric Sampling Theorem*), ועל ייצוג מישורי הסיבית של התמונה ע"י שלד מורפולוגי משופר (*Modified Morphological Skeleton*) שפותחו בעבודה.

השלד המורפולוגי, המוגדר כאוסף המרכזים של אברי תצורה מירביים, הוצע לאחרונה כאמצעי לייצוג וקידוד גאומטרי של תמונות בינריות. בעבודה זו מורחב הייצוג הנ"ל ומוצג שלד מורפולוגי משופר המשתמש באיבר תצורה בעל גודל החולך וגדל. ייצוג חדש זה נמצא יעיל יותר למטרות קידוד.

הייצוג של תמונות בינריות ע"י שלד הינו ייצוג בעל יתרונות רבה, במובן שניתן להשמיט חלק מנקודות השלד ובכל זאת לקבל ייצוג מלא של התמונה. משפט הדגימה הגאומטרית דן בתנאים לשחזור של השפה של קבוצה במישור הרציף (ז"א, ב- R^2) בעזרת תת-קבוצה יחידה של נקודות בשלד שלה. נקודות אלו נקראות נקודות סינגולריות (*singular points*). במקרה הבדיד (ז"א, קבוצות ב- Z^2), מצאנו שהנקודות הסינגולריות נושאות את רוב המידע הדרוש לשחזור של הקבוצה. על בסיס עובדה זו, פותח אלגוריתם לחישוב של "שלדים מינימליים" (*minimal skeletons*), ז"א, שלדים ללא נקודות מיותרות, הנושאים את כל המידע לשחזור הקבוצה ללא שגיאה.

בעזרת השלד המורפולוגי המשופר, והשיטה להורדת היתרות הנובעת ממשפט הדגימה הגאומטרית, מוגדר ייצוג מורפולוגי חדש של תמונות בינריות ונקרא שלד מורפולוגי משופר ומופחת (*RMMS – Reduced Modified Morphological Skeleton*).

סכימת הקידוד המוצעת מורכבת מהשלבים הבאים: ראשית, התמונה עוברת תהליך של Halftoning, בשיטת פיזור השגיאה (*error diffusion*), על מנת להקטין את מספר הסיביות לייצוג התמונה מ-8 ל-4, ללא פגיעה משמעותית באיכות הסיביות. את ערכי תאי התמונה (pixels) מייצגים בקוד Gray כדי לקבל מישורי סיבית אחידים יותר. אח"כ מוצאים עבור כל אחד ממישורי הסיבית את הייצוג עפ"י ה-*RMMS*. את השלדים המתקבלים מקודדים עם סכימה לקידוד אנטרופיה שפותחה במיוחד

לקידוד יעיל של שלדים. הטכימה מכילה קוד Huffman עבור מספר השורות הרצופות ללא נקודות שלד, וקוד Elias בצרוף קידוד אוניברסלי על פי Ziv ו-Lempel עבור שאר השורות. התקבלו יחסי דחיסה של 1:30 עבור תמונות אמיתיות. מכיון שהאלגוריתם אינו מבוסס על סגמנטציה והצבעה, שפות מלאכותיות אינן מופיעות בתמונה המשוחזרת. חשוב לציין שרוב הפעולות באלגוריתם הינן פעולות בינריות, פרט חשוב מאוד עבור המימוש (בעיקר למימוש ב-VLSI).

בעבודה אנו דנים גם באפשרות להכניס שגיאות גאומטריות במישורי הסיבית על מנת להגדיל את יחס הדחיסה. במקרה הרציף אנו מביאים משפט הנותן חסם תחתון על האורך של קטעי שלד הנשמטים עקב ההכנסה של אותן שגיאות. במקרה הבדיד, אנו מביאים תוצאות סימולציה המדגימות את החיסכון בקצב (סיביות) כנגד השגיאות הגאומטריות המופיעות בתמונה המשוחזרת.

במקרה של הכנסה של שגיאות גאומטריות בתמונות הבדידות, אנו דנים גם באפשרות של שימוש בתהליך עבור שלאחר השחזור על מנת לשפר את האיכות הסוביקטיבית של התמונה. תהליך זה מבוסס על מילוי אקראי של איזורים לא מוגדרים בתמונה המשוחזרת.

השגיאות הגאומטריות הנ"ל מהוות את הבסיס לאלגוריתם לשידור פרוגרסיבי על בסיס גאומטרי שמוצג גם כן. עם אלגוריתם זה, גירסאות סבירות של התמונה מתקבלות בפחות מ-0.2 סיביות לתא תמונה.

בסיכום העבודה מובאות הצעות לשיפור שיטת הקידוד בכיוון של פיתוח ייצוגים מורפולוגיים אחרים, גם עבור תמונות בינריות וגם עבור תמונות רבות-רמות. כמו כן, מובאות הצעות אחרות להמשך המחקר של קידוד תמונות בשיטות גאומטריות.

רשימת סמלים וקיצורים

E^N - מרחב אוקלידי N -ממדי

R^N - מרחב רציף N -ממדי

Z^N - מרחב בדיד N -ממדי

אותיות עיליות בלועזית (A, B, \dots) - קבוצות ב- E^N

אותיות קטנות בלועזית (a, b, \dots) - אברים או וקטורים ב- E^N

\oplus - פעולת ההרחבה (dilation)

\ominus - פעולת הכרסום (erosion)

\circ - פעולת הפתיחה (opening)

\otimes - פעולת הסגירה (closing)

A_x - הזזה של הקבוצה A עם וקטור הזזה x

A' - שיקוף של הקבוצה A

A^c - משלים של הקבוצה A

$T[\cdot]$ - מעטח עליון

$f(\cdot), k(\cdot)$ - פונקציות מ- E^{N-1} ל- E

$U[\cdot]$ - umbra של אות

$f'(\cdot)$ - שיקוף של $f(\cdot)$

Medial axis - $ME(X)$ - קו אמצעי של קבוצה רציפה X

רשימת סמלים וקיצורים (המשך)

$D(x, \rho)$ - כדור במרחב רציף N -ממדי עם מרכז x ורדיוס ρ

$D(\psi, \rho_\psi)$ - כדור מירבי

$\Psi(X)$ - שלד של קבוצה רציפה X

ψ - נקודת שלד

$S_\rho(X)$ - תת-קבוצה של $\Psi(X)$

U - כדור יחידה ב- R^2

ρU - כדור ברדיוס ρ ב- R^2

$SK^B(X)$ - שלד מורפולוגי של קבוצה X ב- Z^2 המחושב אם איבר תצורה B

$SK_n^B(X)$ - תת-קבוצה של $SK^B(X)$

$N(B)$ - מספר התת-קבוצות של השלד המורפולוגי

Modified Morphological Skeleton - MMS

$MS(X)$ - שלד מורפולוגי משופר של קבוצה X ב- Z^2

$M_n(X)$ - תת-קבוצה של $MS(X)$

$N_M(X)$ - מספר התת-קבוצות של השלד המורפולוגי המשופר

$B(n)$ - סדרה של אברי תצורה ב- Z^2

$A(n)$ - סדרה של אברי תצורה ב- Z^2

$R(X)$ - ייצוג מורפולוגי כללי של הקבוצה X ב- Z^2

$R_n(X)$ - תת-קבוצות של $R(X)$

$\chi[\cdot]$ - פונקציה לחישוב $R(X)$

∂X - שפה של קבוצה X ב- R^2

$\kappa(\cdot)$ - פונקצית עקמומיות

$\Gamma(X)$ - קבוצה של נקודות ב- ∂X עם עקמומיות לא מוגדרת

רשימת סמלים וקיצורים (המשך)

$\xi(X)$ - תת-קבוצה של נקודות ב- $\Gamma(X)$ עם זוית קטורה

$\Psi_m(X)$ - שלד מינימלי של קבוצה X ב- R^2

s - נקודה סינגולרית

$S(X)$ - קבוצה של נקודות סינגולריות של X

$PS_X(r, B)$ - ספקטרום צורה רציף

$PS_X(n, B)$ - ספקטרום צורה בדיד

$\Lambda_X(r)$ - פילוג אורך השלד הרציף

$\Lambda_X(n, B)$ - פילוג אורך השלד הבדיד

$\sigma(\cdot)$ - פונקצית מרחק ל- ∂X

Reduced Modified Morphological Skeleton - $RMMS$

$RMMS(X)$ - שלד מורפולוגי משופר מופחת של קבוצה X ב- Z^2

$M_n'(X)$ - תת-קבוצה של $RMMS(X)$

$\delta(x, y)$ - מרחק בין השברים של שני תאי תמונה

$\Omega(\cdot)$ - פונקצית טיב הייצוג

V - מישור הסיבית הפחות משמעותי

W - מישור הסיבית שלפני מישור הסיבית הפחות משמעותי

$AC(\cdot)$, $DC(\cdot)$ - מדדי אקראיות של איזור בתמונה

פרק 1 : מבוא

1.1 הצגת הבעיה

בעיית הייצוג של תמונות הינה בעיה חשובה מאוד בתחומים רבים כגון ראייה ממוחשבת, קידוד תמונות, וכו'.

בראייה ממוחשבת, חשוב לייצג את התמונה בצורה יעילה לשימוש המסוים. למשל, אם המטרה הינה זיהוי צורות, יש לייצג את התמונה (או הגופים השונים בה) ע"י נתונים המאפיינים את התמונה בצורה חד משמעית ככל האפשר. לפעמים יש גם דרישה של חסינות לרעש של הייצוג, או של אינווריאנטיות של הייצוג לפעולות שונות בתמונה כגון הזזה, סיבוב, וכו'.

בקידוד (דחיסה) של תמונות, המטרה העיקרית הינה ייצוג תמונות ע"י מספר קטן ככל האפשר של סיביות, תוך שמירה על איכות שחזור רצויה, או לחילופין קבלת שחזור טוב ככל האפשר עבור כמות סיביות נתונה (קצב נתון). בעבודה זו אנו מתרכזים בבעיה של ייצוג תמונות למטרות קידוד ומטפלים הן בקידוד של תמונות בינריות והן של תמונות רבות-דמות.

מרבית פעילות המחקר בשנים האחרונות בקידוד תמונות התרכזה בטיפול האלגברי של תמונות באמצעות התמרות אורתוגונליות או מוזלים של חזיון [9, 25, 50]. בעבודה זו אנו מעוניינים לטפל בבעיית הקידוד מנקודת מבט גאומטרית (ראה [1, 25, 33]), ואת זאת נעשה ע"י שימוש בשלד מורפולוגי (morphological skeleton) של תמונות בינריות. השלד של קבוצה במישור הרציף (R^2) הוצג לראשונה ע"י Blum [2, 3] כדרך לייצוג של צורות ביולוגיות והוא מוגדר כאוסף המרכזים של המעגלים המירביים הנמצאים בתוך הקבוצה (Blum השתמש במושג של "התפשטות אש" על מנת לתת הגדרה אינטואיטיבית של השלד או קו אמצעי - *Medial Axis* - כפי שהוא קרא לו בתחילה, ראה פרק 3). לאזור העבודה של Blum, המושג של שלד הורחב לתמונות בדידות [41, 42]. במקביל לעבודות שונות עם שלדים [11, 20, 32], בתחומים של ראייה ממוחשבת ועבוד תמונות, התפתחה התורה של מורפולוגיה מתמטית [40, 57, 58] כדרך לטיפול של תמונות מנקודת מבט גאומטרית. כשימוש של תורה זו הוכיח Lantuejoul [27-29], שניתן לחשב את השלד דרך פעולות בטיסיות של מורפולוגיה מתמטית, וכך נוצר המושג של "שלד

מורפולוגי".

רוב העבודות בדחיסת תמונות נותנים מדד כמותי של הביצועים (בדרך כלל שגיאה רבועית ממוצעת Mean Square Error - MSE), מדד שאינו בהתאמה מלאה עם הטיב הסוביקטיבי של התמונה המשוחזרת, אך מאפשר לטפל בבעיית הדחיסה כבעיה פורמלית באופטימיזציה. בעבודה זו המושג "ביצועים" מתייחס לאיכות הסוביקטיבית של התמונה בלבד.

כמו כן, מכיון שמטרת אלגוריתם הקידוד הינה לקבל איכות סוביקטיבית טובה בקצב נמוך, השגיאות שהאלגוריתם מכניס מבוססות על עקרון של הורדת הקצב תוך שמירה על אותה איכות סוביקטיבית ולא של שמירה על ערך ה-MSE או כל מדד כמותי אחר.

1.2 סיכום התרומות העקריות של העבודה

בתחילת העבודה אנו מביאים אלגוריתם לחישוב הפעולות המורפולוגיות על קוד השרשרת (chain code). ז"א, אם נתונה תמונה בינרית המיוצגת ע"י קוד שרשרת, אנו מציגים אלגוריתם המאפשר חישוב ישיר של קוד השרשרת המתאים לתמונה שמתקבלת לאחר ההפעלה של פעולה מורפולוגית מסויימת.

לאחרונה, Schafer ו-Maragos [33] דנו בקידוד גאומטרי של תמונות בינריות בדידות בעזרת השלד המורפולוגי. כהרחבה של ייצוג מורפולוגי זה, אנו מציגים את ה"שלד המורפולוגי המשופר" [53], המשתמש באיבר תצורה בעל גודל משתנה. עם השלד המורפולוגי המשופר מתקבלות פחות תת-קבוצות של השלד וכך ניתן להגדיל את יחס הדחיסה.

השלד של קבוצות רציפות ושל קבוצות בדידות הינו ייצוג בעל יתרונות רבה. ז"א, קיימת תת-קבוצה של השלד המספיקה לייצוג של הקבוצה המקורית. אנו מביאים משפט (תקרא "משפט הדגימה הגאומטרית" [51, 53]) הן באפשרות לייצג את השפה של קבוצה רציפה במישור (ב- R^2) ע"י תת-קבוצה יחידה של נקודות שלד. נקודות אלו, הנקראות "נקודות סינגולריות", נמצאו כבעלות חשיבות רבה בייצוג של קבוצות בינריות בדידות גם כן. על בסיס עובדה זו, פותחו אלגוריתם יעיל להקטנת היתרות בעלדים של קבוצות בדידות במישור (ז"א, ב- Z^2), ולחישוב של "שלדים מינימליים" (ז"א, תת-

קבוצה של השלד המספיקה לשחזור מלא של הקבוצה המקורית ושאינן בה נקודות מיותרות). בעזרת השלד המורפולוגי המשופר והשיטה לחישוב "שלדים מינימליים" שנבעה ממשפט הדגימה הגאומטרית, אנו מציעים ייצוג מורפולוגי חדש של תמונות בינריות הנקרא "שלד מורפולוגי משופר ומופחת" (*RMMS - Reduced Modified Morphological Skeleton*). על בסיס ה-*RMMS* מוצע אלגוריתם חדש לקידוד תמונות רבות-רמות המבוסס על פעולות מורפולוגיות בינריות בלבד [52]. האלגוריתם מורכב מהשלבים הבאים: מספר מישורי הסיביות מופחת מ-8 ל-4 בתהליך של פיזור השגיאה (*error diffusion*). לאחר מכן, מייצגים את ערכי תאי התמונה באמצעות קוד Gray. כל אחד ממישורי הסיביות מייצג ע"י ה-*RMMS* ומקודד ע"י שילוב של מקודדי אנטרופיה.

קיימת אפשרות להכניס שגיאות "גאומטריות" במישורי הסיביות על מנת להגדיל את יחס הדחיסה. מוצע גם אלגוריתם לשידור פרוגרסיבי על בסיס גאומטרי המבוסס על השגיאות הנ"ל.

בסימולציות קבלנו יחס דחיסה של 1:30 עבור תמונות רבות-רמות רגילות. מכון ששיטת הקידוד שאנו מציעים אינה מבוססת על סגמנטציה, שפות לא אמיתיות אינן מופיעות בתמונה המשוחזרת. כמו כן, בניגוד לשגיאות כימות ובלוקים המופיעות בשיטות קידוד המקובלות, השגיאות הגאומטריות המופיעות באלגוריתם המוצע הינן "נוחות" יותר לצופה.

בנוסף לדברים לעיל, אנו מגדירים פונקציה פלוג אורך השלד ומביאים כמה מתכונותיה. בעזרת הגדרה זו אנו דנים בקצרה בכמות וסוג המידע הנשאים ע"י חלקים שונים של השלד. נושא זה חשוב למקרה של קידוד עם שגיאה, כיון שחשוב להעריך את השגיאה בשחזור כנגד החיסכון בקצב.

1.3 מבנה העבודה

פרק 2 מציג את המורפולוגיה המתמטית, מביא מושגים בסיסיים במורפולוגיה מתמטית בינרית, ומציג את האלגוריתם להפעלת פעולות מורפולוגיות ישירות על קוד השרשרת. פרק 3 מציג את השלד המורפולוגי של תמונות בינריות רציפות ובדידות ומביא את ההגדרה של השלד המורפולוגי המשופר (*MMS*) יחד עם תכונותיו. בפרק 4 מובאים משפטים הקשורים לייצוגים יחידים בעזרת השלד ולכמות

המידע הנשאת ע"י חלקים שונים של השלד. אלגוריתם הקידוד המוצע עבור תמונות בינריות ועבור תמונות רבות-דמות מתואר בפרק 5. תוצאות סימולציה של האלגוריתם המוצע מופיעות בפרק 6. ולסיים, פרק 7 מסכם את העבודה ומתווה כווני המשך לעבודה.

פרק 2: מושגים במורפולוגיה מתמטית בינרית

2.1 מבוא

המושג מורפולוגיה מתמטית נולד ב-1964 עם העבודות של Serra ו-Matheron [40, 57]. מהעבודות הנ"ל נגזר הספר של Matheron "Random Sets and Integral Geometry" שהופיע ב-1975 [40]. הספר מציג תאוריה חדשה המשלבת שתי תאוריות אחרות: גאומטריה אנטגרלית (הגוף הנלמד דטרמיניסטי לחלוטין ונקודות התצפית הינן אקראיות); יחד עם תורת הקבוצות אקראיות (Random Sets - הגוף עצמו אקראי גם כן).

Serra הציג את השימושים של התאוריה הנ"ל בתחום של עיבוד תמונות בספרו הראשון "Image Analysis and Mathematical Morphology" [57] ב-1982 ומאז רבה הפעילות בתחום. ראה למשל [10, 31, 34-39, 48] עבור סקירה של עבודות במורפולוגיה מתמטית.

אבל מהי "מורפולוגיה מתמטית" ?

קודם כל, טבעי לחשוב מנקודת מבט גאומטרית, וזאת גם מסיבות מתמטיות וגם מסיבות פסיכולוגיות (ראה תאוריה של Gestalt) [14, 40, 57]. המילה *Morphology* (מורפולוגיה) מתייחסת לניתוח צורה ומבנה, ז"א ניתוח התמונה (או האות) נעשה מנקודת מבט גאומטרית (ולא אלגברית כמו בשיטות המקובלות). בדרך כלל, בשיטות מורפולוגיות מגדירים מראש איבר תצורה (*structuring element*), ובעזרתו חוקרים את התמונה. זהו רעיון מרכזי במורפולוגיה מתמטית, מפני שהוא מייצג את הדעה שמה שאנו רואים אינו סוביקטיבי בלבד או אוביקטיבי בלבד, אלא משהו ביניהם. איבר התצורה פועל כמקשר בין החלק הסוביקטיבי והאוביקטיבי, ונותן גמישות רבה כי ניתן להגדיר איברי תצורה שונים המותאמים לשימוש המיוחד. איברי התצורה השונים מסננים מידע בעל אופי שונה מהתמונה, לכן יש להפעיל בכל שלב של ניתוח התמונה את איבר התצורה המתאים ביותר הנותן את המידע החשוב ומבטל ככל האפשר את המידע בו אנו לא מעוניינים.

המושגים והכלים הבסיסיים מאחורי מורפולוגיה מתמטית באים מתורת הקבוצות (set theory) ומגאומטריה אינטגרלית (integral geometry) עבור אותות בינריים (binary) N -ממדיים, ומתורת

המידות (measure theory) ו-fuzzy set theory עבור אותות רבי-רמות (multi-level) [40, 57, 58]. מכאן, מורפולוגיה מתמטית מטפלת בתמונה (או אות) ובעצמים בה כקבוצות במרחב N -ממדי.

כל התמרה מורפולוגית $\psi(\cdot)$ חייבת לקיים ארבעה עקרונות [57]:

1. קביעות תחת הזזה (compatibility under translation):
 $\psi(\cdot)$ קבועה להזזה אם ורק אם הזזה של קבוצה X במרחב אוקלידי N -ממדי לפני הפעלתה של $\psi(\cdot)$ נותן אותה תוצאה כמו הזזה של $\psi(X)$ ($\psi(X_h) = [\psi(X)]_h$, h וקטור הזזה N -ממדי).
2. קביעות תחת שינוי גודל (compatibility under change of scale):
 $\psi(\cdot)$ חייבת להיות קבועה תחת שינוי גודל באותו אופן כמו בעקרון הקודם.
3. עקרון הידע המקומי (local knowledge principle):
 $\psi(\cdot)$ מקיימת את עקרון הידע המקומי אם ורק אם עבור כל קבוצה חסומה Z' , בה אנו מעוניינים לחשב את $\psi(X)$, ניתן למצוא קבוצה חסומה אחרת Z ב- Z' כך שהידע על X רק בתוכה מספיקה להפעלה מקומית (ז"א ב' Z) של $\psi(\cdot)$. מעניין לציין כאן, שמספר פעולות הנחשבות בספרות כפעולות מורפולוגיות, אינן מקיימות עקרון זה. למשל, השלד, אותו נציג בפרק הבא, אינו מקיים עקרון זה.
4. רציפות-חלקית (semi-continuity):

נגדיר התמרה $\psi(\cdot)$ המקיימת: אם $A \subseteq B$ אזי $\psi(A) \subseteq \psi(B)$; ונקרא להתמרה מסוג זה התמרה גדלה (increasing). העקרון הרביעי של המורפולוגיה המתמטית אומר שלכל סדרה יורדת α_i של קבוצות סגורות המתכנסת לקבוצת גבול α , ולכל התמרה גדלה $\psi(\cdot)$, מתאימה סדרה של קבוצות מותמרות המתכנסת להתמרה של α (ניתן להתייחס למשלמים של הסדרה יורדת α_i וכך לדרוש את התכונה עבור סדרה של קבוצות פתוחות).

ניתן להגדיר משפחה שלמה של מסננים מורפולוגיים (morphological filters) ולהשתמש בהם במקום המסננים הלינאריים המקובלים. בניגוד למסננים לינאריים, הפוגעים בדרך כלל בגאומטריית התמונה, מסננים מורפולוגיים משאירים את רוב המידע החשוב שבצורה ללא פגע. מדידות חשובות כגון היקף, שטח, וכו', ניתנים לחישוב עם אלגוריתמים המבוססים על פעולות מורפולוגיות [14].

לסיום, נציין כמה תכונות חשובות של הגישה המורפולוגית [14]:

1. פעולות מורפולוגיות מבוססות על טיפול גאומטרי של תמונות, תוך כדי שמירה על התכונות הגאומטריות החשובות לשימוש המסוים.
 2. קיימת אלגברה מורפולוגית מפותחת היטב.
 3. ניתן לממש משפחה גדולה של אלגוריתמים ע"י פעולות מורפולוגיות בסיסיות (אותן נציג בסעיף הבא).
 4. קיימים משפטי ייצוג המוכיחים איך לייצג משפחה גדולה של מסננים בעזרת אוסף של פעולות מורפולוגיות בסיסיות [40].
- בסעיף הבא מוגדר אוסף של פעולות בסיסיות במורפולוגיה מתמטית.

2.2 הגדרות במורפולוגיה בינרית

מורפולוגיה מתמטית (Mathematical Morphology) מתבססת על תורת הקבוצות (set theory) [57]. קבוצות במורפולוגיה מתמטית מייצגות צורות המופיעות בתמונות בינריות (binary pictures) או בתמונות רמות אפור (gray tone images). למשל, קבוצות במרחב אוקלידי דו-ממדי מייצגות אזורים לבנים בתמונות בינריות, קבוצות במרחב אוקלידי תלת-ממדי מייצגות תמונות בינריות משתנות בזמן או תמונות רמות אפור או גופים תלת-ממדיים בינריים. עבודה במרחבים עם ממדים גבוהים יותר יכולה להוסיף לתמונות מידע נוסף כגון צבע, זמן, וכו'.

בסעיף זה נגדיר את הפעולות המורפולוגיות הבסיסיות ונציג חלק מתכונותיהן. נתייחס לנקודות או איברים בקבוצה שעליה מופעלות ההתמרות המורפולוגיות כנקודות שנבחרו ("1"), וליתר הנקודות כנקודות שלא נבחרו ("0"). מנקודת מבט זאת, ניתן להתייחס למורפולוגיה כמורפולוגיה בינרית (binary morphology) [17, 57].

יהיו A ו- B קבוצות (sets) במרחב אוקלידי N -ממדי E^N (Euclidian N -dimensional space) עם איברים a ו- b בהתאמה, $a=(a_1, \dots, a_N)$ ו- $b=(b_1, \dots, b_N)$. E^N מייצג את R^N או את

Z^N (מרחבים רציפים או בדידים בהתאמה). אזי, הפעולות המורפולוגיות הבסיסיות מוגדרות כדלקמן:

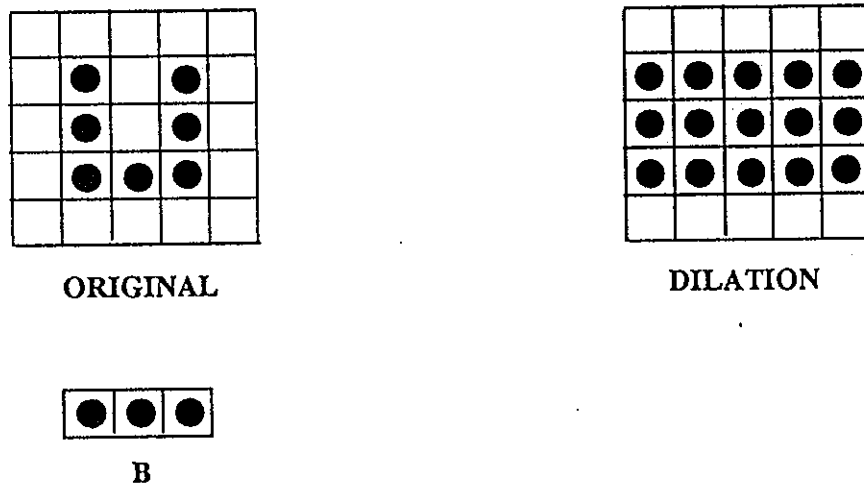
הרחבה (Dilation):

ההרחבה של A ע"י B מסומנת ב $A \oplus B$ ומוגדרת כ:

$$(2.1) \quad A \oplus B = \{c \in E^N \mid c=a+b \text{ for some } a \in A \text{ and } b \in B\}$$

פעולת ההרחבה נובעת מפעולת החיבור של Minkowsky (Minkowsky set addition) [40, 57]. ראה

ציור 2.1 עבור דוגמא של הרחבה ב- Z^2 .



ציור 2.1: דוגמא של הרחבה ב- Z^2 .

Figure 2.1: Dilation example in Z^2

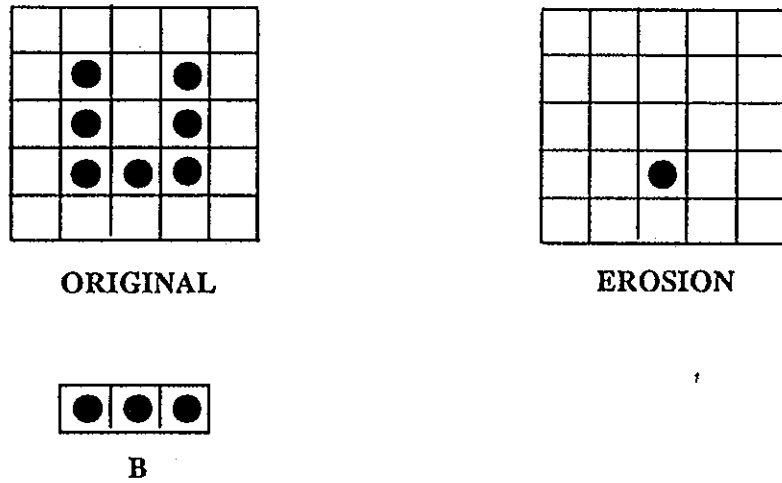
כרסום (Erosion):

הכרסום של A ע"י B זו פעולה דואלית להרחבה. הכרסום מסומן ב $A \ominus B$ ומוגדר כ:

$$(2.2) \quad A \ominus B = \{x \in E^N \mid x+b \in A \text{ for every } b \in B\}$$

פעולה זאת נובעת מפעולת החיסור של Minkowsky (Minkowsky set subtraction). ראה ציור 2.2

עבור דוגמא של כרסום ב- Z^2 .



ציור 2.2: דוגמא של כרסום ב- Z^2
 Figure 2.2: Erosion example in Z^2

מההפעלה בשרשרת של שתי הפעולות המורפולוגיות הנ"ל, ניתן להגדיר זוג נוסף של פעולות

מורפולוגיות דואליות: פתיחה (Opening) וסגירה (Closing):

פתיחה (Opening):

הפתיחה של A ע"י B מסומנת ב $A \circ B$ ומוגדרת כ:

$$(2.3) \quad A \circ B = (A \ominus B) \oplus B$$

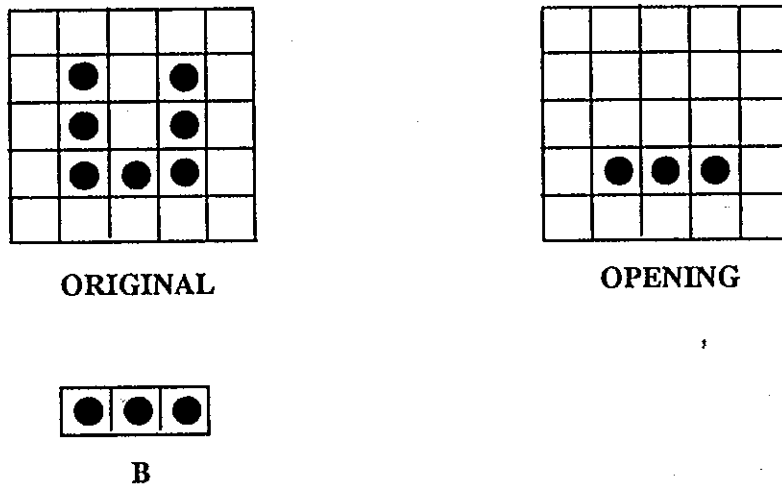
ראה ציור 2.3 עבור דוגמא של פתיחה ב- Z^2 .

סגירה (Closing):

הסגירה של A ע"י B מסומנת ב $A \otimes B$ ומוגדרת כ:

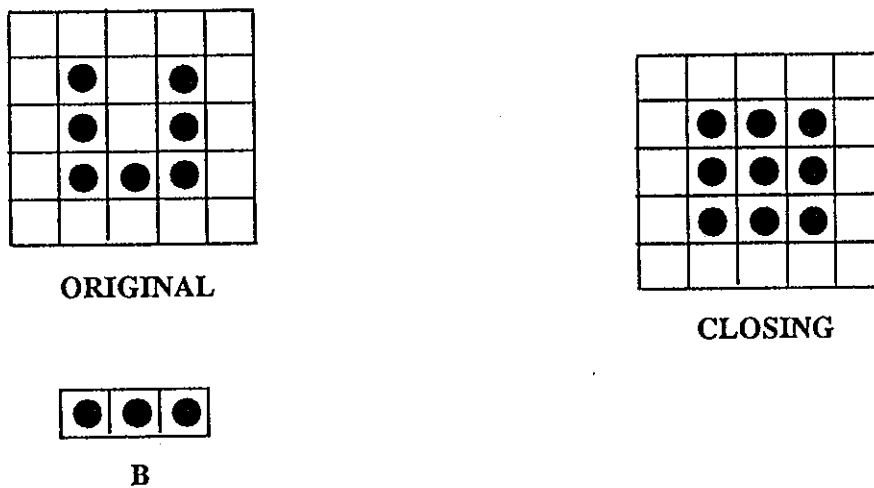
$$(2.4) \quad A \otimes B = (A \oplus B) \ominus B$$

ראה ציור 2.4 עבור דוגמא של כרסום ב- Z^2 .



ציור 2.3: דוגמא של פתיחה ב- Z^2

Figure 2.3: Opening example in Z^2

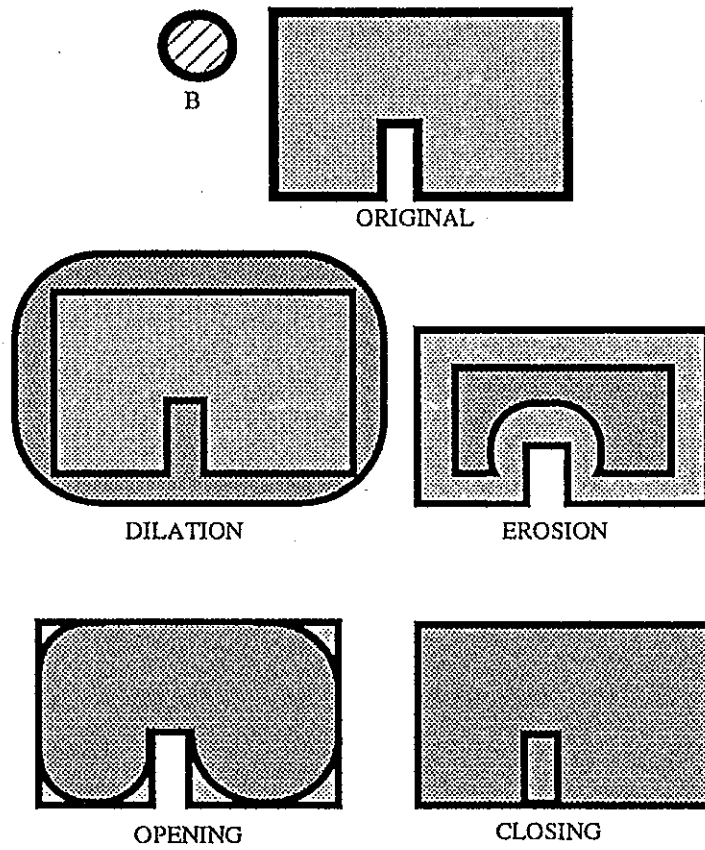


ציור 2.4: דוגמא של סגירה ב- Z^2

Figure 2.4: Closing example in Z^2

בהגדרות שלעיל, קבוצה B נקראת איבר התצורה (*structuring element*) ו- A בזרך כלל מסמל את התמונה (או האות). דוגמאות ב- R^2 מופיעות בציור 2.5. את הפרוש הגאומטרי של הפעולות

שהגדרנו נסביר בעזרת התכונות שנציג בסעיף הבא.



צור 2.5: דוגמאות של ארבעת הפעולות המורפולוגיות הבסיסיות ב- R^2

Figure 2.5: Examples of the four basic morphological operations in R^2

מגדירים, כמו כן, את הפעולות הבסיסיות הבאות בין קבוצות:

הזזה (translation):

ההזזה של A ע"י הוקטור $x \in E^N$ מוגדרת כ:

$$(2.5) \quad A_x = \{c \in E^N \mid c = a+x \text{ for some } a \in A\}$$

שקוף (Reflection):השקוף של B מוגדר כ:

$$(2.6) \quad B' = \{x \mid \text{for some } b \in B, x = -b\}$$

משלים (Complement):המשלים של A מוגדר כ:

$$(2.7) \quad A^c = \{x \in E^N \mid x \text{ not in } A\}$$

2.3 תכונות בסיסיות של מורפולוגיה בינרית

אנו מציגים כעת תכונות בסיסיות של הפעולות שהוגדרו בסעיף הקודם, והן יעזרו לנו להבין את משמעותן הגאומטרית. תכונות נוספות ניתן למצוא בגספח א'. את ההוכחות המתאימות ניתן למצוא ב-[14, 17, 40, 57]. להלן, A, B, C, D , ו- K , הינן קבוצות ב- E^N .

תכונה 2.1:

הרחבה הינה פעולה חילופית (commutative).

$$(2.8) \quad A \oplus B = B \oplus A$$

תכונה 2.2:

הרחבה הינה פעולה אסוציאטיבית (associative).

$$(2.9) \quad A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

תכונה 2.3:

$A \oplus B$ מתקבל מאיחוד כל ההזזות של A המוכתבות ע"י האברים ב- B .

$$(2.10) \quad A \oplus B = \bigcup_{b \in B} A_b$$

תכונה 2.4:

הרחבה הינה פעולה קבועה להזזה (translation invariant) (ראה העקרון הראשון במורפולוגיה מתמטית).

$$(2.11) \quad A_x \oplus B = (A \oplus B)_x$$

תכונה 2.5:

$A \ominus B$ מכיל כל נקודה x במרחב כך שכאשר מזיזים את איבר התצורה B ע"י x , מתקבלת צורה B_x המוכלת כולה ב- A .

$$(2.12) \quad A \ominus B = \{x \in E^N \mid B_x \subseteq A\}$$

תכונה 2.6:

$A \ominus B$ מתקבל מזיזותן כל ההזזות של A המוכתבות ע"י האברים ב- B' .

$$(2.13) \quad A \ominus B = \bigcap_{b \in B'} A_b$$

תכונה 2.7:

פעולת הכרסום הינה קבועה להזזה (translation invariant) (ראה העקרון הראשון במורפולוגיה מתמטית).

$$(2.14) \quad A_x \ominus B = (A \ominus B)_x$$

תכונה 2.8:

$$(2.15) \quad A \oplus B = (A^c \ominus B')^c$$

מכאן ניתן לראות את הדואליות בין הרחבה וכרסום (בדומה לחוק DeMorgan): מה שפעולת ההרחבה מבצעת לצורה, פעולת הכרסום מבצעת לרקע.

תכונה 2.9:

$$(2.16) \quad A \ominus (B \oplus C) = (A \ominus B) \ominus C$$

תכונה זו, הדואלית לתכונה 2.2, חשובה מאוד עבור מימושים בהם יש צורך בפירוק איברי התצורה על מנת להקטין את כמות החישובים [17, 33, 67]. במקום לבצע פעולת הכרסום עם איבר תצורה

$D = B \oplus C$, ניתן לבצע ראשית כרסום עם B ולתוצאה לבצע כרסום עם C .

תכונה 2.10:

פעולת הסגירה הינה idempotent.

$$(2.17) \quad (A \otimes K) \otimes K = A \otimes K$$

תכונה 2.11:

פעולת הפתיחה הינה idempotent.

$$(2.18) \quad A \circ K = (A \circ K) \circ K$$

תכונה 2.12:

פעולת הפתיחה אינה מגדילה את הצורה.

$$(2.19) \quad A \circ B \subseteq A$$

תכונה 2.13:

פעולת הסגירה אינה מקטינה את הצורה.

$$(2.20) \quad A \subseteq A \otimes B$$

תכונה 2.14:

תכונה זאת מראה את הדואליות בין פתיחה וסגירה:

$$(2.21) \quad A \otimes B = (A^c \circ B')^c$$

תכונה 2.15:

תכונה זאת נותנת תאור גאומטרי של פעולת הפתיחה: הפתיחה של A ע"י B נתונה ע"י האיחוד של כל ההזזות של B המוכלות ב-A.

$$(2.22) \quad A \circ B = \{x \in A \mid \text{for some } y, x \in B_y \subseteq A\} = \bigcup_{\{y \mid B_y \subseteq A\}} B_y$$

תכונה 2.16:

מתוך הדואליות, ניתן לראות שהסגירה של A ע"י B נתונה ע"י החיתוך של כל ההזזות של B'^c , כך ש- B' בעלת נקודות משותפות עם A.

$$(2.23) \quad A \otimes B = \{x \in E^N \mid x \in B'_y \text{ implies } B'_y \cap A \neq \emptyset\} = \bigcap_{\{y \mid B'_y \cap A \neq \emptyset\}} B'^c_y$$

2.4 הרחבה של מורפולוגיה בינרית למורפולוגיה רבת-רמות

ניתן להרחיב את הפעולות המורפולוגיות שהצגנו בסעיף הקודם למקרה של מורפולוגיה רבת-רמות (multilevel morphology) בעזרת פעולות מקסימום-מינימום ($max-min$) [45, 43] או ע"י שימוש בעקרונות של fuzzy logic [15, 22]. ההרחבה, כפי שהוצגה ע"י Sternberg [62] שומרת על כל

התכונות שהוצגו עבור מורפולוגיה בינרית. בנספח ב' מובאות ההגדרות עבור מורפולוגיה רבת-רמות בעזרת עקרונות ה-*umbra* והמשטח עליון (*top surface*) ומוצג השימוש בפעולות מקסימום-מינימום כתכונות הנובעת ישירות מההגדרות [14, 17, 62]. כמו כן, מוצגות מספר תכונות בסיסיות של *umbra* ומשטח עליון המהוות את הבסיס להוכחה שהתכונות של מורפולוגיה רבת-רמות זהות לאלו של המורפולוגיה הבינרית. בנספח יש גם התייחסות לאפשרות לפרק פעולות במורפולוגיה רבת-רמות לאוסף של פעולות במורפולוגיה בינרית.

2.5 פעולות מורפולוגיות על קוד שרשרת

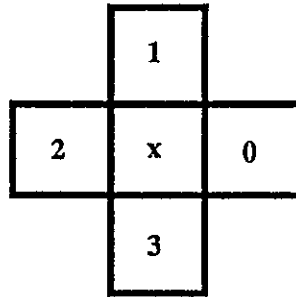
קיימות מספר גישות לייצוג תמונות בינריות, כגון: מיפוי סיבית (*bit map*), קוד שרשרת (*chain code*) [50], *quad tree* [23, 50], ועוד [50]. בסעיפים הקודמים ראינו את הפעולות המורפולוגיות הבינריות הבסיסיות הפועלות על קבוצות במרחבים אוקלידיים, ובמקרה של תמונות בינריות בדידות, הכוונה היא למרחב Z^2 .

אנו נציג כעת אלגוריתם לחישוב הפעולות המורפולוגיות הבסיסיות בתמונות בינריות בדידות, כאשר התמונות מיוצגות ע"י קוד שרשרת. ז"א, נתון קוד השרשרת של גוף בתמונה בינרית בדידה מסוימת, אנו נציג אלגוריתם לחישוב קוד השרשרת של הגוף המתקבל לאחר הפעלה של פעולה מורפולוגית מסוימת, וזאת ישירות מקוד השרשרת של הגוף המקורי. את האלגוריתם נתאר עבור פעולות ההרחבה והכרסום, עם שני עברי תצורה השימושיים ביותר, ועבור קוד שרשרת עם ארבעה כוונים. ניתן להשתמש באותם עקרונות לפעולות מורפולוגיות אחרות, לאברי תצורה אחרים, ועבור קוד שרשרת עם שמונה כוונים.

2.5.1 קוד שרשרת עם ארבעה כוונים

קוד שרשרת הינו שיטה לייצוג של שפות של תמונות בינריות בדידות (קבוצות ב- Z^2), כאשר שפה ∂X של הקבוצה X ב- Z^2 הינה הקבוצה של נקודות ב- X שהן שכנות לנקודות ב- X^c במקרה שלנו,

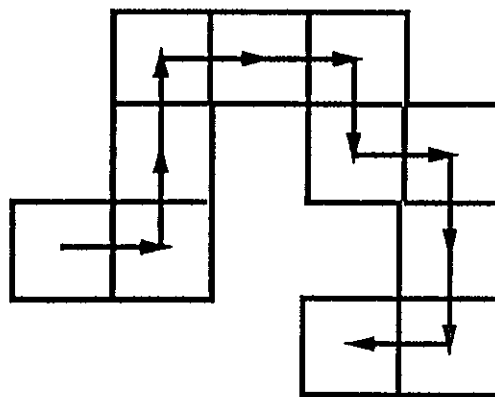
שכנות מוגדרת כשכנות 4, ז"א הנקודה x שבציור 2.6 שכנה לנקודות $\{0, 1, 2, 3\}$.



ציור 2.6 : נקודות שכנות וכוונים בקוד שרשרת

Fig. 2.6: Adjacent points and directions of the chain code

ב"טיוול" על השפה X , עוברים תמיד מנקודה בשפה לאחת מארבע שכנותיה. אם מסמנים את השכנים של נקודה כמו בציור 2.6, אזי כל תנועה על השפה מוגדרת היטב ע"י אחד מהמספרים $\{0, 1, 2, 3\}$ (ראה ציור 2.7). טיזרה של תנועות המיוצגות ע"י המספרים הנ"ל, נקראת קוד שרשרת [50]. לכן, שפה מיוצגת היטב ע"י נקודה התחלתית וקוד השרשרת המייצג את התנועות מאותה נקודה לאורך השפה.



CHAIN CODE:

0, 1, 1, 0, 0, 3, 0, 3, 3, 2

ציור 2.7: דוגמא של קוד שרשרת

Fig. 2.7: Chain code example

אנו רואים שלצורך הייצוג של הכוונים השונים בקוד השרשרת, דרושות שתי סיביות (ארבעה כוונים). על מנת להוריד את האנטרופיה של ייצוג זה, ניתן לבנות קוד שרשרת דיפנציאלי (differential chain code) [50], כאשר כל מספר מייצג שינוי בכיוון במקום הכיוון עצמו. במקרה של קוד שרשרת עם ארבע כוונים, יש שלושה אפשרויות לשינוי כוון: 0° , $+90^\circ$, ו- -90° . כאן דרושות גם כן שתי סיביות לייצוג, אבל בדרך כלל מתקבלת סידרת מספרים בעלת אנטרופיה נמוכה יותר. עבור הדוגמא שבציור 2.7 מתקבל קוד השרשרת הדיפנציאלי:

$$\{+90^\circ, 0^\circ, -90^\circ, 0^\circ, -90^\circ, +90^\circ, -90^\circ, 0^\circ, -90^\circ\}$$

2.5.2 פעולות מורפולוגיות על קוד שרשרת עם ארבעה כוונים

האלגוריתם המבצע פעולות מורפולוגיות על קוד השרשרת הוא כדלקמן: נניח שנתון קוד השרשרת של גוף בודד בתמונה בינרית. מחזיקים שתי רשימות, אחת המכילה את קוד השרשרת של הגוף המקורי ואחת המכילה את קוד השרשרת של הגוף החדש (המתקבל מהפעלתה של הפעולה המורפולוגית). קוד השרשרת של הגוף החדש הולך ונבנה תוך כדי סריקה חזו-פעמית של קוד השרשרת של הגוף המקורי, והחלפה של מחרוזות במחרוזות חדשה. קיימים ארבעה צרופים שונים (עד כדי סיבוב) בקוד השרשרת אותם יש לבדוק ובהתאם לבנות את קוד השרשרת החדש.

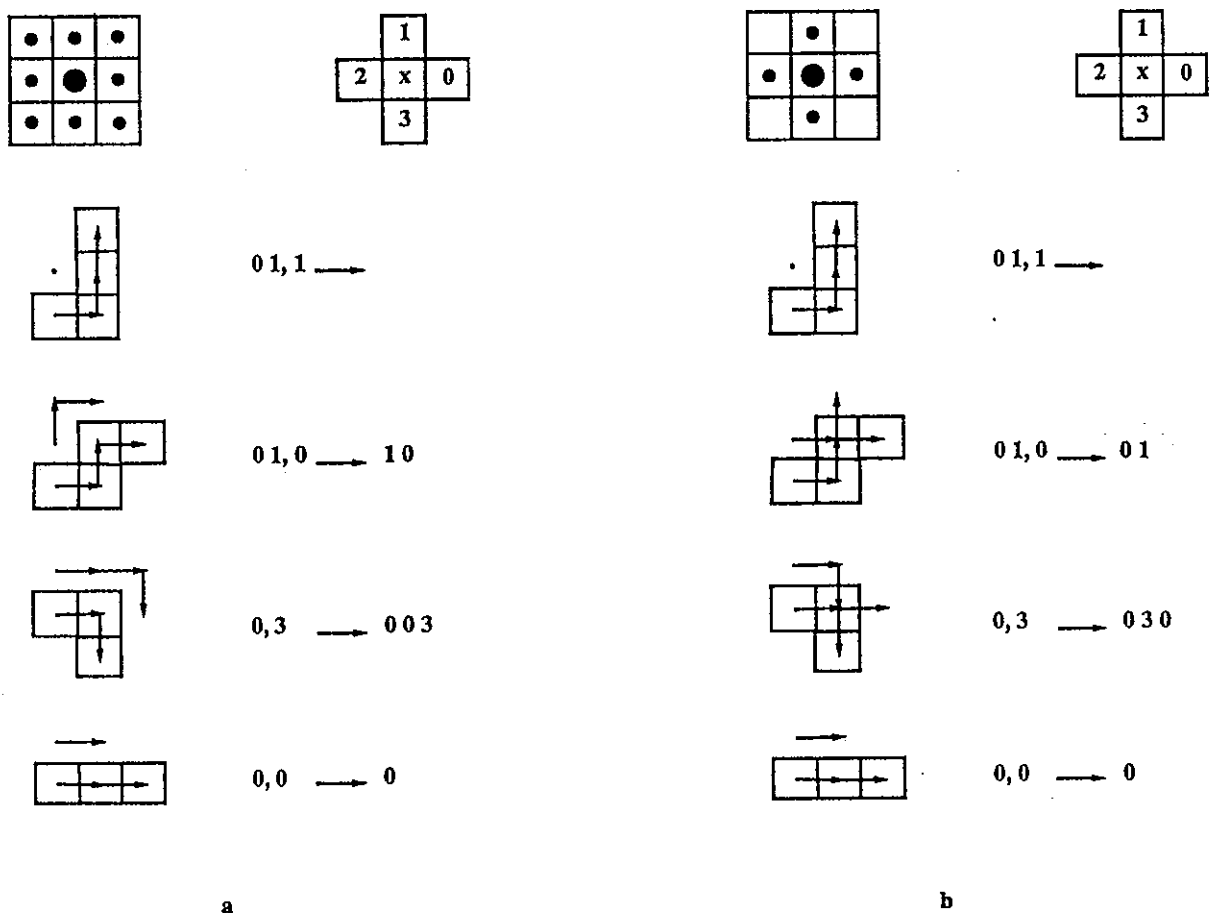
ציורים 2.8-2.9 מראים את ההחלפות האפשריות של מחרוזות עבור פעולות ההרחבה והכרסום, בהתאמה, ועבור שני אברי תצורה שונים. בכל ציור אנו רואים את איבר התצורה איתו עובדים, כל הצרופים האפשריים של מחרוזות בקוד השרשרת (עד כדי סיבוב, או לחלופין כל הצרופים האפשריים בקוד השרשרת הדיפנציאלי), והחלפות המחרוזות המתאימות.

הרבעים מציינים אותו קטע מן השפה המשמעותי לצורך החלפת מחרוזת (רבע עבור כל תא תמונה, ראה בהמשך את פרוט האלגוריתם), והחצים בהם מציינים את כוון הסריקה של השפה, כך שהגוף נשאר מצד ימין.

החצים המופיעים מחוץ לרבעים, מסמנים את השפה החדשה המתקבלת לאחר הפעולה המורפולוגית. נקודה מציינת שאין הוספה של איברים חדשים בקוד השרשרת.

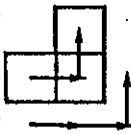
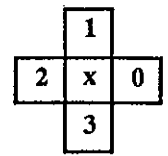
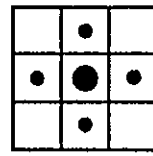
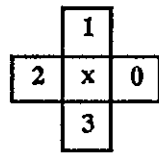
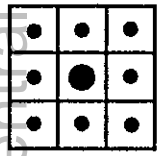
ליד אותם צרופים שונים של השפה, מופיעים קודי השרשרת המתאימים, גם של השפה המקורית וגם של השפה החדשה המתקבלת לאחר הפעולה המורפולוגית. הצרוף בקוד השרשרת שלפני ה"פטיק" הינו הצרוף אותו מחליפים במחזורות החדשה שבאגף הימני. כאן רואים שלפעמים מחליפים איבר בודד בקוד לפעמים שני אברים. האיבר שלאחר ה"פטיק", שנבדק גם הוא על מנת לבחור את הצרוף החדש, הינו האיבר הבא שיבדק בהמשך האלגוריתם (שלב 1 באלגוריתם כפי שיוסבר בהמשך).

מהציורים ניתן גם לראות את הדואליות בין פעולת ההרחבה ופעולת הכרסום. למשל, הצרוף $\{0, 1, 1\}$ (בקוד השרשרת של הגוף המקורי) בהרחבה עם איבר תצורה רבועי (ציור 2.8a), הינו דואלי לצרוף $\{0, 3, 3\}$ בכרסום עם אותו איבר תצורה (ציור 2.9a).

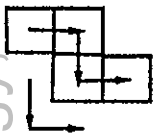


ציור 2.8: פעולת הרחבה מופעלת ישירות על קוד השרשרת

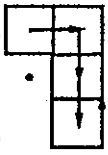
Fig. 2.8: Dilation applied directly to the chain code



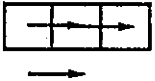
$$0,1 \rightarrow 001$$



$$03,0 \rightarrow 30$$

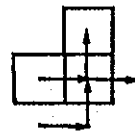


$$03,3 \rightarrow$$

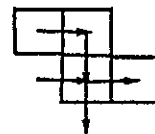


$$0,0 \rightarrow 0$$

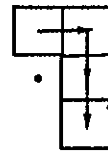
a



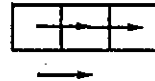
$$0,1 \rightarrow 010$$



$$03,0 \rightarrow 03$$



$$03,3 \rightarrow$$



$$0,0 \rightarrow 0$$

b

ציור 2.9: פעולת הכרסום מופעלת ישירות על קוד השרשרת

Fig. 2.9: Erosion applied directly to the chain code

נסביר כאן את השלבים השונים באלגוריתם עבור המקרה של פעולת ההרחבה עם איבר תצורה רבועי (ציור 2.8a). עבור פעולות מורפולוגיות אחרות ועבור אברי תצורה אחרים, האלגוריתם הינו דומה, רק הצורפים הנבדקים והחדשים הם שונים.

נסמן ב- $CC(n)$ את הערך של האיבר ה- n בקוד השרשרת של הגוף המקורי $(CC(n) = \{ 0, 1, 2, 3 \})$. השלבים באלגוריתם הם:

0. אתחל את $l = 0$ (איבר הראשון בקוד השרשרת של הגוף המקורי).
1. טובב את הצרוף הנבדק בקוד השרשרת של הגוף המקורי כך ש- $CC(l) = 0$ (ראה ציור 2.8a וזכור שאין התייחסות לטיבוב).
2. בדוק את האיבר הבא, ה- $l+1$, בקוד השרשרת. קיימות שלוש אפשרויות:
- a. $CC(l+1) = 3$. טובב את הצרוף "0 0 3" בהתאם לטיבוב ב-1 והוסף את הצרוף המתקבל לרשימה המכילה את קוד השרשרת החדש.
חזור ל-1.
- b. $CC(l+1) = 0$. טובב את הצרוף "0" בהתאם לטיבוב ב-1 והוסף את הצרוף המתקבל לרשימה המכילה את קוד השרשרת החדש.
חזור ל-1.
- c. $CC(l+1) = 1$. במקרה זה יש לבדוק את האיבר ה- $l+2$. עוברים לשלב 3.
3. קיימות שתי אפשרויות:
- a. $CC(l+2) = 1$. אין מוסיפים דבר לקוד השרשרת החדש.
- b. $CC(l+2) = 0$. טובב את הצרוף "1 0" בהתאם לטיבוב ב-1 והוסף את הצרוף המתקבל לרשימה המכילה את קוד השרשרת החדש.
חזור ל-1.

האלגוריתם נמשך עד שמגיעים לסוף קוד השרשרת (כל אברי הקוד נבדקו).

טבלה 2.1 מסכמת את האלגוריתם עבור פעולת ההרחבה עם איבר תצורה רבועי. אם האיבר הראשון בצרוף הנבדק הינו במקום ה- n בקוד השרשרת, אזי, בטבלה ניתן לראות את המיקום בקוד השרשרת של הצרוף הנבדק וגם של ההתחלה של הצרוף הבא שיבדק.

ניתן לראות שהאלגוריתם המבצע פעולות מורפולוגיות על קוד השרשרת מבוסס על מעבר יחיד על קוד השרשרת, והחלפה של מחזורות (string) בקוד שרשרת של התמונה המקורית במחזורות חדשה. בכל פעם, צריך לבחון שלושה איברים, לכל היותר, בקוד השרשרת לפני ההחלפה, על מנת להחליט על המחזורות החדשה, וכל איבר בקוד השרשרת נבדק לכול היותר פעמיים. לכן, הסיבוכיות באלגוריתם הינה

$O(N)$, כאשר N הינו האורך של קוד השרשרת של התמונה המקורית. קוד השרשרת המתקבל הינו בעל יתרות, אבל ניתן לבטל יתרות זו ע"י בדיקה של קוד השרשרת המתקבל (ראה בהמשך).

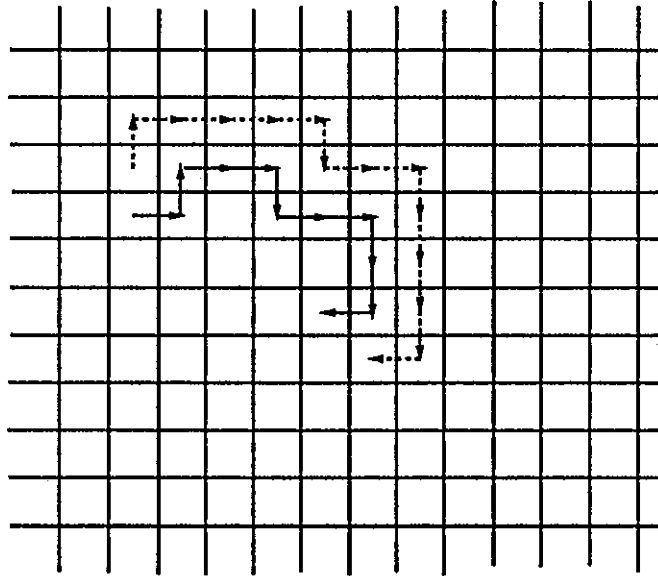
הרחבה עם איבר תצורה רבועי 3×3			
מיקום הצרוף הנבדק הבא	צרוף חדש	צרוף מוחלף	צרוף נבדק ומיקומו
$n+1$	0	0	$n, n+1 - 00$
$n+1$	003	0	$n, n+1 - 03$
$n+2$		01	$n, n+1, n+2 - 011$
$n+2$	10	01	$n, n+1, n+2 - 010$

טבלה 2.1: סיכום האלגוריתם לבצוע פעולת הרחבה (dilation),

ישירות על קוד השרשרת, עם איבר תצורה רבועי 3×3

Table 2.1: Summary of the dilation algorithm, applied directly to the chain code, with a 3×3 square structuring element

בציור 2.10 נתנת דוגמא עבור המקרה שבציור 2.8a (הרחבה עם איבר תצורה רבועי). ה"פסיקים" בקודי שרשרת, מסמנים את המקומות בהם התבצעה החלפת מחרוזת. שים לב שמופיעים גם "פסיקים" רצופים, המצביעים על כך שלא התווסף דבר לקוד השרשרת החדש (מקרה ראשון בציור 2.8a).



ORIGINAL: 0 1, 0, 0, 3 0, 0, 3, 3, 2

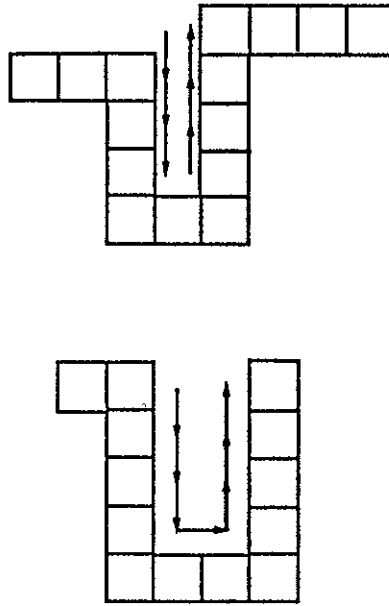
DILATED: 1 0, 0, 0 0 3, , 0 0 3, 3, 3 3 2

ציור 2.10: דוגמא של פעולת הרחבה מופעלת ישירות על קוד השרשרת

Fig. 2.10: Example of dilation applied directly to the chain code

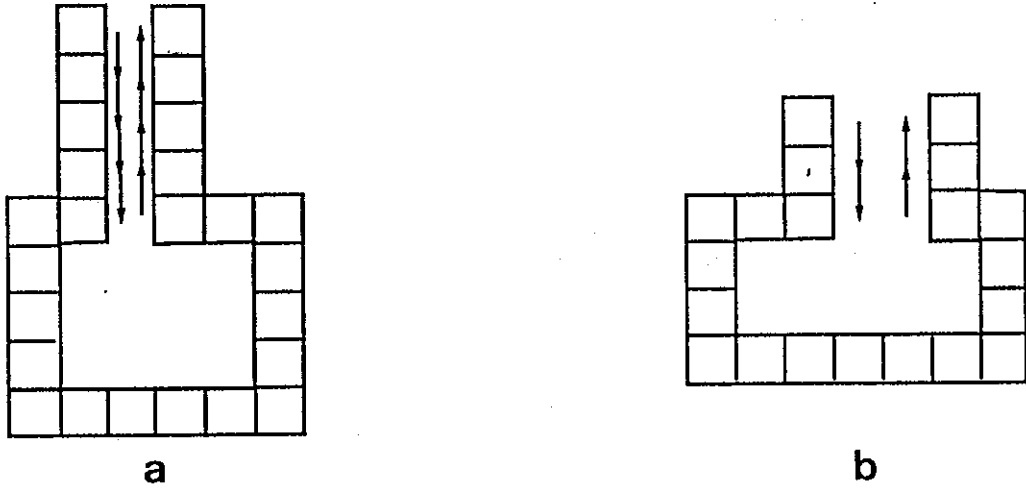
לאחר ההפעלה של הפעולות המורפולוגיות, יתכן שמתקבל קוד שרשרת בעל יתרות. למשל, עבור המקרה שבציור 2.8a (הרחבה עם רבוע), המצבים המתוארים בציורים 2.11 ו-2.12 יגרמו ליתרות (הסימנים בציורים הם כמו אלו שבציור 2.8). גילוי של מצבים כמו בציור 2.11 הינו קל (יש לגלות צרופים רצופים בכוננים מנותנים בלבד ולהחריד אותם מהקוד), ואינו משנה את סיבוכיות האלגוריתם. אם רוצים לגלות יתרות הנובעת מלולאות כמו בציור 2.12 (במקרה זה מדפיעים חורים לאחר ההרחבה, פעם בגלל חזרה דרך אותם תאי תמונה - (a), פעם בגלל חזרה דרך תאי תמונה שכנים - (b)), יש להחזיק עבור כל איבר בקוד השרשרת מונים הסופרים את המעברים בכוננים שונים. כאשר מספר המעברים בכל

כוון שווה למספר המעברים בכוון הנגדי, כל המחזורות מהמקום בו מצב זה קורה, למקום הנוכחי, מייצגת לולאה. את המונים יש לעדכן עבור כל החלפת מחזורות, מה שגורם להגדלה של סיבוכיות האלגוריתם ל- $O(N^2)$. אין הכרח לבדוק סוג יתרות זה, כי הייצוג עם יתרות הינו ייצוג נכון בכל מקרה (ז"א, ניתן לשחזר ממנו את הגוף הבינרי באופן חד משמעי).



ציור 2.11: מצבים הגורמים ליתרות בקוד השרשרת שקל לגלותם

Fig. 2.11: Situations which produce redundancy in the chain code and are easy to detect



ציור 2.12: מצבים הגורמים ליתרות בקוד השרשרת שקשה לגלותם

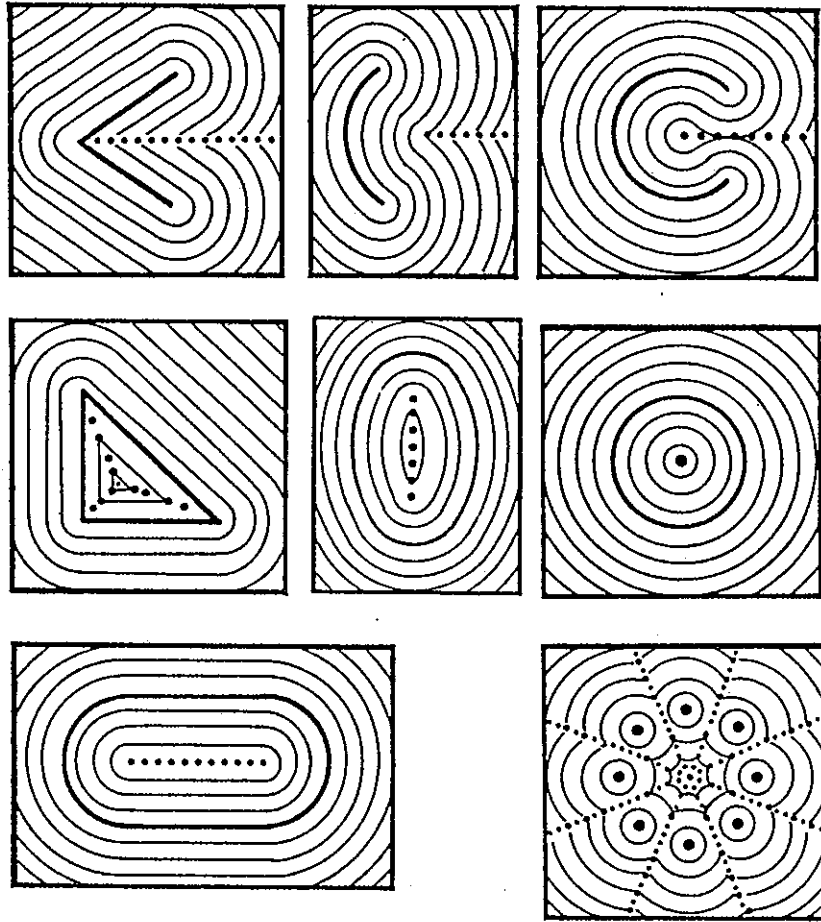
Fig. 2.12: Situations which produce redundancy in the chain code and are difficult to detect

פרק 3: שלד מורפולוגי לייצוג תמונות

בפרק זה נציג את השלד (*skeleton*) של צורות N -ממדית (בדידות או רציפות) בצורתו הקלאסית. נציג את תכונותיו ודרך לחישובו המבוססת על מורפולוגיה מתמטית. נביא כמו כן את ההגדרה של שלד מורפולוגי משופר (*modified morphological skeleton*) שאנו מציעים לקידוד יעיל יותר של תמונות. בסוף הפרק נסביר את הקשר שבין השלד המורפולוגי המשופר לבין ייצוגים מורפולוגיים אחרים.

3.1 שלד במרחב רציף

Blum [2, 3] הציג את ה"קו החציוני" ($ME, medial axis$) כדרך לייצוג קבוצות X במרחב אוקלידי R^N . השיטה הראשונה שהוא הציג לקבלת הקו החציוני היתה בדלקמן (*grassfires simulation*): בזמן $t=0$ מדליקים אש לאורך כל נקודות השפה של עצם נתון, ונותנים לאש להתפשט כחזיתות גלים לכיון מרכז הגוף ובמהירות קבועה (התפשטות על פי עקרון Huygens). נקודות בהן חזיתות הגלים נפגשות (ולכן האש נכבית) מגדירות את ה"קו החציוני" (ציור 3.1). מכאן שהמרחק המינימלי מנקודה על הקו החציוני לשפה מתקבל עבור שתי נקודות שפה לפחות (כאשר המרחק בין נקודה כלשהי לשפה מוגדר בצורה המקובלת במרחבים אוקלידיים). הקו החציוני, יחד עם זמן ההגעה, היחסי למרחק מהנקודה לשפה, מגדירים את פונקציית הקו החציוני (*medial axis function*). ניתן לשחזר את העצם בעזרת התפשטות הפוכה של גלי האש, כאשר הגל מתחיל מהנקודות בקו החציוני. עבור הגדרה מתמטית של הקו החציוני, ראה למשל [2, 41, 42, 57, 58].



ציור 3.1: הדמיה של התפשטות חזית האש כדרך לחישוב הקו החציתי [2]

Figure 3.1: Simulation of grassfires for medial axis computation (dotted line) [2]

ניתן כעת הגדרה מדויקת של שלד (*skeleton*), שהוא דומה מאוד לקו החציוני של Blum. נגביל את הטיפול לקבוצות X במרחב אוקלידי N -ממדי R^N שלא מכילות חצי-מישור, ז"א שה-Convex Hull של המשלים שלהן הינו המישור כולו: $CH(X^c) = R^N$ (תנאי זה חשוב לייצוג אחיד של גופים בעזרת שלד [7, 57, 58]). מכאן, ניתן להגדיר כדור מירבי ב- X , ושלד של X באופן הבא:

כדור N -ממדי (N-dimensional ball):

כדור N -ממדי $D(x, \rho)$, מתגדר ע"י:

$$(3.1) \quad D(x, \rho) = \{y \in R^N : d(x, y) \leq \rho\} \quad x \in R^N, \quad \rho \geq 0$$

באשר $d(a, b)$ הינו המרחק האוקלידי בין שתי נקודות a ו- b במרחב.

כדור מירבי (maximal ball):

כדור $D(\psi, \rho_\psi)$ הינו מירבי ב- $X \subset R^N$ אם ורק אם הוא מוכל בקבוצה (או עצם) X ולא מוכל באף כדור אחר המוכל גם הוא ב- X :

$$(3.2) \quad D(\psi, \rho_\psi) \text{ maximal} \leftrightarrow \begin{cases} D(\psi, \rho_\psi) \subset X \\ \nexists D(x, \rho_x) \subset X : D(\psi, \rho_\psi) \subset D(x, \rho_x) \end{cases}$$

קיום של כדורים מירביים מובטח על פי הלמה של Zorn, המבטיחה שכדור הגבול של סידרת כדורים ב- X , גם הוא מוכל ב- X [58, 57].

שלד (skeleton):

השלד $\Psi(X)$ של $X \subset R^N$ מתגדר כמשפחת המרכזים של כל הכדורים המירביים ב- X :

$$(3.3) \quad \Psi(X) = \{ \psi : \exists D(\psi, \rho_\psi) \text{ maximal in } X \}$$

אם $\psi \in \Psi(X)$, נסמן ב- $D(\psi, \rho_\psi)$ את הכדור המירבי המתאים לו ρ_ψ הינו המרחק האוקלידי בין ψ ל- ∂X .

ניתן לחלק את נקודות השלד למחלקות $S_\rho(X)$ על פי הרדיוס ρ של הכדור המירבי המתאים להן. ז"א $S_\rho(X)$ מכיל את כל נקודות השלד המתאימות לכדורים מירביים ברדיוס ρ . ברור שהמחלקות הן זרות, כי שני כדורים עם אותו מרכז ורדיוסים שונים אינם יכולים להיות שניהם מירביים, לכן:

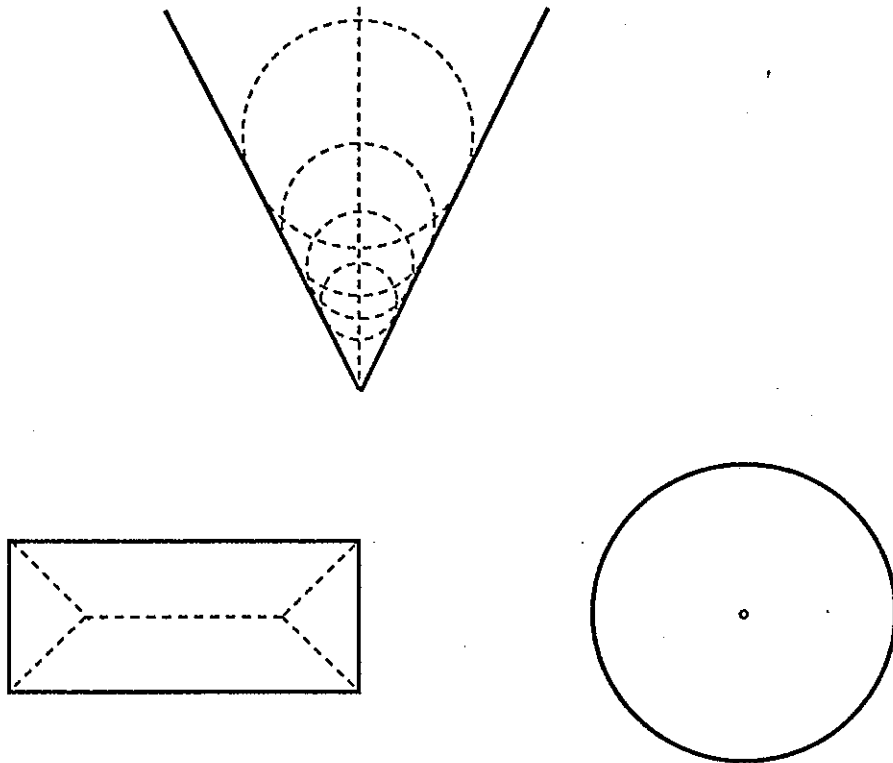
$$(3.4) \quad \Psi(X) = \bigcup_{\rho \geq 0} S_\rho(X)$$

ראה ציור 3.2 עבור דוגמאות של שלדים ב- R^2 .

מתוך השלד והכדורים המירביים, ניתן לשחזר את הקבוצה X [2, 7, 57, 58]:

$$(3.5) \quad X = \bigcup_{\psi \in \Psi(X)} D(\psi, \rho_\psi)$$

הקו החציוני והעלד דומים מאד אבל אינם זהים. בעצם $ME(X) \subseteq \Psi(X)$, והסגור שלהם שווים, ז"א $\overline{ME(X)} = \overline{\Psi(X)}$ [57, 58]. עבור תכונות טופולוגיות של העלד, ראה Matheron [58] ו-Calabi [7].



ציור 3.2: שלדים ב- R^2 (קו חתוק)

Figure 3.2: Skeletons in R^2 (dotted line)

3.2 חישוב שלד במרחב רציף בשיטות של מתמטיקה מורפולוגית

Lantuejoul [27-29, 57] הוכיח שניתן לחשב את העלד בעזרת פעולות בסיסיות של מורפולוגיה

מתמטית באופן הבא:

$$(3.6) \quad \Psi(X) = \bigcup_{\rho \geq 0} S_{\rho}(X) = \bigcup_{\rho \geq 0} [(X \ominus \rho U) - (X \ominus \rho U) \circ d\rho U]$$

כאשר ρU הינו כדור ברדיוס ρ ו- $d\rho U$ הינו כדור ברדיוס אנפיניטסימלי $d\rho$ (ב- R^N). ניתן לראות את השפות של הקבוצות $(X \ominus \rho U)$ כחזיתות הגלים של Blum בזמן $t = \rho$. ע"י הורדת הפתיחה של קבוצה זו עם איבר התצורה $d\rho U$, מקבלים את כל הנקודות שלא יתפשטו עוד, שהן נקודות בשלד [57]. מכיון ש- X הינו האיחוד של כל הכדורים המירביים, מתקבל [57]:

$$(3.7) \quad X = \bigcup_{\rho \geq 0} S_\rho(X) \oplus \rho U$$

מתוך הנוסחאות הנ"ל, ניתן לפתח ביטויים עבור השלד של $X \ominus \rho_0 U$:

$$(3.8) \quad S_\rho(X \ominus \rho_0 U) = S_{\rho+\rho_0}(X)$$

$$(3.9) \quad \Psi(X \ominus \rho_0 U) = \bigcup_{\rho > \rho_0} S_\rho(X)$$

$$(3.10) \quad X \ominus \rho_0 U = \bigcup_{\rho > \rho_0} S_\rho(X) \oplus (\rho - \rho_0)U$$

כלומר, נקודות השלד של $X \ominus \rho_0 U$ הינן תת-קבוצה של נקודות השלד של X , כאשר הרדיוס המתאים קטן ב- ρ_0 . באופן דומה:

$$(3.11) \quad S_\rho(X \oplus \rho_0 U) = S_{\rho-\rho_0}(X)$$

$$(3.12) \quad \Psi(X \oplus \rho_0 U) = \Psi(X)$$

$$(3.13) \quad X \oplus \rho_0 U = \bigcup_{\rho > 0} S_\rho(X) \oplus (\rho + \rho_0)U$$

ז"א, השלד של $X \oplus \rho_0 U$ הינו אותו שלד כמו של X אבל הרדיוסים המתאימים גדולים ב- ρ_0 .

ולבטוף:

$$(3.14) \quad S_\rho(X \circ \rho_0 U) = S_\rho(X) \quad , \quad \rho \geq \rho_0$$

$$(3.15) \quad \Psi(X \circ \rho_0 U) = \bigcup_{\rho \geq \rho_0} S_\rho(X)$$

$$(3.16) \quad X \circ \rho_0 U = \bigcup_{\rho \geq \rho_0} S_\rho(X) \oplus \rho U$$

כלומר, השלד של $X \circ \rho_0 U$ הינו תת-קבוצה של השלד של X , כאשר הרדיוסים המתאימים נשמרים.

3.3 שלד מורפולוגי בתמונות בינריות בדידות

ניתן להרחיב את ההגדרה של שלד למקרה של קבוצות בדידות [33, 57, 58]. אנו נציג כעת את השלד של קבוצות בינריות בדידות (*Skeleton of discrete binary sets*) כפי שהוצג ע"י Serra [57] ובו השתמשו Maragos ו-Schafer [33] לקידוד של תמונות בינריות בדידות. תהינה X ו- B קבוצות ב- Z^2 . אנו מניחים ש X חסומה ואינה ריקה. אזי, איבר תצורה מירבי ב- X והשלד של X מוגדרים כדלקמן:

איבר תצורה מירבי (maximal structuring element):

אם $\{nB = B \oplus B \oplus \dots \oplus B \text{ (n times)}\}$ אזי $(nB)_z$ (כאשר $(\cdot)_z$ מסמן הזזה - ראה נוסחא (2.5)) הינו איבר תצורה מירבי אם ורק אם הוא מוכל ב- X ולא קיים איבר אחר $(mB)_y$ כך ש-
 $(nB)_z \subseteq (mB)_y \subseteq X$.

$$(3.17) \quad (nB)_z \text{ maximal} \iff \begin{cases} (nB)_z \subseteq X \\ \nexists (mB)_y \subseteq X : (nB)_z \subseteq (mB)_y \end{cases}$$

שלד מורפולוגי (morphological skeleton):

השלד $SK^B(X)$ של תמונה בינרית בדידה $X \subset Z^2$ מתגדר כאוסף כל הנקודות z כך ש- $(nB)_z$ מירבי ב- X עבור n טבעי חיובי כלשהו.

$$(3.18) \quad SK^B(X) = \{z : \exists (nB)_z \text{ maximal in } X\}$$

כמו במקרה הרציף, השלד $SK^B(X)$ ניתן לחישוב בעזרת פעולות מורפולוגיות באופן הבא [33]:

$$(3.19) \quad SK^B(X) = \bigcup_{n=0}^{N(B)} S_n^B(X)$$

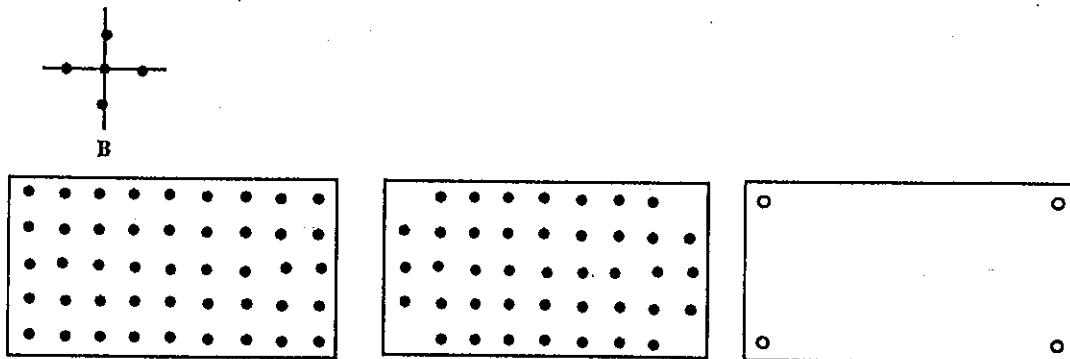
כאשר, אם B' הינו השיקוף של B (ראה נוסחא 2.6), אזי:

$$(3.20) \quad S_n^B(X) = (X \ominus nB') - (X \ominus nB') \circ B$$

$$n = 0, 1, \dots, N(B)$$

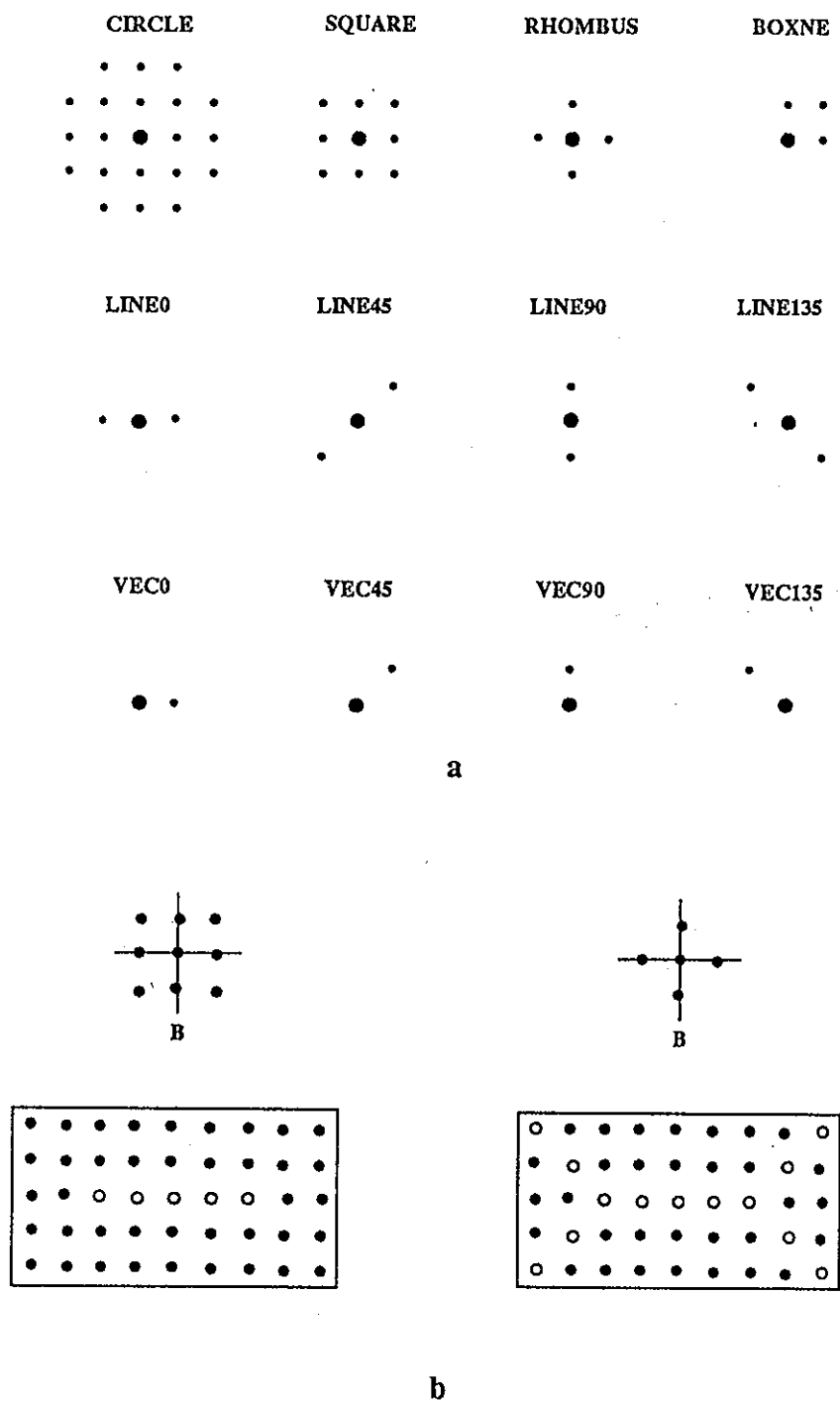
בציור 3.3 נתנת דוגמא למציאת תת-קבוצה של השלד. $S_n^B(X)$ מסמן את התת-קבוצה ה- n -ית של

השלד, ו- $N(B) = \max \{ n : X \ominus nB' \neq \emptyset \}$. הסימן העליון בשלד ובתת-קבוצות שלו, הינו כדי להצביע על איבר התצורה בעזרתו נעשה החישוב, כי איברי תצורה שונים יתנו שלדים שונים (ציור 3.4).



ציור 3.3: דוגמא של מציאת תת-קבוצה $S_0^B(X)$ בשלד המורפולוגי

Figure 3.3: Example of finding the skeleton subset $S_0^B(X)$



ציר 3.4: איברי תצורה שונים - (a), ודוגמאות של

שלדים עבור שניים מהם - (b).

Figure 3.4: Different structuring elements (a), and skeleton examples for two of them (b)

Schafer ו- Maragos [33] הוכיחו שאם איבר התצורה B הינו חסום וקונוקטי, אזי נקודה z שייכת

ל- $S_n^B(X)$ אם ורק אם $(nB)_z$ מידבי ב- X תכונות נוספות שהם הראו הן:

1. תת הקבוצות $S_n^B(X)$, $0 \leq n \leq N^B$, של השלד הן זרות זו לזו.
2. השלד המורפולוגי הינו אינדינטי להזזה, antiextensive, ו-idempotent.
3. ניתן לשחזר את X מתוך תת-הקבוצות של השלד $SK_n^B(X)$:

$$(3.21) \quad X = \bigcup_{n=0}^{N(B)} [S_n^B(X) \oplus nB]$$

ב-[33] ניתן למצוא שיטה מהירה לחישוב השלד המורפולוגי (עפ"י נוסחא 3.20) הצורכת $N(B)$ פעולות הרחבה ו- $N(B)$ פעולות כרסום בחישוב השלד $SK^B(X)$, ורק $N(B)$ פעולות כרסום בשחזור הקבוצה X (הסיבוכיות המקורית היתה רבועית ב- $N(B)$).

כמו במקרה הריצוף, ע"י שימוש רק בחלק מתת הקבוצות של השלד, ניתן לשחזר את הקבוצה X באופן חלקי [33]:

$$(3.22) \quad X \ominus kB' = \bigcup_{n=k}^{N(B)} [S_n^B(X) \oplus (n-k)B]$$

$$(3.23) \quad X \circ kB' = \bigcup_{n=k}^{N(B)} [S_n^B(X) \oplus nB]$$

$$(3.24) \quad [X \ominus kB'] \oplus mB = \bigcup_{n=k}^{N(B)} [S_n^B(X) \oplus (n-k+m)B]$$

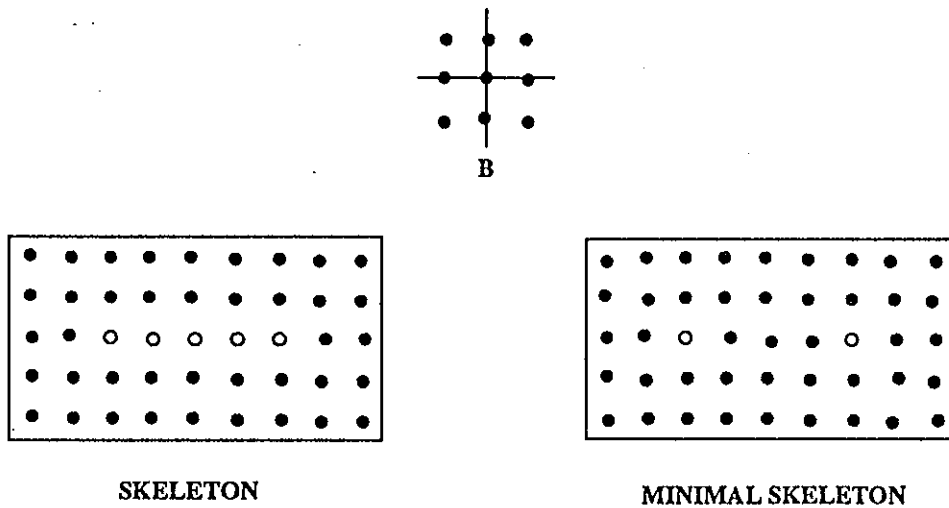
ז"א, ע"י השמטה של חלק מתת-הקבוצות של השלד, ניתן לקבל את X לאחר כרסום, פתיחה, או הרחבה.

3.3.1 חישוב שלד מינימלי

נקודה $z \in S_n^B(X)$ תורמת לשיחזור של X דרך הצורה $(nB)_z$ (ראה נוסחא (3.21)). אם כל

נקודה $x \in (nB)_z$ נמצאת גם כן בצורה מירבית אחרת כלשהי מהסוג $(mB)_y$ כאשר $y \in S_m^B(X)$ ו-1

[33] Schafer ו- Maragos. X מלא של $S_n^B(X)$ ועדיין לקבל שיחזור מלא של X $y \neq z$ אזי ניתן לסלק את z מ- $S_n^B(X)$ ועדיין לקבל שיחזור מלא של X (ציור 3.5) אבל סילוקה של נקודה אחת נוספת כבר תפגע בשיחזור המלא של X . הם הציעו שיטה לחישוב אותה קבוצה מינימלית, אבל השיטה אינה מבטיחה שמגיעים לשלד מינימלי בעל המספר הקטן ביותר האפשרי של נקודות שלד, אלא מחושבים שלד מינימלי כלשהו. אנו מציעים בהמשך שיטה יעילה יותר לחישוב שלד מינימלי המתבססת על השלכות ממשפט דגימה גאומטרית שנציג תוכיח בפרק הבא.



ציור 3.5: דוגמא של שלד מינימלי

Figure 3.5: Example of a Minimal Skeleton

ב- [33] חקרו את השימוש בשלד מינימלי (המחושב עם אברי תצורה שונים) לקידוד של תמונות בינריות. אנו מציעים שיטה לקידוד של תמונות בינריות (שהיו מישורי-סיבית של תמונה רבת-רמות) בעזרת ייצוג מורפולוגי אחר הנגזר מהשלד המורפולוגי (ראה סעיף 3.5), ובו מספר הנקודות מוקטן על בסיס ממשפט שנביא בפרק הבא.

3.4 יתרונות השלד המורפולוגי הבדיד

ב-[50] ניתן למצוא שיטה אחרת לחישוב השלד של תמונות בינריות בדידות. שיטה זו מתבססת על מציאת פונקציית מרחק של כל נקודות העצם לשפתו (מרחק המחושב על פי מטריקה מסוימת). נקודות מקסימום מקומי בפונקציית המרחק הנ"ל מגדירים את נקודות השלד. חלק מהאלגוריתמים לחישובו של השלד המבוססים על השיטה הנ"ל, צורכים אותו סדר גודל של פעולות כמו האלגוריתם המורפולוגי, ושאר האלגוריתמים (הצורכים רק שלושה מעברים על התמונה) הם סידרתיים ואינם מתאימים לאיברי תצורה כללים. ניתן לסכם את היתרונות בזישוב השלד בשיטה מורפולוגית [33], לעומת חישובו בשיטות אחרות, באופן הבא:

1. חישוב השלד המורפולוגי הינו פשוט ומזיז (עבור אלגוריתמים מקביליים), כי הוא צורך פעולות and/or בינריות, במקום פעולות max/min בפונקציית המרחק.
2. השלדים המחושבים בעזרת פונקציית מרחק מוגבלים לאיברי תצורה המגדירים מטריקה. לעומת זאת, החישוב המורפולוגי נותן חופש שלם בבחירת איבר התצורה (ללא שום שינוי באלגוריתם).
3. בשלדים המחושבים בעזרת פונקציית המרחק אין נקודות השלד מחולקים למחלקות על פי הרדיוסים שלהן (החלוקה אינה מתקבלת כתוצאה מהחישוב עצמו, אלא דורשת סריקה של השלד לאחר חישובו).
4. הגישה המורפולוגית הינה שונה מהגישות האחרות לחישוב שלדים בכך שהיא מתייחסת לתמונה כאל קבוצה (set) ומבססת את האלגוריתם על מתמטיקה מפותחת היטב.
5. הגדרת השלד המורפולוגי תופסת גם עבור תמונות רציפות וגם עבור תמונות בדידות (במרחבים אוקלידיים N-ממדיים).
6. הפעולות המורפולוגיות נתונות לפרוק (33, 67), וכך ניתן להקטין את כמות החישובים והגדרת לחישוב השלד (ראה נוסחאות (2.2) ו-(2.9) המתיחסות לפירוק של איבר התצורה).
7. שיחזוריים חלקיים (כגון הרחבות, פתיחות, כרסומים, וכו') מתקבלים ישירות מהשלד המורפולוגי תוך השמטה של חלק מתת-הקבוצות שלו.

8. שלדים מורפולוגים מינימליים מחושבים בפשטות (ראה פרק הקידוד).
9. ניתן להרחיב ולשפר את השלד המורפולוגי לשלד המחושב בעזרת איבר תצורה משתנה (ראה בסעיף הבא).
10. ניתן להגדיר גם כן שלד מורפולוגי עבור תמונות רבות-רמות ועבור אברי תצורה רבי-רמות [35, 36, 44] (ראה נספח ב'). ב-[35] Maragos ו-Ziff הגדירו את השלד עבור תמונות רבות-רמות ואיבר תצורה בינרי, והוכיחו שהוא הינו חילופי לסף; לכן ניתן לחשבו בעזרת מורפולוגיה בינרית (בעצם מחשבים את השלדים של תמונות בינריות המתקבלות מהפרוק של תמונת המקור). לא קיימות עבודות על שימוש ישיר של השלד של תמונות רבות-רמות למטרות קידוד (ראה פרק מסקנות).

3.5 שלד מורפולוגי משופר

אחת הבעיות בייצוג תמונות בינריות בדידות בעזרת שלד מורפולוגי הינה הבחירה של איבר התצורה הבסיסי B . זאת בעצם בעיה כללית במורפולוגיה מתמטית [54, 60, 61, 65]: איך לבחור את איבר התצורה המתאים ביותר עבור הבעיה הנתונה. במקרה של תמונות כלליות (כגון מישורי סיבית), אין סיבה מוצדקת להעדיף איבר בעל צורה (shape) מסוימת. ב-[33] חישבו שלדים מורפולוגים עם אברי תצורה שונים והביאו תוצאות סימולציה, אבל לא מצאו הסבר פורמלי להבדלים ביחסי דחיסה שהתקבלו עבור איברים שונים (גם לא לעדיפות לאיבר ה- $Boxne$ שבציור 3.4, ברוב המקרים).

אנו מציעים שלד מורפולוגי משופר (*modified morphological skeleton*), בו גודל איבר התצורה (ולא צורתו הבסיסית) משתנה תוך כדי ההתקדמות בשלבי החישוב של השלד (n , ראה נוסחא (3.20)). המוטיבציה לייצוג החדש נובעת מהעובדה, שכאשר מחשבים את השלד עם אברי תצורה גדולים יותר, מקבלים פחות תת-קבוצות של השלד. כלומר, $N(B)$ קטן יותר - ראה נוסחאות (3.19)-(3.21). הקטנת $N(B)$ הביאה להגדלה ביחס הדחיסה (ראה פרק 5). בשלד המורפולוגי המשופר של X , כל תת-קבוצה של השלד מחושבת עם איבר התצורה הגדול ביותר האפשרי; ז"א אם B הוא איבר

התצורה הבסיסי, נשתמש בכל שלב בחישוב השלד באיבר תצורה kB כך שאם $Y = X \circ kB$, אזי

תצורה גדול יותר בכל שלב של החישוב. אם היינו מתחילים באיבר תצורה mB גדול מדי, היינו מקבלים יותר מדי נקודות שלד עם רדיוס אפס (ז"א יותר מדי נקודות ב- $S_0^{mB}(X)$). זאת בניגוד לרצוי כיון שמעונינים שכל נקודת שלד תתרום מספר גדול ככל האפשר של נקודות בקבוצה X , ואילו נקודות ב- $S_0^{mB}(X)$ תורמות לנקודה בודדת כל אחת. לכן, נתחיל עם איבר התצורה הקטן ביותר (B) ונגדיל אותו בכל שלב בהתאם לדרישה שציינו.

מתוך נוסחא (3.23) אנו מקבלים (נגביל את הפיתוח לאיבר תצורה סימטרי, ז"א $B = B'$):

$$\begin{aligned}
 (3.25) \quad X &= \bigcup_{n=0}^{N(B)} [S_n^B(X) \oplus nB] = \\
 &= \bigcup_{n=1}^{N(B)} [S_n^B(X) \oplus nB] + S_0^B(X) = \\
 &= X \circ B + S_0^B(X)
 \end{aligned}$$

נפרק כעת את $X \circ B$:

$$\begin{aligned}
 (3.26) \quad X \circ B &= \bigcup_{n=1}^{N(B)} [S_n^B(X) \oplus nB] = \\
 &= \bigcup_{n=2}^{N(B)} [S_n^B(X) \oplus nB] + S_1^B(X) \oplus B = \\
 &= X \circ 2B + S_1^B \oplus B
 \end{aligned}$$

עד כה הופרדו $S_0^B(X)$ ו- $S_1^B(X)$, כאשר שתיהן מחושבות עם איבר התצורה הבסיסי B (הקטן ביותר האפשרי).

כעת ניתן לפרק את $X \circ 2B$ בצורה אחרת:

$$(3.27) \quad X \circ 2B = \bigcup_{n=1}^{N(2b)} [S_n^{2B}(X) \oplus n(2B)]$$

כאשר $S_n^{2B}(X)$ הן תת-קבוצות של הגלד של X שחושבו עם איבר התצורה $2B$ על פי הנוסחאות (3.19)-(3.21). שים לב שהאיחוד מתחיל מ- $n=1$ ולא מ- $n=0$, כי אנו מפרקים את $X \circ 2B$, לכן אין צורך באברים קטנים מ- $2B$ (ראה תכונות של פעולת הפתיחה בפרק 2 ובנספח א'), ומכאן ש- $S_0^{2B}(X) = \emptyset$. אם הינו משתמשים עבור הפרוק של $X \circ 2B$ באיבר תצורה mB , $m > 2$, אזי לא יכולנו להבטיח ש- $S_0^{mB}(X) = \emptyset$ (כפי שהסברנו אנו מעונינים במספר קטן ככל האפשר של נקודות עם רדיוס אפס), לכן השתמשנו באיבר תצורה הגדול ביותר שיכולנו להשתמש בשלב זה.

באופן דומה, אנו יכולים להמשיך ולפרק את $X \circ 2B$ לגורמים בעלי אופי שונה:

$$\begin{aligned}
 X \circ 2B &= \bigcup_{n=1}^{N(2B)} [S_n^{2B}(X) \oplus n(2B)] = \\
 (3.28) \quad &= \bigcup_{n=2}^{N(2B)} [S_n^{2B}(X) \oplus n(2B)] + S_1^{2B}(X) \oplus 2B = \\
 &= X \circ 4B + S_1^{2B}(X) \oplus 2B
 \end{aligned}$$

לכן, אנו יכולים לכתוב את (3.25) מחדש:

$$(3.29) \quad X = X \circ 4B + S_1^{2B}(X) \oplus 2B + S_1^B(X) \oplus B + S_0^B(X)$$

את $X \circ 4B$ ניתן לפרק באותו אופן, אבל נעת אנו יכולים להשתמש ב- $4B$ כאיבר תצורה ולקבל:

$$\begin{aligned}
 (3.30) \quad X \circ 4B &= \bigcup_{n=2}^{N(4B)} [S_n^{4B}(X) \oplus n(4B)] + S_1^{4B}(X) \oplus 4B \\
 &= X \circ 8B + S_1^{4B} \oplus 4B
 \end{aligned}$$

ניתן להמשיך ולפרק את $X \circ 8B$, הפעם עם איבר $8B$. כך ממשיכים ומשתמשים בכל שלב באיבר תצורה גדול פי נעיים מההאיבר בשלב הקודם. התהליך נמשך עד שמיגענים לאיבר תצורה $2^{K+1}B$ כך ש-

$$X \ominus 2^{K+1}B = \emptyset$$

מקבלים כך את השלד המורפולוגי המשופר (*MMS, modified morphological skeleton*):

$$(3.31) \quad MS(X) = \bigcup_{n=0}^{N_M(B)} M_n(X)$$

כאשר

$$(3.32.a) \quad M_0(X) = X - X \circ B = S_0^B(X)$$

$$(3.32.b) \quad M_n(X) = (X \ominus B(n)) - (X \ominus B(n)) \circ B(n) = S_1^{B(n)}$$

$$n = 1, 2, \dots, N_M(B)$$

$$(3.32.c) \quad B(n) \triangleq 2^{n-1}B, \quad n = 1, \dots, N_M(B)$$

מספר תת-הקבוצות $N_M(B)$ נתון ע"י $N_M(B) = \max \{n : X \ominus 2^{n-1}B \neq \emptyset\}$. תת-הקבוצה של השלד $M_n(X)$ מכילה את כל הנקודות $x \in X$ (ורק אותן נקודות) כך שהאיבר $(2^{n-1}B)_x$ הינו מירבי ב- X (נוסחאות (3.20) ו-(3.32)). לכן, השלד המשופר הינו אוסף המרכזים של איברים מירביים בעלי צורה B ורדיוסים $\{0, 1, 2, 4, 8, \dots\}$, במקום רדיוסים $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ בשלד הרגיל. מכאן שעקב השימוש באיבר תצורה ההולך וגדל, ב-*MMS* יש פחות תת-קבוצות מאשר בשלד המורפולוגי הרגיל (אבל סיבוכיות החישובית באלגוריתם נשמרת). קל לראות ש-

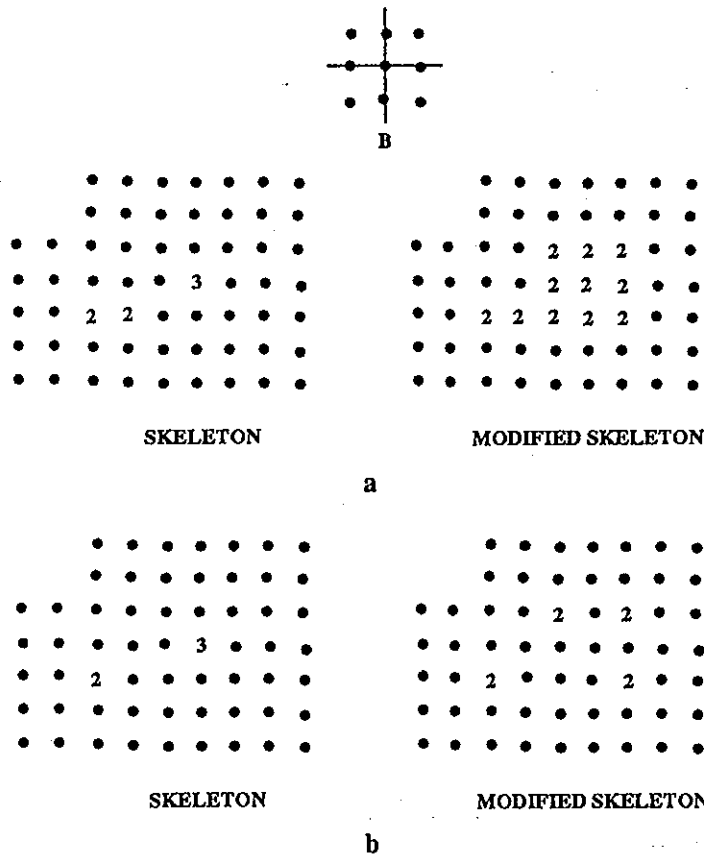
$$N_M(B) = \lceil \log_2 N(B) \rceil < N(B)$$

ניתן לשחזר את הקבוצה $X \circ B(k)$ מהשלד המורפולוגי המשופר באופן הבא:

$$(3.33) \quad X \circ B(k) = \sum_{n=k}^{N_M(B)} [M_n(X) \oplus B(n)]$$

$$k = 0, 1, \dots, N_M(B)$$

כאשר עבור $k = 0$ והגדרה $B(0) \triangleq \{(0,0)\}$ מתקבל השיחזור המלא של X . זאת אומרת שבדומה לשלד המורפולוגי הרגיל, ניתן לקבל גירסאות פתוחות $X \circ 2^m B$ של X אם משמטים תת-קבוצות של השלד בנוסחאת השיחזור (3.33). בציור 3.6a מופיעה דוגמא של שלד מורפולוגי משופר ושל שלד מורפולוגי מקורי. בציור 3.6b ניתן לראות את השלדים המינימליים המתאימים. שים לב שבשלד המורפולוגי המשופר, מופיעות יותר נקודות שלד אבל פחות תת-קבוצות מאשר בשלד המורפולוגי המקורי. ההפרש במספר הנקודות קטן כאשר מתייחסים לשלדים מינימליים (ראה סעיף הבא).



ציור 3.6: שלד מורפולוגי משופר. בנקודות השלד מופיע מספר המסמן את התת-קבוצה של השלד לה שייכת הנקודה. (a) שלדים, (b) שלדים מינימליים

Figure 3.6: Modified morphological skeleton. At skeleton points, the number stands for the corresponding skeleton subset

(a) Skeletons , (b) Minimal skeletons

3.5.1 יתרון השלד המורפולוגי המשופר למטרות קידוד

בסעיף זה נראה שכל $M_n(X)$ המורחב באיבר המתאים תורם לקבוצה X את אותן הנקודות כמו מספר תת-קבוצות $S_i^B(X)$ של השלד הרגיל. תכונה זו הינה חשובה למטרות קידוד. מתוך הנוסחאות (3.25)-(3.28) ניתן לראות ש:

$$(3.34) \quad X = X \circ 4B + S_3^B(X) \oplus 3B + S_2^B(X) \oplus 2B + S_1^B(X) \oplus B + S_0(X) = \\ = X \circ 4B + S_1^{2B}(X) \oplus 2B + S_1^B(X)X \oplus B + S_0^B(X)$$

לכן

$$(3.35) \quad M_2(X) \oplus 2B = S_1^{2B}(X) \oplus 2B = S_2^B(X) \oplus 2B + S_3^B(X) \oplus 3B$$

באותו אופן למשל:

$$(3.36) \quad M_3(X) \oplus 4B = S_1^{4B}(X) \oplus 4B = \\ = S_4(X) \oplus 4B + S_5(X) \oplus 5B + S_6(X) \oplus 6B + S_7(X) \oplus 7B$$

אנו רואים, שאותו חלק מ- X הנתרם ע"י תת-הקבוצה בודדת $M_{n+1}(X)$ בשלד המשופר, נתרם בשלד הרגיל ע"י משפחה של תתי-הקבוצות $S_j^B(X)$, $2^n \leq j \leq 2^{n+1}-1$, המכילות איברי תצורה גדולים יותר (ראה ציור 3.6). לכן, מצד אחד חוסכים במספר התת-קבוצות בשלד (נראה את היתרון הגדול בכך בפרק המתאר את אלגוריתם הקידוד), ומצד שני יתכן ומגדילים את מספר נקודות השלד כי יש לכסות את אותו השטח עם אברי תצורה קטנים יותר (ראה משוואות (3.35) ו-(3.36)).

בעזרת סימולציות, בדקנו את מספר הנקודות בשלד המשופר כנגד מספר הנקודות בשלד הרגיל. חישובנו שלד רגיל מינימלי של מספר רב של תמונות בינריות בדידות (ביניהן מספר רב של מישורי סיבית של תמונות רבות-רמות) כפי שמופיע ב-[33], כאשר הפחתת היתרות מבוססת על טילוקה של נקודות שלד $z \in S_n^B(X)$ אם ורק אם כל הנקודות ב- $(nB)_z$ מופיעות גם באיברי תצורה מרביים מהצורה $(mB)_y$

כאשר $y \in S_m^B(X)$ $y-1 \neq z$ (כל עוד הנקודה y עדין לא טולקה). חיישנו גם שלד משופר מינימלי של אותן תמונות (הגדרת המינימליות עבור השלד המשופר הינה זהה לזאת של השלד הרגיל, ראה ציור 3.6b). המטרה הינה להשוות את מספר הנקודות בכל תת-קבוצה בשלד המשופר כנגד מספר הנקודות הכולל במשפחת תתי-הקבוצות המתאימות בשלד הרגיל, כלומר את מספר הנקודות ב- $M_{n+1}(X)$ כנגד מספר הנקודות ב- $S_j^B(X)$, $2^n \leq j \leq 2^{n+1}-1$.

בטבלה הבאה (3.1) אנו מסכמים את התוצאות. "מספר שלב" מסמן את מספר השלב בחישוב ה- MMS ("ז"א, n , ראה נוסחא (3.32)). "שלד משופר" מסמן את מספר התת-קבוצות בשלד המשופר (עבור אותו שלב), ו"שלד רגיל" מסמן את מספר התת-קבוצות המתאימות בשלד הרגיל ("ז"א, את מספר התת-קבוצות המכסות את אותו השטח, ראה משואות (3.35) ו-(3.36)). "הפחתה במספר תת-קבוצות" מסמן את ההפחתה במספר התת-קבוצות בשימוש בשלד המורפולוגי המשופר (באחוזים). "גדול במספר נקודות שלד" מסמן את הגדול (באחוזים) במספר נקודות בשלד המורפולוגי המשופר (בהשוואה לשימוש בשלד המורפולוגי הרגיל):

שלד משופר כנגד שלד רגיל				
מספר שלב (n)	שלד משופר	שלד רגיל	הפחתה במספר תת-קבוצות	גדול במספר נקודות שלד
1	1	2	50 %	13 %
2	1	4	75 %	19 %
3	1	8	87.5 %	02 %

טבלה 3.1: השוואה בין השלד הרגיל והשלד המורפולוגי המשופר:

הפחתה במספר התת-קבוצות בשלד המשופר לעומת הגדלה במספר נקודות שלד

Table 3.1: Differences between the skeleton and the MMS :

less skeleton subsets but more skeleton points are obtained

אנו רואים שכנגד החיסכון הגדול במספר התת-קבוצות בשלד המורפולוגי המשופר, ההפסד במספר נקודות שלד הינו זניח לחלוטין. בפרק הקידוד, נביא תוצאות שיצדיקו עוד יותר את השימוש בשלד המורפולוגי המשופר במקום השלד הרגיל למטרות קידוד.

3.5.2 קשר בין השלד המורפולוגי המשופר וייצוגים מורפולוגיים אחרים

Schonfeld-1 Goutsias [55, 16] הציגו מסגרת תיאורטית עבור משפחה של ייצוגים מורפולוגיים

של תמונות בינריות בדידות כדלקמן: יהיו X (תמונה מקורית), $A(n)$, $B(n)$ קבוצות ב- Z^2 כך ש:

$$(3.37.a) \quad A(0) = \{(0,0)\}$$

$$(3.37.b) \quad A(n+1) = A(n) \oplus B(n), \quad n = 0, 1, \dots, N$$

$$(3.37.c) \quad N = \max \{n : X \ominus A(n) \neq \emptyset\}$$

ו- $\{B(n), n = 0, 1, \dots, N-1\}$ סדרה של איברי תצורה המכילים את הראשית. מגדירים בנוסף סדרה של התמרות $\{\chi[\cdot], n = 0, 1, \dots, N\}$ המקיימות:

$$(3.38) \quad X \ominus A(n+1) \subseteq \chi[X \ominus A(n+1)] \subseteq X \ominus A(n)$$

ואת תת-קבוצות

$$(3.39) \quad R_n(X) = X \ominus A(n) - \chi[X \ominus A(n+1)], \quad n = 0, 1, \dots$$

מטרת התנאי (3.38) הינה לקבל סדרה $R_n(X)$ של תת-קבוצות זרות. נגדיר את הייצוג המורפולוגי $R(X)$ של התמונה X כ:

$$(3.40) \quad R(X) = \bigcup_{n=0}^N R_n(X)$$

ב-[16] הוכיחו שאם סדרת ההתמרות $\chi[\cdot]$ מקיימת את התנאי (3.38), אזי:

$$(3.41) \quad X = \bigcup_{n=0}^N [R_n(X) \oplus A(n)]$$

חלק מהתכונות של הייצוג המורפולוגי הנ"ל הן [16]:

1. אם $\chi[\cdot]$ אינורניטית להזזה, אזי $R(X)$ גם כן אינורניטית להזזה.
2. אם $\chi[\cdot]$ אינורניטית לשינוי גודל, אזי $R(X)$ גם כן אינורניטית לשינוי גודל.
3. $R_n(X) \cap R_m(X) = \emptyset$ לכל $n \neq m$.
4. $R(X) \subseteq X$.
5. אם $B(n) \subseteq B(0)$ אזי $\chi_n[X \oplus A(n+1)] \supseteq [X \oplus A(n+1)] \oplus B(0)$ ו- $R[R(X)] = R(X)$ (indempotence).
6. $X \circ A(k) = \bigcup_{n=k}^N [R_n(X) \oplus A(n)]$

אנו יכולים להתאים את השלד המורפולוגי המשופר שהצגנו בסעיף הקודם למשפחת הייצוגים הזאת באופן הבא: יהיה D איבר התצורה הבסיסי לחישוב השלד המורפולוגי המשופר (המכיל את הראשית), אזי נגדיר את הסידרה $B(n)$:

$$(3.42.a) \quad B(0) \triangleq D$$

$$(3.42.b) \quad B(n) \triangleq 2^{n-1}D, \quad n = 1, 2, \dots$$

ומתוך (3.37) מתקבל

$$(3.43.a) \quad A(0) = \{(0,0)\}$$

$$(3.43.b) \quad A(n+1) = A(n) \oplus B(n) = 2^n D \quad n+1 \geq 1$$

כדי להשלים את הייצוג המורפולוגי, עלינו להגדיר את סדרת ההתמרות $\chi_n[\cdot]$:

$$(3.44) \quad Y \subset Z^2, \quad \chi_n[Y] = Y \oplus B(n)$$

ניתן לראות בקלות שעבור מקרה זה של $B(n)$ ו- $\chi[\cdot]$, התת-קבוצות $R_n(X)$ הינן בדיוק תת-הקבוצות

$M_n(X)$ של השלד המורפולוגי המשופר ($R(X) = MS(X)$), לכן כל התכונות שמתקיימות עבור הייצוג המורפולוגי הכללי [16] מתקיימות גם כן עבור השלד המורפולוגי המשופר. מענין לשים לב שלמרות שלא מתקיים ש- $B(n) \subseteq B(0)$ (ראה תכונה 5 בעמוד הקודם), בכל זאת $MMS[MMS(X)] = MMS(X)$. אם בחזרים B קבוע (ז"א, $B(n) = D$ לכל n), ואותה סדרת התמרות $\chi_n[\cdot]$ כמו קודם (נוסחא (3.44)), מקבלים את הייצוג המורפולוגי הרגיל שהוצג ב-[33].

ב-[16] הוכיחו גם כן שעבור כל הייצוגים המורפולוגים $R(X)$ המחושבים עם סדרת איברי תצורה $B(n)$ המקיימת:

$$(3.45.a) \quad B(n) \text{ convex and bounded}$$

$$(3.45.b) \quad B(n) \oplus B(n+1) \oplus \dots \oplus B(m) \text{ convex and bounded}$$

הייצוג $R(X)$ היחיד שהוא גם שלד הינו זה המחושב עם משפחת ההתמרות $\chi[\cdot]$ כפי שהגדרנו במשוואה (3.44) ($R(X)$ הינו שלד מורפולוגי אם ורק אם הוא מכיל את כל הנקודות z , ורק אותן, כך ש- $[A(n)]_z$ הוא איבר מירבי ב- X). לכן, מתוך המשפחה האינסופית של ייצוגים מורפולוגיים המוגדרים ע"י (3.37) - (3.40), מתקבל שרק ייצוגים עם אותה משפחת התמרות כמו זו של השלד המורפולוגי המשופר, הם בעלי תכונות של שלד (ז"א אוסף של איברי תצורה מירביים). ראה פרק הסיכום (פרק 7) עבור הצעה להמשך המחקר שקשורה לתכונה זו.

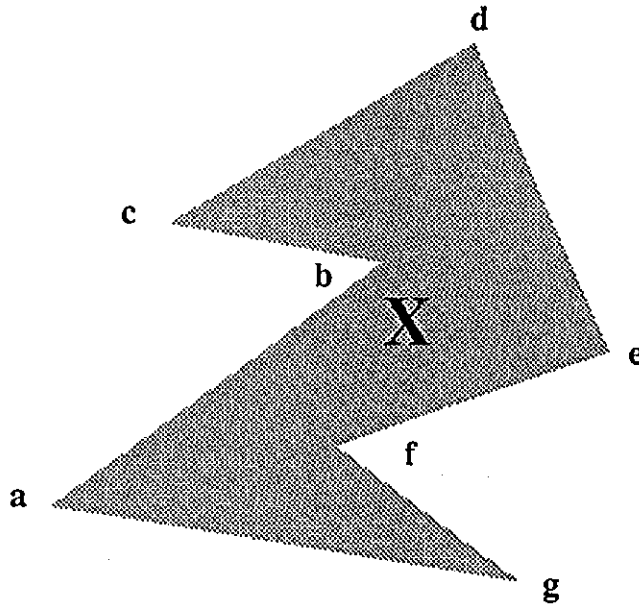
פרק 4: משפט הדגימה הגאומטרית ופלוג אורך השלד

בפרק הקודם הצגנו את השלד של קבוצות רציפות וקבוצות בדידות וראינו את האפשרות לייצג קבוצות אלו באמצעותן. בפרק זה נביא מספר תוצאות מקוריות הקשורות לתכונת הייצוג של השלד. בחלק הראשון של הפרק נדון ביתרות (redundancy) שבשלד של קבוצות רציפות ונוכיח שקיימת תת-קבוצה יחידה שלו המספיקה לשיחזור כמעט מלא של הקבוצה. השלכות למקרה הבדיד יוצגו גם כן. בחלק השני של הפרק נגדיר את פונקציית פלוג אורך השלד ונדון בקשר שבין תת-קבוצות של השלד וכמות המידע שהם נושאות. קשר זה הינו חשוב לשמושים של דחיטה עם עוות. הקשרים עם עבודות אחרות אלגברי יוצגו בסוף הפרק.

4.1 משפט הדגימה הגאומטרית

4.1.1 הצגת הבעיה

אם X הינה קבוצה סגורה ב- R^2 , אזי העקמומיות (curvature) $\kappa(p)$ בנקודה p בשפה ∂X של הקבוצה X מוגדרת ע"י ההופכי של הרדיוס של המעגל הגדול ביותר המשיק ל- ∂X בנקודה p [8]. בפרק זה, X מסמנת קבוצה ב- R^2 המקיימת $CH(X^c) = R^2$ (ראה סעיף 3.1) וכן שהעקמומיות של השפה שלה $\kappa(\partial X)$ מוגדרת היטב בכל מקום, פרט אולי למספר סופי של נקודות, בהן יתכן שקיימים משיקים צדדיים בלבד (ראה נקודות מסומנות בציור 4.1). נסמן את קבוצת הנקודות האלו ב- $\Gamma(X)$, $\Gamma(X) \subset \partial X$. תת הקבוצה של נקודות ב- $\Gamma(X)$ עבורם הזוית הפנימית הינה קעורה (concave) מסומנת ב- $\xi(X)$ (ראה למשל נקודות b ו- f בציור 4.1). נגדיר כמו כן $Y_p \triangleq X \circ pU$, כאשר U הינו מעגל היחידה ב- R^2 .



ציור 4.1: נקודות עם עקמומיות שאינה מוגדרת היטב:

Fig 4.1: Points with not well defined curvature:

$$\Gamma(X) = \{a, b, \dots, g\}, \quad \xi(X) = \{b, f\}$$

כפי שראינו בפרק הקודם (ראה משוואה 3.5), אם $\Psi(X)$ הינו השלד של X , אזי:

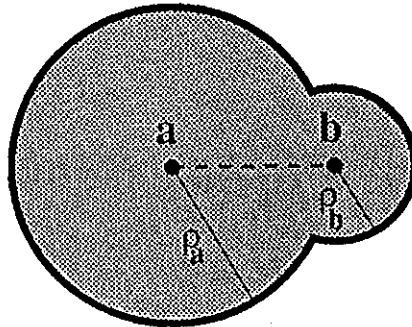
$$(4.1) \quad X = \bigcup_{\psi \in \Psi(X)} D(\psi, \rho_\psi)$$

באשר $D(\psi, \rho_\psi)$ הינו המעגל המירבי המתאים ל- ψ .

לא בהכרח צריכים את כל הנקודות בשלד $\Psi(X)$ לשיחזור מלא של X . אנו מעונינים בקבוצת נקודות $\Psi_m(X) \subseteq \Psi(X)$, המבטיחה שיחזור מדויק של X , וכן ש- X לא ניתנת לשיחזור מאף תת-קבוצה שלה. הקבוצה $\Psi_m(X)$ נקראת שלד מינימלי (*minimal skeleton*). קבוצה כזאת קיימת כי במקרה הגרוע ביותר $\Psi_m(X) = \Psi(X)$. באותו אופן, אנו מעונינים בקבוצה המינימלית לשיחזור של

∂X

להדגמה, ציור 2 מדאה קבוצה X ב- R^2 והשלד שלה. במקרה זה, רק שתי הנקודות המסומנות $\{a, b\}$, יחד עם הרדיוסים המתאימים להן $\{\rho_a, \rho_b\}$, הינן מספיקות לשיחזור של X .



ציור 4.2: דוגמא של שלד ושלד מינימלי

Fig. 4.2: Example of skeleton (dashed line) and minimal

skeleton (points a, b): $\Psi_m(X) = \{a, b\}$

לפני הצגת המשפטים, נגדיר את ההגדרות הבאות:

4.1.2 הגדרות נוספות

נקודה סינגולרית (SP - singular point):

נקודת שלד $s \in \Psi(X)$, הינה נקודה סינגולרית אם ורק אם קיימת נקודה p ב- X כן שהמעגל המירבי $D(s, \rho_s)$ הינו היחיד המכיל אותה.

$$(4.2) \quad s \in \Psi(X) \text{ SP} \leftrightarrow \begin{cases} \exists p \in X, p \in D(s, \rho_s): \\ \text{for all } \psi \in \Psi(X), \psi \neq s, p \text{ not in } D(\psi, \rho_\psi) \end{cases}$$

במיוחד, כל נקודה $s \in \Gamma(X) \setminus \xi(X)$ הינה סינגולרית עם מעגל מירבי $D(s, \rho_s)$, כאשר $\rho_s = 0$ (ראה למשל נקודות a ו- d בציור 4.1).

נסמן ב- $S(X)$ את קבוצת הנקודות הסינגולריות:

$$(4.3) \quad S(X) = \{s : s \text{ singular point}\}$$

ונגדיר את השיחזור המינימלי (*minimal reconstruction*) שנסמנו ע"י X^* כ:

$$(4.4) \quad X^* = \bigcup_{s \in S(X)} D(s, \rho_s)$$

$$X^* \subseteq X$$

נקודה שפה סינגולרית (BSP - boundary singular point):

נקודת שלד $s \in \Psi(X)$, הינה נקודת שפה סינגולרית אם ורק אם קיימת נקודה p ב- ∂X כן שהמעגל המרבי $D(s, \rho_s)$ הינו היחיד המכיל אותה.

$$(4.5) \quad s \in \Psi(X) \text{ BSP} \leftrightarrow \begin{cases} \exists p \in \partial X, p \in D(s, \rho_s); \\ \text{for all } \psi \in \Psi(X), \psi \neq s, p \text{ not in } D(\psi, \rho_\psi) \end{cases}$$

במקרה של הקבוצה בציר 4.2, שתי הנקודות המסומנות a ו- b הינן סינגולריות ו- $\Psi_m(X) = S(X)$. חשיבות הנקודות הסינגולריות ברורה מהדוגמה הנ"ל ומהמשפטים המופיעים בסעיף הבא.

4.1.3 משפטים על ייצוגים יחידים בעזרת השלד

ההוכחות המתאימות למשפטים הבאים נמצאים בנספח ג'.

למה 4.1:

$\Psi_m(X)$ מכיל את כל הנקודות הסינגולריות.

משפט 4.1:

נקודה $x \in X$ הינה נקודה שפה סינגולרית אם ורק אם היא נקודה סינגולרית.

משפט זה אומר שנקודה סינגולרית של השלד תורמת ל- X אם ורק אם היא תורמת ל- ∂X . מכאן, כאשר בודקים את הסינגולריות של נקודה מסוימת $\psi \in \Psi(X)$, צריכים לבדוק רק את נקודות המגע של המעגל המירבי המתאים לה עם שפת הקבוצה ("א נקודות ב- $\partial X \cap (D(\psi, \rho, \psi))$).

משפט 4.2 - משפט הדגימה הגאומטרית (GST - Geometric Sampling Theorem):

- (a) X^* מכסה את כל השפה ∂X של X , פרט אולי למספר סופי של נקודות.
- (b) תת הקבוצה של $S(X)$ המכילה נקודות סינגולריות עם רדיוסים מתאימים גדולים מ- ρ , הינה מספיקה לשיחזור של השפה של Y_ρ , פרט אולי למספר סופי של נקודות (אותן נקודות כמו בחלק הראשון של המשפט).

משני המשפטים הנ"ל אנו רואים את חשיבותה של הקבוצה $S(X)$ (שהיא יחידה) עבור השיחזור של X , כי כל נקודה סינגולרית תורמת ל- ∂X וכמעט כל ∂X מכוסה ע"י המעגלים המירביים של $S(X)$. מהחלק השני של משפט 4.2, נובעת המוטבציה לקרוא לפעולה $X \circ \rho U$ "מסנן מעביר נמוכים גאומטרי" (*geometric low pass filter*), באנלוגיה למסנן של עבוד אותות קלסי. כאן, רוחב סרט (band-width) מתחלף עם ההופכי של הרדיוס של המעגל המירבי (ראה בהמשך).

במקרה של קבוצות בדידות (קבוצות ב- Z^2), ניתן להגדיר נקודות סינגולריות בצורה דומה. תוצאות סימולציה מראות שגירסה בדידה של המשפט 4.1 עשויה להיות נכונה (ראה חשיבות בסעיף 5.3). בקשר למשפט 4.2, משפט גאומטרי דואלי עבור קבוצות בדידות לא קיים. למרות זאת, כפי שנסביר בפרק הבא, לקבוצת הנקודות הסינגולריות בעלדים בדידים יש גם כן חשיבות רבה בייצוג של קבוצות בדידות.

4.2 פלוג אורך השלד וספקטרום הצורה

עניננו בבשלד נובע מתכונת הייצוג שלו. בסעיף זה נציג את פונקציית פלוג אורך השלד (*skeleton length distribution*), גם למקרה הרציף וגם למקרה הבדיד. פונקציה זאת, יחד עם

ספקטרום הצורה (*pattern spectrum*) [38, 40, 57], תתן לנו מידע כמה אנו "משלמים" בקידוד של חלקים שונים מהקבוצה.

4.2.1 ספקטרום הצורה

Serra [57] הציג את ספקטרום הצורה (*pattern spectrum*) כדרך לאפיון גאומטרי של קבוצות בינריות. אנו נביא כעת את ההגדרה, עבור קבוצות רציפות וקבוצות בדידות.

ספקטרום צורה רציף:

ספקטרום צורה רציף (*continuous pattern spectrum*) של קבוצה קומפקטית X ב- R^2 ביחס לאיבר תצורה B ב- R^2 מוגדר [38, 40, 57] כ:

$$(4.6) \quad PS_X(r, B) = - \frac{dA(X \circ rB)}{dr}, \quad r \geq 0$$

כאשר $A(\cdot)$ מסמן שטח (או מידת Lebesgue). ע"י השימוש בפעולת הסגירה, ניתן להרחיב את ההגדרה עבור "גדלים שלילים":

$$(4.7) \quad PS_X(-r, B) = \frac{dA(X \otimes rB)}{dr}, \quad r > 0$$

קמירות הקבוצה B מבטיחה שספקטרום הצורה אינו שלילי לכל $r \in R$ כי $X \circ sB \subseteq X \circ rB$ לכל $r < s$ (ראה תכונות של פעולת הפתיחה הבינרית בפרק 2 ובנספח א').

ניתן להראות [38] ש:

$$(4.8) \quad X \text{ compact} \leftrightarrow \exists \rho \text{ s.t. } \begin{cases} X \circ rB = \emptyset & r > \rho \\ X \circ (\rho - \delta r)B \neq \emptyset \end{cases}$$

מכאן שהספקטרום צורה מכיל לפחות פונקציית Dirac אחת (ב- $r = \rho$) [38].

דוגמא 1:

יהיה X מעגל ברדיוס a אם חוור ברדיוס b (מרכזים משותפים). אם U הינו מעגל היחידה ו- $\delta(r)$ הינה פונקציית Dirac, אזי:

$$(4.9) \quad PS_X(r, U) = \pi b^2 \delta(r+b) + \pi a(a+2b) \delta\left(r - \frac{a}{2}\right)$$

ראה ציור 4.3

דוגמא 2:

יהיה Y מלבן בעל צלעות a ו- b , $a \leq b$. אזי:

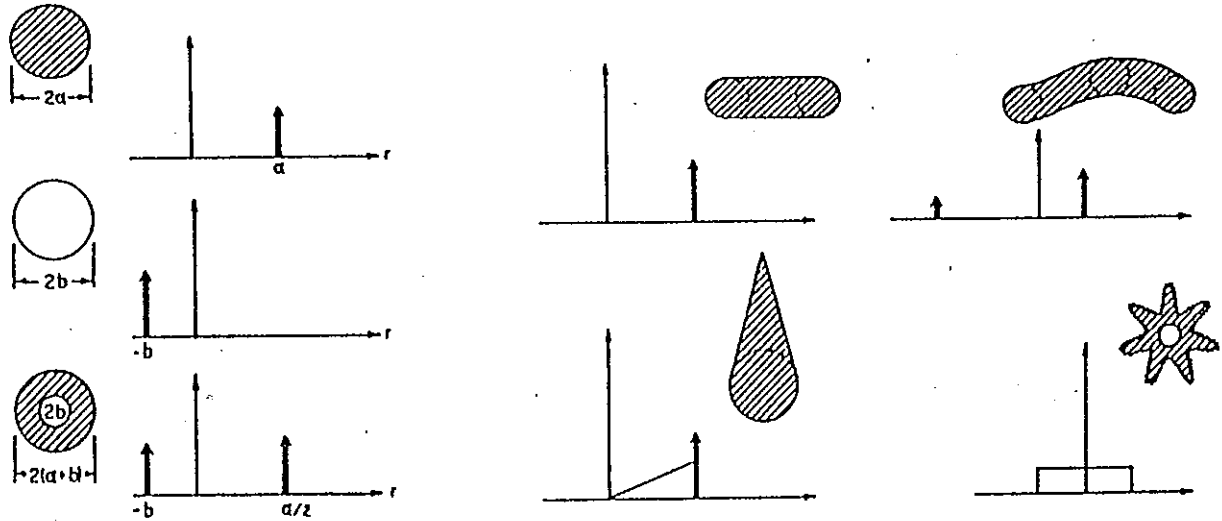
$$(4.10) \quad PS_Y(r, U) = 2r(4-\pi) \left[u(r) - u\left(r - \frac{a}{2}\right) \right] + \left[ab - a^2 + \frac{\pi}{4} a^2 \right] \delta\left(r - \frac{a}{2}\right)$$

כאשר $u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(s) ds$ הינה פונקציית מדרגה.

אם S הינו רבוע (במקום המעגל U), בעל צלע באורך יחידה:

$$(4.11) \quad PS_Y(r, S) = ab \delta(r-a)$$

בציור 4.3 ניתן לראות דוגמאות שונות של ספקטרום צורה רציף.



ציור 4.3: דוגמאות של ספקטרום צורה רציף (מ-[38]). בכל ציור רואים את הצורה (באפור), ולצידה את הגרף של ספקטרום הצורה המתאים לה.

Fig. 4.3: Examples of continuous patterns spectrums (from [38]). Each picture shows the figure (in gray) beside its correspondent pattern spectrum

ספקטרום צורה בדיד:

ספקטרום צורה בדיד (*discrete pattern spectrum*) של קבוצה בדידה X ב- Z^2 ביחס לאיבר תצורה B ב- Z^2 מוגדר [38, 57] כ:

$$(4.12) \quad PS_X(n, B) = \text{Card}[X \circ nB - X \circ (n+1)B] \quad , \quad n \geq 0$$

$$(4.13) \quad PS_X(-n, B) = \text{Card}[X \otimes nB - X \otimes (n+1)B] \quad , \quad n \geq 1$$

כאשר $Card[\cdot]$ הינה הקרדנליות (cardinality) של הקבוצה.

ניתן להראות [38] ש:

$$(4.14) \quad X = X \circ kB \iff PS_X(n, B) = 0 \text{ for all } 0 \leq n \leq k$$

4.2.2 פלוג אורך השלד הרציף

אנו מגדירים כעת את פילוג אורך השלד עבור קבוצות רציפות.

פלוג אורך השלד הרציף:

פילוג אורך השלד הרציף (*continuous skeleton length distribution*) של קבוצה X ב- R^2 מוגדר כ:

$$(4.15) \quad \Lambda_X(r) \triangleq - \frac{dL[\Psi(Y_r)]}{dr}, \quad r \geq 0$$

כאשר $L[\cdot]$ מסמן אורך.

דוגמא:

יהיה Y מלבן עם צלעות a ו- b , $a \leq b$, אזי:

$$(4.16) \quad \Lambda_Y(r) = 4\sqrt{2}[u(r) - u(r - \frac{a}{2})]$$

אנו יודעים, על סמך תכונות השלד המופיעות בסעיף 3.2 (משוואות (3.14)-(3.16)), ש:

$$(4.17) \quad X \text{ compact} \iff \exists \rho \text{ s.t. } \begin{cases} \Psi(Y_\rho) = \{\psi_\rho\} \\ \Psi(Y_{\rho+\delta r}) = \emptyset \end{cases}$$

כאשר ψ_ρ הינן נקודות שלד עם רדיוס מתאים השווה ל- ρ . במילים אחרות, משוואה (4.17) אומרת

שבניגוד לספקטרום הצורה, פילוג אורך השלד הרציף אינו מכיל בהכרח פונקציית Dirac. בצורה דומה כפי שהשטח תחת הגרף של הספקטרום צורה נותן את מידת Lebesgue של הקבוצה (שטח במקרה הדו-ממדי), השטח תחת הגרף של פילוג אורך השלד נותן את אורך השלד עצמו. כאשר מפעילים את פעולת הפתיחה על X (ומקבלים את Y_ρ), קטעים של השלד נשמטים. מכאן שצרכים לשמור פחות נתונים עבור הייצוג של הקבוצה החלקה Y_ρ . עבור קידודים עם שגיאה, חשוב לשערך את החיסכון בכמות הנתונים כפונקציה של ρ , הקובע את העוות. בהקשר זה, המשפט הבא נותן חסם תחתון על אורך השלד הנשמט בפעולת הפתיחה. בסעיף הבא נדון בנושא במקרה הברידי.

משפט 4.3:

אם $Y_\rho \neq Y_{\rho+r}$ ו- $\Psi(Y_\rho)$ לא מכיל נקודות בודדות, אזי $L[\Psi(Y_\rho)] - L[\Psi(Y_{\rho+r})] \geq r$, כאשר $L(\cdot)$ מסמן את אורך הקטע.

משפט 4.3 מראה שאם נתונה קבוצה X ב- R^2 כך ש- $Y_\rho \neq Y_{\rho+r}$, לפחות קטע באורך r נשמט בשלד $\Psi(Y_\rho)$ כאשר עוברים, ע"י פתיחה ב- $(\rho+r)U$, לשלד $\Psi(Y_{\rho+r})$ (ראה הוכחה בנספח ג'). מהוכחת המשפט נובע שקטעים שונים באורך r נשמטים עבור כל נקודה ψ_ρ בשלד. הקבוצה $S_\rho(X)$ (ראה נוסחא 3.6) מכילה את הנקודות ψ_ρ שבשלד. לכן, אם המרחק בין כל שתי נקודות שונות $\psi_\rho^1 \in \Psi(X)$ ו- $\psi_\rho^2 \in \Psi(X)$ גדול או שווה ל- $2r$, אזי סך הכל האורך הנשמט הינו $|S_\rho(X)| \cdot r$. המשפט הבא, הנגזר מהמשפט הקודם, מראה את הקשר שבין פילוג אורך השלד הרציף והחלקות גאומטריות של הקבוצה:

משפט 4.4:

אם $0 \leq r \leq \rho$, אינה מכילה נקודות בודדות ו- $L[\Psi(X)] > 0$, אזי:

$$(4.18) \quad X = X \circ \rho U \iff \Lambda_X(r) = 0 \text{ for all } 0 \leq r \leq \rho$$

הוכחת המשפט נמצאת בנספח ג'.

4.2.3 אנלוגיה עם עבוד אותות אלגברי

מהמשפטים האחרונים ניתן לראות את האנלוגיה שהוזכרה בין המושגים שהגדרנו ומשפט הדגימה הקלטי. האנלוגיה מתקבלת ישירות דרך ההחלפות הבאות:

1. מסנן מעביר נמוכים \leftrightarrow החלקה מורפולוגית (פתיחה)

(ראה משפט 4.2)

2. התמרת פוריה \leftrightarrow פילוג אורך השלד הרציף

3. תדר \leftrightarrow כאשר $\frac{1}{\sigma(\psi)} \in \Psi(X)$

כאשר אם $x \in X$ ו- $d(x, \partial X)$ הינו המרחק מ- x ל- ∂X , אזי $\sigma(x) \triangleq d(x, \partial X)$.

4. תדר הקטעון \leftrightarrow רדיוס ההחלקה $(\frac{1}{\rho})$

דוגמאות של האנלוגיה הנ"ל הן:

1. מסנן מעביר נמוכים במישור התדר נותן אותה תוצאה כמו החלקה מורפולוגית במישור פילוג אורך השלד הרציף (ראה משפט 4.4).

2. באותו אופן כמו שתדר הקטעון קובע את קצב הדגימה (משפט הדגימה הקלטי), רדיוס ההחלקה קובע את הרדיוס המינימלי בייצוג המורפולוגי (משפט הדגימה הגאומטרית).

4.2.4 פלוג אורך השלד הבדיד

ניתן להרחיב את ההגדרה של פילוג אורך השלד למקרה הבדיד באופן הבא:

פילוג אורך השלד הבדיד:

פילוג אורך השלד הבדיד (*discrete skeleton length distribution*) של קבוצה X ב- Z^2 ביחס לאיבר תצורה B ב- Z^2 מתגדר כ:

$$(4.19) \quad \Lambda_X(n, B) \triangleq \text{Card}[S_n^B(X)]$$

כאשר $S_n^B(X)$ הינה תת-קבוצה ה- n -ית בשלד של X . מנוסחא (3.23), רואים ש- $S_n^B(X)$ מכילה את הנקודות אותן יש להוסיף לקבוצת השיחזור על מנת לשחזר את $X \circ nB$ במקום $X \circ (n+1)B$, ומכאן המוטיבציה להגדרה.

משפט 4.5 הינו דואלי למשפט 4.4:

משפט 4.5:

אם X ו- B קבוצות קמורות, אזי:

$$(4.20) \quad X = X \circ kB \iff \Lambda_X(n, B) = 0 \text{ for all } 0 \leq n \leq k$$

הוכחת המשפט נמצאת בנספח ג'.

חשוב לציין שאם אנו מתיחסים לשלדים מינימליים ולא לשלדים כלליים, ניתן להוריד את התנאי על X ו- B (ראה נספח ג').

סיכום:

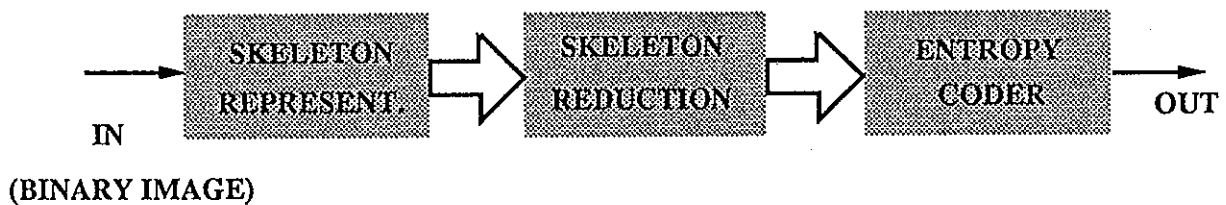
עבור קבוצה נתונה, ספקטרום הצורה נותן מידע על השטח הקשור לאיבר תצורה nB . פילוג אורך השלד עבור אותו n , קשור ל"כמות" נקודות השלד התורמות לאותו שטח. הקשר בין פילוג אורך השלד וספקטרום הצורה נותן מידע על כמה אנו צריכים "לשלם" עבור כל חלק (שטח) בקבוצה. ז"א, כשמדובר על ייצוג קבוצות באמצעות שלד, פילוג אורך השלד וספקטרום הצורה משלימים אחד את השני. צריך לפתח פונקציה מחיר, בדומה לפונקציית קצב-עוות (rate distortion function) [50], המבוססת על הפונקציות הנ"ל ומצביעה על הכדאיות בקידוד של נקודות שלד. פונקציה זו צריכה לענות על שאלות כמו: "מה הוא הקצב הדרוש עבור שגיאה נתונה?", או "מה היא השגיאה בשיחזור עבור קצב נתון?". כאן, הקצב ימדד בנקודות שלד (קשור לפונקציית פילוג אורך השלד), והשגיאה הינה שגיאה גאומטרית כגון החלקה מורפולוגית (הקשורה לספקטרום הצורה).

פרק 5: קידוד מורפולוגי של תמונות

בפרק זה נציג אלגוריתמים לקידוד תמונות בינריות ותמונות רבות-רמות. בחלק הראשון של הפרק נביא שיטה לקידוד תמונות בינריות המבוססת על משפט הדגימה הגאומטרי ועל השלד המורפולוגי המשופר. בחלק השני של הפרק, נביא שיטה לקידוד תמונות רבות-רמות המבוססת על הקידוד של מישורי הסיבית בשיטה שפותחה למטרות לקידוד של תמונות בינריות.

5.1 קידוד תמונות בינריות

בציור 5.1 ניתן לראות דיאגרמת בלוקים של האלגוריתם לקידוד תמונות בינריות. האלגוריתם מתבסס על ייצוג התמונה ע"י השלד המורפולוגי המשופר שהצגנו בפרק 3. היתרות בייצוג הנ"ל מופחתות באמצעות אלגוריתם המבוסס על משפט הדגימה הגאומטרית שהצגנו בפרק הקודם. את השלדים המתקבלים, שהם מהורים ייצוג דליל מאוד של מישורי הסיבית, מקודדים בעזרת שילוב של מקודדי אנטרופיה. השילוב כולל קוד Huffman עבור מספר השורות הרצופות ללא נקודות שלד, וקוד [13] Elias בצרוף עם דחיסה בעזרת האלגוריתם לקידוד אוניברסלי של Lempel-Ziv [66] עבור המיקום של נקודות השלד בשאר השורות.



ציור 5.1: דיאגרמת בלוקים של האלגוריתם לקידוד תמונות בינריות

Fig 5.1: Block diagram of the binary coding algorithm

5.1.1 ייצוג התמונות ע"י שלד מורפולוגי משופר

כפי שראינו בפרק 3 (משוואות (3.31)-(3.33)), ניתן לייצג תמונות בינריות ע"י השלד המורפולוגי המשופר. בחירת הצורה (shape) של איבר התצורה תלויה בתמונה עצמה. אם קיים מראש מידע על הגאומטריה של התמונה, ניתן להעזר במידע זה לבחירת הצורה; אחרת, או שבחורים בצורה כללית (למשל רבוע) או שבדקים עם מספר צורות שונות ובחורים בזו שנותנת תוצאות טובות יותר [33].

לאחר החישוב של השלד המורפולוגי המשופר של תמונה בינרית $X \subset Z^2$, מקבלים $N_M(B) + 1$ תמונות בינריות (ראה משוואה (3.31)) או תמונה (פונקציה בדידה דו-ממדית) רבת-רמות $m(X)$ עם $N_M(B) + 2$ רמות שונות, בה הערכים מייצגים את הרדיוס של איבר התצורה המירבי:

$$(5.1) \quad m(x,y) \triangleq \begin{cases} n+1 & \text{if } (x,y) \in M_n(X) \quad n = 0, \dots, N_M(B) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

תמונה רבת-רמות כזאת הינה חד משמעית כי $M_n(X) \cap M_m(X) = \emptyset$ עבור כל $m \neq n$, ראה סעיף 3.5.2.

כפי שרואים ממשוואה (3.33), מאוסף התמונות הבינריות הנ"ל (או מהתמונה רבת-הרמות), ניתן לשחזר את X , ז"א השלד המורפולוגי המשופר הינו ייצוג מלא של התמונה. ייצוג זה, כמו השלד המורפולוגי המקובל, הינו בעל יתרות (redundancy) רבה. בסעיף הבא נדון בהפחתה של יתרות זו.

5.1.2 הפחתת היתרות בשלד המורפולוגי המשופר

השלד המשופר $M_n(X)$, $\{n = 0, 1, \dots, N_M(B)\}$, הינו ייצוג בעל יתרות רבה, ניתן לסלק נקודות שלד ובכל זאת לשחזר את הקבוצה הבינרית הבדידה X באמצעות נוסחא (3.33).

שלד מינימלי (minimal) של X מוגדר כתת-קבוצה של השלד של X המספיקה לשיחזור מלא של X . אולם, מספיקה הורדה של נקודת שלד אחת בקבוצה כדי שהשיחזור המדויק כבר לא יהיה אפשרי. אותה הגדרה תופסת עבור השלד המקורי [33] ועבור השלד המשופר.

כפי שציינו בפרק 3, Schafer ו-Maragos [33] הציגו אלגוריתם להפחתה של השלד, אבל האלגוריתם שלהם אינו מבטיח שמתקבל השלד המופחת בעל המספר הקטן ביותר של נקודות, אלא שמתקבל שלד מופחת (או מינימלי) כלשהו. הגישה שלנו להורדת נקודות מיותרות בשלד מתבססת על השלכות משפט הדגימה הגאומטרית (שהצגנו בפרק הקודם) על המקרה הברידי.

לא ידוע משפט דואלי למשפט הדגימה הגאומטרית עבור שלדים של תמונות בינריות בדידות. למרות זאת, אם מגדירים נקודות סינגולריות בשלד של קבוצות בדידות באופן דומה לנקודות סינגולריות בשלד של קבוצות רציפות, מצאנו בעזרת סימולציות עבור מספר רב של תמונות בינריות (מישורי סיבית) שהנקודות הסינגולריות בשלד של תמונות בדידות, שהם בדרך כלל פחות מ-10% של כלל נקודות השלד, מצליחים לכסות מעל 90% של כלל התמונה. לכן, הנקודות הסינגולריות אינן מספיקות אמנם לשיחזור המלא של כל הקבוצה, אבל הן מהוות תת-קבוצה של השלד שהיא כמעט מספיקה לשיחזור המלא. מכאן, שיש לדאוג, לאחר מציאת הנקודות הסינגולריות, לכיסוי "אופטימלי" רק של חלק קטן מהתמונה (קרוב ל-10%) במקום כיסוי אופטימלי של התמונה כולה כפי שנעשה ב-[33]. מרחב החיפוש (*search space*) המתקבל הינו קטן בהרבה מהמקורי, וניתן להגיע יותר בקלות לפתרון קרוב לאופטימלי. בעבודה זו החלטנו לבחור נקודות שלד, בנוסף לנקודות הסינגולריות, על פי התרומה של האיבר המירבי המתאים להן לתמונה המשוחזרת (ראה נוסחאות (3.4), (3.21), ו-(3.33)). נסמן להלן ב- $M'_n(X)$ את תת-הקבוצה המופחתת של השלד המתקבלת מ- $M_n(X)$ עפ"י הגישה הנ"ל.

כך קיבלנו שתמונה בינרית (או כפי שנראה בהמשך, מישור סיבית של תמונת מקור רבת-רמות) מיוצגת בעזרת שלד מורפולוגי משופר ומופחת (*Reduced Modified Morphological Skeleton - RMMS*):

$$(5.2) \quad RMMS(X) \triangleq \bigcup_{n=0}^{N_M(B)} M'_n(X)$$

$$(5.3) \quad X = \bigcup_{n=0}^{N_M(B)} M'_n(X) \oplus B(n)$$

שים לב שהשלד המורפולוגי המשופר והמופחת הינו שלד מינימלי (ראה הגדרה בתחילת הסעיף). המיוחד בשלד המופחת המיוצג ע"י $M'_n(X)$, המבדיל אותו משלדים מינימליים אחרים [33], הוא הדרך בה חישבנו אותו (שימוש בנקודות סינגולריות).

לפני סיום סעיף זה, חשוב לציין שתוצאות סימולציה מביאות להשערה שגירסה בדידה של משפט 4.1 (האומר שנקודה הינה סינגולרית אם ורק אם היא הינה שפה סינגולרית) עשויה להיות נכונה. מכאן, שבזמן בדיקת הסינגולריות של נקודה מסוימת בשלד, מספיק לבדוק את התרומה של איבר התצורה המתאים לה לשפת הקבוצה. תכונה זאת מקטינה בצורה משמעותית את הסיבוכיות החישובית של האלגוריתם (סיבוכיות לינארית בגודל איבר התצורה במקום רבועית כמו באלגוריתם המוצע ב-[33]).

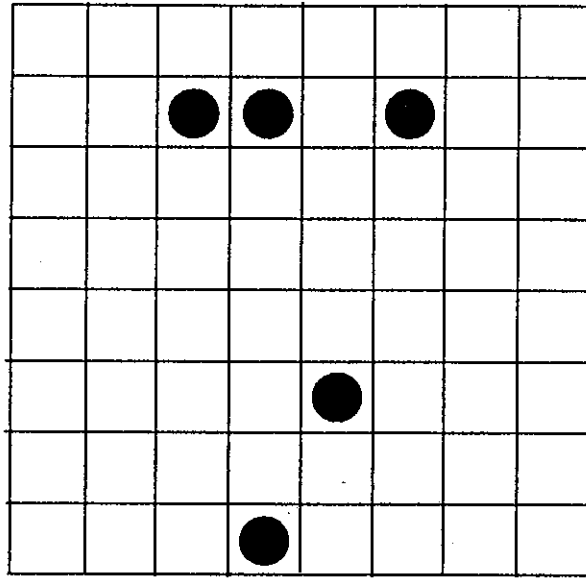
5.1.3 קידוד השלד המורפולוגי המשופר והמופחת

באופן כללי קיימות שתי גישות לקידוד ה- $RMMS$ של תמונה X [33]:

1. קידוד של כל $M'_n(X)$ כתמונה בינרית, ולכן יש לקודד $[N_M(B) + 1]$ תמונות בינריות, כאשר התמונות $M'_n(X)$ הינן תמונות בינריות דלילות מאוד (sparse).
2. קידוד של תמונה רבת-רמות בודדת $m(X)$ (ראה משוואה (5.1)), שבה לכל נקודת שלד ישנו ערך המציין את הרדיוס של איבר התצורה המתאים לה. תמונה רבת-רמות כזו היא כאמור קיימת כי תת-קבוצות $M'_n(X)$, $[n = 0, 1, \dots, N_M(B)]$, הינן זרות זו לזו (ראה סעיף 3.5).

אנו בחזרנו בקידוד ה- $RMMS$ על פי הגישה הראשונה וזאת בגלל שתי סיבות: ראשית, תוצאות טובות יותר התקבלו בגישה זו לעומת הגישה השנייה. שנית, קידוד תת-קבוצות של השלד כאוסף של תמונות בינריות הינו קידוד המתאים יותר לאלגוריתם השידור הפרוגרסיבי (progressive transmission) עבור תמונות רבות-רמות שאנו מציגים בסוף הפרק.

לקידוד כל ה- $M'_n(X)$, $n = 0, \dots, N_M(B)$, אנו משתמשים בשילוב של שני מקודדי אנטרופיה (*entropy coders*), אחד עבור הקידוד של שורות ללא נקודות שלד (שורות ריקות), ואחד עבור שאר השורות. בציור 5.2 מודגמת תת-קבוצה $M'_n(X)$ ובה גם שורות ריקות וגם שורות המכילות נקודות שלד (נקודות שחורות).



ציור 5.2: דוגמא של $M'_n(X)$

Fig. 5.2: Example of $M'_n(X)$

ראשית כל יוצרים קוד Huffman (טבלה ספציפית לתמונה הנתונה) של מספר השורות הריקות הרצופות. מכאן, ניתן להצביע על המקום המדויק של השורות הלא-ריקות.

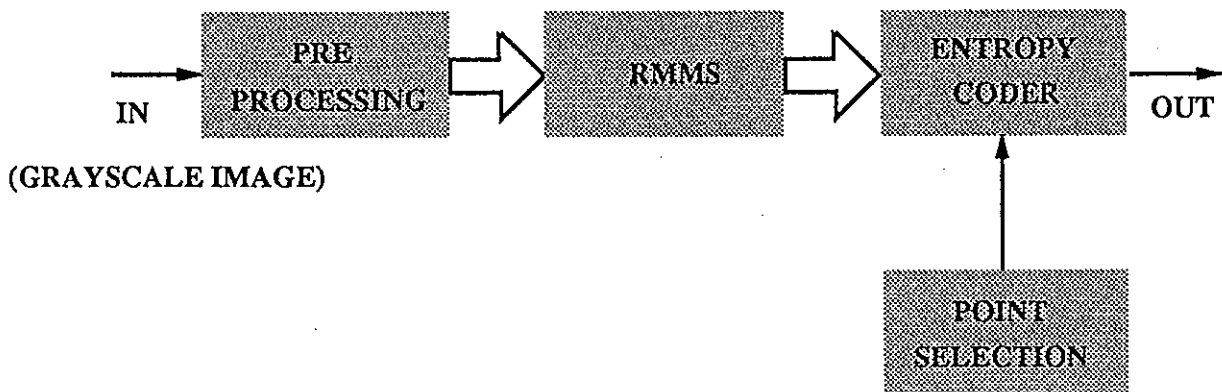
את המקום של כל נקודת שלד בשורה הלא-ריקה המתאימה לו, מקודדים באמצעות קוד Elias [13, 33] עם ארבעה סימנים שונים: שלושה עבור ייצוג טרנרי (ternary) של רצפים (runlengths) של "אפסים", וסימן "פסיק" (comma) עבור ה"אחדים", שהם נקודות השלד המפרידות בין הרציפות של אפסים. יש צורך לכן בשתי סיביות לייצוג של ארבע הסימנים הנ"ל. לבסוף, היציאה הבינרית לאחר הקידוד עפ"י קוד Elias מקודדת בעזרת האלגוריתם לקידוד אוניברסלי של Lempel-Ziv [66].

שיטת הקידוד הנ"ל הינה יעילה מאוד לקידוד ה- $RMMS$ עקב מבנהו המיוחד שציינו. שיפור ביחס הדחיסה התקבל בשימוש ב- $RMMS$ במקום הייצוג המורפולוגי שהוצע ע"י Maragos ו-Schafer [33] (ראה תוצאות הסימולציות). שיפור זה מתבטא בעיקר בהפחתה במספר הסיביות הדרושות לקידוד השורות הריקות, וזה עקב ההפחתה במספר התת-קבוצות (ראה סעיף 3.5.1).

5.2 קידוד תמונות רבות-רמות

האלגוריתם לקידוד תמונות רבות-רמות מורכב מהשלבים הבאים: בשלב ראשון, התמונה עוברת תהליך של פיזור השגיאה (*error-diffusion*) [64] כדי להקטין את מספר מישורי הסיבית ללא פגיעה משמעותית באיכות התמונה. לאחר מכן, הערכים של תאי התמונה (*pixels*) מיוצגים בקוד Gray על מנת לקבל מישורי סיבית אוזניים יותר [30, 56]. כל אחד ממישורי הסיבית המתקבלים, מיוצג בעזרת העלד המורפולוגי המשופר והמפוזר (*RMMS*) שהצגנו בסעיף הקודם. את ה-*RMMS* מקודדים עם האלגוריתם לקידוד שלדים שהוצג בסעיף 5.1.3.

על מנת להגדיל את יחס הדחיסה, ניתן להכניס שגיאות גאומטריות במישורי הסיבית. למקרה זה, אנו מציעים עבודים שונים לשיפור התמונה המשוחזרת, וכן מציעים שיטה לשידור פרוגרסיבי גאומטרי. בציר 5.3 ניתן לראות את דיאגרמת הבלוקים של אלגוריתם הקידוד. נפרט כעת את השלבים השונים.

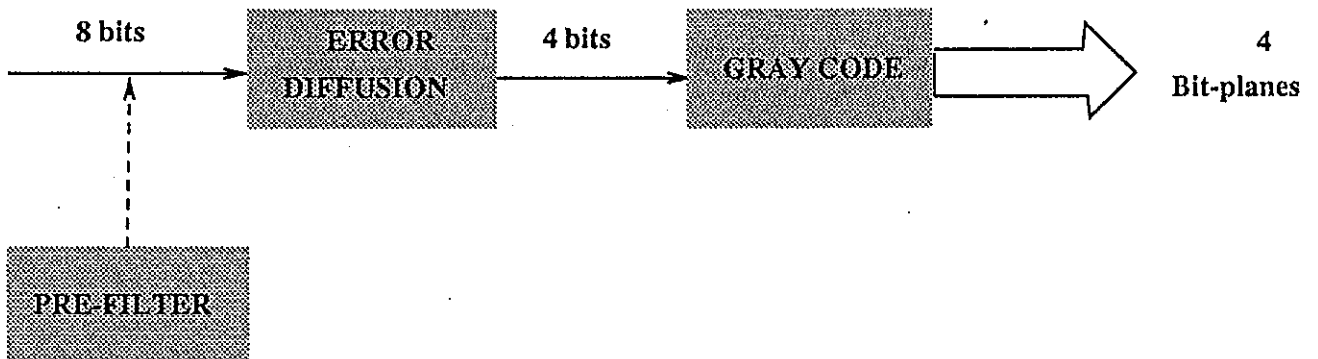


ציר 5.3: דיאגרמת בלוקים של אלגוריתם הקידוד של תמונות רבות-רמות

Fig. 5.3: Block diagram of the gray-level image coding algorithm

5.2.1 עבוד מוקדם

מטרת העבוד המוקדם הינה לייצג את התמונה המקורית בצורה המתאימה יותר לשיטת הקידוד המוצעת. ציור 5.4 מדאח את השלבים השונים בעבוד המוקדם.



ציור 5.4: שלבים השונים בעבוד המוקדם

Fig 5.4: Steps of the pre-processing stage

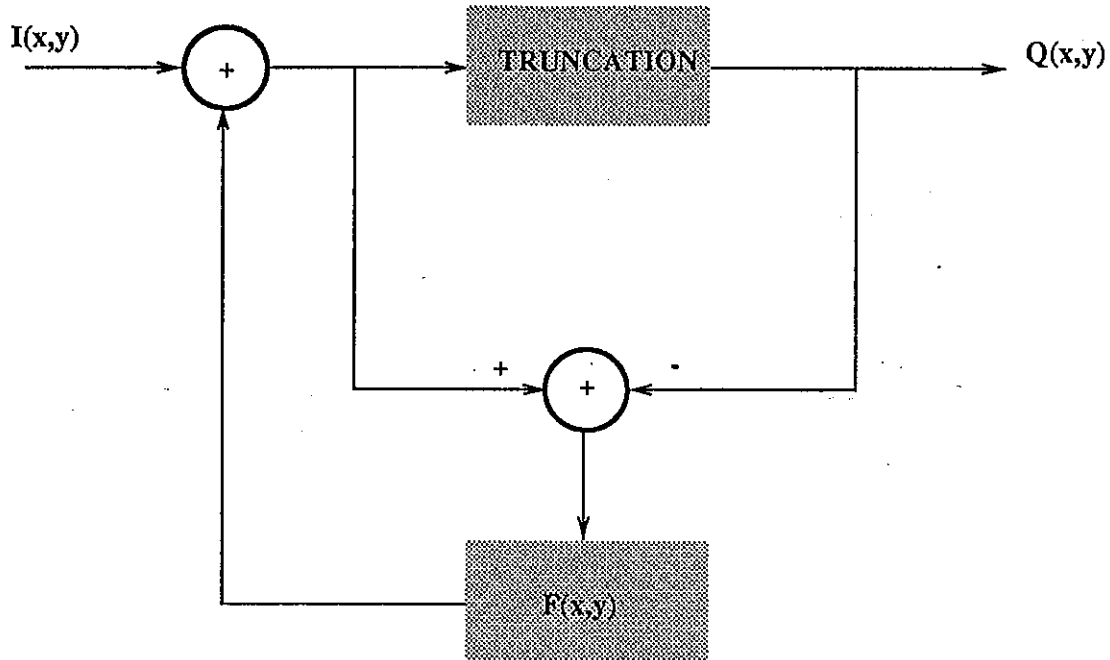
5.2.1.1 הורדה במספר הסיביות לייצוג התמונה

בשלב הראשון של העבוד המוקדם, מקטינים את מספר מישורי הסיבית תוך שימוש באלגוריתם לפיזור השגיאה (*error-diffusion*) של Floyd-Steinberg [64]. בציור 5.5a מופיע דיאגרמת בלוקים של האלגוריתם. השלבים באלגוריתם הם כדלקמן:

(1) התמר את ערך תא התמונה (*pixel*) מ-8 סיביות למספר הרצוי $L < 8$ של סיביות בעזרת קצוץ (truncation).

(2) פזר את השגיאה המתקבלת מהתהליך ב-(1) לתאי התמונה השכנים על פי המסכה (*mask*) המופיעה בציור 5.5b. הפיזור נעשה ע"י הוספת השגיאה המשוקללת, עפ"י הערכים המופיעים במסכת המשקלים, לתאים השכנים.

(3) התקדם לתא התמונה הבא וחזור ל-(1).



a)

$1/16 \times$

	X	7
3	5	1

b)

ציור 5.5: a) דיאגרמת בלוקים של האלגוריתם לפיזור השגיאה של Floyd-Steinberg.

b) מסכת המשקלים של האלגוריתם

Fig 5.5: a) Block diagram of the Floyd-Steinberg error-diffusion algorithm

b) Weights-mask used in the algorithm

בסימולציות מצאנו שהמרת התמונה המקורית המיוצגת ב-8 סיביות לתמונה ב-4 סיביות ($L = 4$), בשיטה זו, נותנת תמונה באיכות טובה מאוד, בניגוד לתמונה המתקבלת ע"י קצוץ בלבד כמודגם בפרק הבא המציג תוצאות סימולציה. תוצאות עבור 3-סיביות ($L = 3$) מוצגות שם גם כן.

בשיטה זו אנו מורידים את מישורי הסיבית הפחות משמעותיים, שנעקב המבנה שלהם (שהיא כמעט אקראי), הם בדרך כלל קשים לדחיסה. לכן, ע"י השימוש בתמונות עם 4 מישורי סיבית, שהתקבלו מתמונות עם 8 מישורי סיבית בשיטת פיזור השגיאה, אנו מגדילים את יחס הדחיסה מבלי לפגוע באופן משמעותי באיכות הסובייקטיבית של התמונה.

ניתן כמו כן לסנן את התמונה לפני התהליך של פיזור השגיאה, עם מסנן median או עם מסנן מורפולוגי (שילוב של פעולות פתיחה וסגירה רבת-רמות). מסננים אלו משפרים את תוצאות הקידוד (ראה בפרק הבא) ללא פגיעה משמעותית באיכות התמונה. השימוש במסננים אלו מבוסס על תכונות מערכת הראיה [1].

5.2.1.2 ייצוג ערכי תאי התמונה

אחרי השלב של פיזור השגיאה, הערכים של תאי התמונה מיוצגים בקוד Gray [21] על מנת לקבל מישורי סיבית אחידים יותר. היתרון בשימוש הקוד Gray הוכח בעבר בעבודה בה חקרו את הקידוד של מישורי סיבית בעזרת האלגוריתם של Lempel-Ziv לקידוד אוניברסלי [30]. ב-[23, 24] נחקר השימוש ב-quad-tree לדחיסה של מישורי סיבית ונמצא גם כן יתרון רב בייצוג Gray.

מצאנו כמו כן שיחס הדחיסה משתפר בצורה משמעותית ביותר בעזרת ייצוג Gray לעומת ייצוג ביתרי רגיל. ניסינו למצוא ייצוג טוב יותר מקוד Gray, תוך אפשרות שהקוד יהיה תלוי בתמונה. ז"א, חיפשנו טבלת תרגום (חד-חד ערכית) מקוד ביתרי לקוד אחר, כאשר הטבלה יכולה להיות תלויה בתמונה (יש גם צורך לשמור אותה טבלה, אבל היא קטנה). טבלת התרגום צריכה להעביר את מישורי הסיבית של התמונה בייצוג הביתרי למישורי סיבית אחרים שהם אחידים ככל האפשר.

לצורך מציאת הטבלה, הגדרנו מדד לטיב הייצוג באופן הבא:

אם x ו- y מסמנים קואורדינטות של שני תאים בתמונה, בעלי שכיס $I(x)$ ו- $I(y)$ (בייצוג הנתון), בהתאמה, אזי המרחק בין שני התאים מתגדר כ:

$$(5.4.a) \quad \delta(x, y) = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \delta_i(x, y)$$

כאשר אם x_i הינו הסיבית ה- i ב- $I(x)$ ו- y_i הינו הסיבית ה- i ב- $I(y)$, אזי $\delta_i(x, y)$ הינו המרחק בין סיביות אלו, המתגדר כדלקמן:

$$(5.4.b) \quad \delta_i(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } x_i = y_i \\ 1 & \text{if } x_i \neq y_i \end{cases}$$

כלומר, זהו מרחק Hamming.

על בסיס פונקצית המרחק $\delta(x, y)$ אנו מגדירים:

$$(5.5) \quad \Omega(I) = \frac{1}{|I|} \sum_{x \in I} \left[\frac{1}{|B_x|} \sum_{y \in B_x} \delta(x, y) \right]$$

כאשר I הינה התמונה ו- B_x הינה סביבה של תא התמונה x .

הגודל $1/\Omega(I)$ הוא מדד לטיב הייצוג.

ככל ש- $\Omega(I)$ קטן יותר (ולכן $1/\Omega(I)$ גדול יותר), מישורי הסיבית צפויים להיות אחידים יותר ויחס הדחיסה צפוי להיות טוב יותר. נכונות טענה זאת נבדקה בסימולציות עבור מספר רב של תמונות (למשל עבור "לנה", ראה פרק הבא) ומספר רב של ייצוגים שונים (למשל ייצוג בינרי, Gray, טבלה אקראית), כאשר הסיבבה B_x נבחרה כסיבבה רבועית בדרך כלל.

הבעיה של מציאת ייצוג טוב כפי שהסברנו לעיל, מתורגמת כעת לבעיה מתמטית פורמלית (בעיית

אופטימיזציה): עבור תמונה נתונה I , מצא ייצוג (טבלה) המקטין ככל האפשר את $\Omega(I)$.

בחנו שיטות שונות לפתרון בעיית האופטימיזציה הני"ל, ביניהן *simulated annealing* [26] (ראה נספח ד'), וקבלנו שעבור תמונות רגילות (כגון "לנה"), קוד Gray נתן תמיד את ה- $\Omega(I)$ הקטן ביותר, כאשר הערך של $\Omega(I)$ עבור הייצוג בקוד Gray היה בממוצע שווה לחצי הערך עבור הייצוג הבינרי.

מהאמור לעיל מקבלים:

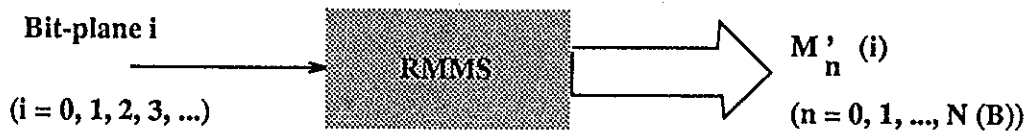
1. תמיכה נוספת לשימוש בקוד Gray עבור תמונות רגילות.
2. שיטה למציאת טבלה טובה לתמונות כלשהן, כולל תמונות סינטטיות.

למעשה, ניתן להפעיל תמיד את שיטת האופטימיזציה הנ"ל (כחלק מהעבוד המוקדם), כאשר הטבלה ההתחלתית הינה המתאימה לקוד Gray. ברוב המקרים, הטבלה לא תשתנה, אבל יתכנו מקרים בהם אלגוריתם האופטימיזציה ישיג $\Omega(I)$ קטן יותר וכך יצביע על טבלה טובה יותר.

5.2.2 ייצוג של מישורי הסיבית

אחרי השלב של העבוד המוקדם, קיבלנו L -מישורי סיבית (תמונות בינריות) $\{BP_0, \dots, BP_{L-1}\}$ שהם ייצוג בקוד Gray של תמונה שהתקבלה מתמונה עם 8-מישורי סיבית ע"י התהליך של פיזור השגיאה.

כל אחד מ- L -מישורי הסיבית הנ"ל (במקרה שלנו $L = 4$) מיוצג באמצעות השלד המורפולוגי המשופר והמורפחת (RMMS) שהצגנו בסעיף הקודם. איבר התצורה (B) בו השתמשנו הינו רבוע 3×3 . איבר תצורה זה קשור למושג של "שכנות 8". עקב הכלליות שבמבנה של מישורי הסיבית, לא ניתן לחת עדיפות מראש לאף אחד מהאברים המופיעים בציור 3.4 ולכן בחרנו באיבר הכללי ביותר (ראה מסקנות). בדרך כלל מתקבלות לא יותר מ-6 תת-קבוצות של השלד המשופר עבור מישורי הסיבית השונים $(N_M(B) = 5)$, ראה נוסחא (3.31). שלב זה באלגוריתם הקידוד מסוכם בציור 5.6:



ציר 5.6: שלב הייצוג של מישורי הסיבית

Fig 5.6: Bit-plane representation stage

השלדים המתקבלים מקודדים עם מקודד האנטרופיה שהצגנו בסעיף 5.1.3, כאשר הכניסה למקודד היא התת-קבוצות של השלדים המתקבלים מכל מישורי הסיבית ברציפות (כך נכנסת טידרה בודדת ארוכה יותר לאלגוריתם של Lempel-Ziv).

5.2.3 שידור פרוגרסיבי על בסיס גאומטרי

ניתן לאפשר שגיאות גאומטריות במישורי הסיבית השונים וכך להגדיל את יחס הדחיסה. השגיאות הנ"ל מתאימות להשמטה של תת-קבוצות $M'_n(X)$ של ה-RMMS, כאשר $n < r \leq N_M(B)+1$, כאשר r נבחר על פי החשיבות של מישורי הסיבית של X (עבור מישורי סיבית חשובים יותר, r קטן יותר או אפילו אפס).

מתוך נוסחא (3.32) ניתן לראות שבמקרה זה של השמטת תת-קבוצות של ה-RMMS, מקבלים גירסאות חלקות (smoothed) של X מהצורה $X \circ B(r)$. אם מקודדים רק את הגרסה החלקה של X , נקודות ב- X יפיעו בשיחזור כחלק מן הרקע $X \circ B(r) \subset X$, ראה תכונות בפרק 2). תופעה זו גורמת להורדה משמעותית ביותר באיכות הסוביטיבית של התמונה המשחזרת (ראה פרק סימולציות). כדי

לפתור בעיה זו, מקודדים את הגירסאות החלקות גם של X וגם של X^c , ובייחוד ממלאים בצורה אקראית את האזורים הלא מוגדרים או "חורים" (ז"א איזורים שלא שייכים לא לגרסה החלקה של X לא לזו של X^c).

ניתן להוסיף באופן פרוגרסיבי תת-קבוצות מן השלד שהושמטו בשלב ראשון, עד שמתקבלת האיכות הרצויה, או עד שמגיעים לקצב (bit rate) הרצוי. תהליך זה נקרא שידור פרוגרסיבי על בסיס גאומטרי (*Geometric Progressive Transmission*). תת-הקבוצות הנ"ל מתוספות בסדר הנקבע על פי חשיבותן, כאשר החשיבות מוכתבת ע"י שני גורמים: הגורם הראשון הינו מישור הסיבית אליו שייכת תת-הקבוצה (תת-קבוצות השייכות למישורי סיבית חשובים יותר, הן חשובות יותר). הגורם השני הינו הרדיוס של האיברים המירביים המתאימים לאותה תת-קבוצה, שהוא נתון ע"י n (ראה נוסחא 3.32) (קבוצות עם רדיוסים גדולים יותר הן חשובות יותר).

לנקודות שלד שונות השייכות לתת-קבוצה מסוימת $M'_n(X)$ שהושמטה בשלב ראשון יש חשיבות שונה. כאשר מחליטים להוסיף נקודות מאותה תת-קבוצה, ניתן גם אותן להוסיף בסדר הנקבע על פי חשיבותן (אין לשכוח שבשידור פרוגרסיבי, השידור יכול להעצר כל רגע, וחשוב לשדר את המידע החשוב ביותר תחילה [6, 18, 19, 63]).

חשיבות נקודות השלד באותה תת-קבוצה נתונה ע"י תרומתן לשיפור האיכות הסובייקטיבית של התמונה המשוחזרת. ככל שהאיזור אליו שייכת נקודת השלד נראה אקראי יותר, התרומה לשיפור האיכות הינה קטנה יותר (זכור, אזורים שאינם מוגדרים ממולאים בכל מקרה באופן אקראי בשיחזור). לכן יש לתת לכל נקודת שלד באותה תת-קבוצה, מספר המצביע עד כמה אקראית הינה סביבת הנקודה ולבחור את סדר השידור על פי אותו מספר.

לסביבה אקראית יש כמה מאפיינים, ומהם בחרנו להשתמש בשניים:

1. היחס בין מספר "אחדים" ומספר "האפסים" הינו קרוב לאחד.
 2. מספר ההחלפות בין "אחדים" ו"אפסים" לאורך השורות ולאורך העמודות הינו גבוה.
- לכן, מדד האקראיות של סביבה ינתן ע"י היחס בין מספר האחדים ומספר האפסים, וע"י מספר ההחלפות בין אחדים ואפסים.

בפרק הבא מתוארות סימולציה של השידור הפרוגרסיבי הגאומטרי.

פרק 6: תוצאות סימולציה

בפרק זה נציג תוצאות המדגימות את שיטת הקידוד של תמונות רבות-רמות שהצגנו בפרק הקודם. הסימולציה התבצעה במחשב VAX-STATION 3200, והתמונות הוצגו תוך שימוש במערכת לעבוד תמונות Gould-IP8500. בחרנו כאן להציג את התוצאות עבור שתי תמונות: תמונה ראשונה הינה תמונה של פנים וקתף ("לנה", *Lena*), והתמונה השנייה הינה תמונה של ירקות ("פילפלים", *peppers*). שתי התמונות הני"ל הינן ברזולוציה של 512×512 תאי תמונה ו-256 רמות אפור (8 סיביות). טיב הביצועים נקבע על פי האיכות הסובייקטיבית של התמונה בלבד.

6.1 תוצאות עבור התמונה "לנה"

בתמונה 6.1a ניתן לראות אחד ממישורי הסיביות (המשמעותי ביותר) של "לנה" ובתמונה 6.1b רואים את השלד שלו.

תמונה 6.2a מראה את התמונה המקורית (8 סיביות). בתמונה 6.2b ניתן לראות את "לנה" המתקבלת מהפעלת השיטה של פיזור השגיאה שהצגנו בפרק הקודם (מעבר מ-8 סיביות ל-4 סיביות). תמונה זאת קודדה ללא שגיאות קידוד באמצעת השיטה שהצגנו (*RMMS*) בקצב של 0.35 סיביות לתא תמונה (*b/p*, bits per pixel), ומכונה תמונת "ארבע סיביות ללא שגיאה" ("Four-bit error-free"). אותה תמונה קודדה עם השיטה שהוצגה ב-[33] בקצב של 0.40 סיביות לתא תמונה.

תמונה 6.3a מראה את אותה תמונה, אבל התמונה טוננה עם מסנן 3×3 median לפני התהליך של פיזור השגיאה (מעבר ל-4 סיביות). תמונה זאת קודדה בקצב של 0.29 סיביות לתא תמונה.

בתמונה 6.3b ניתן לראות את השיחזור של תמונה בה מישור הסיבית הפחות משמעותי (מתוך ארבעה מישורי הסיבית שהתקבלו מפיזור השגיאה) קודד ללא נקודות שלד ב"רדיוס אפס" (ז"א המישור קודד לאחר פתיחה ב- B , כאשר B הינו ריבוע 3×3). גם מישור הסיבית וגם המשלים שלו קודדו כן, וה"חורים" מולאו באופן אקראי (ראה פרק קודם). גם תמונה זו צורכת 0.29 סיביות לתא תמונה (לעומת 0.35 סיביות לתא תמונה בתמונה 6.2b).

לפני שנעבור לדוגמא של שידור פרוגרסיבי, תמונה 6.4 מראה את התמונה המתקבלת לאחר מעבר מ-8 סיביות ל-3 סיביות. תמונה זאת קודדה בקצב של 0.26 סיביות לתא תמונה.

6.1.1 שידור פרוגרסיבי על בסיס גאומטרי

התמונה הבאה מראה דוגמא של האלגוריתם לשידור פרוגרסיבי על בסיס גאומטרי שהוצג בפרק הקודם. בכל התמונות הבאות, שני מישורי הסיבית המשמעותיים ביותר קודדו ללא שגיאה (error-free). אם V מסמן את המישור הפחות משמעותי ו- W אחד מעליו, אזי: בצירוף 6.5.a, V ו- V^c קודדו לאחר

$$\text{פתיחה ב- } 4B, \text{ ו- } W \text{ ו- } W^c \text{ קודדו לאחר פתיחה ב- } 2B \text{ (ז"א, } V \circ 4B, V^c \circ 4B, W \circ 2B \text{)}$$

ו- $W^c \circ 2B$ קודדו). הקצב הוא 0.18 סיביות לתא תמונה. בתמונה 6.5.b הוספו נקודות שלד ההכרחיות לקידוד ללא שגיאה של W (ז"א נקודות שלד עם רדיוס אפס ואחד ב- W), ומקבלים קצב של

0.23 סיביות לתא תמונה. בתמונה 6.5.c, נקודות שלד עם רדיוס $2B$ הוספו על מנת לשחזר את $V \circ 2B$

ואת $V^c \circ 2B$, והקצב המתקבל הינו 0.25 סיביות לתא תמונה. את השלב הבא בשידור הפרוגרסיבי

ניתן לראות בתמונה 6.3b, בה $V \circ B$ ו- $V^c \circ B$ קודדו והתקבל קצב של 0.29 סיביות לתא תמונה.

על מנת לשפר עוד יותר את התמונה 6.3b בשידור הפרוגרסיבי, ניתן להוסיף חלק מנקודות השלד של V המתאימות לרדיוס אפס על סמך הקריטריון הטובייקטיבי שהוסבר בפרק הקודם. כפי שציינו בפרק 5, בחרנו להשתמש בשני מדדים לאיפיון האקראיות של סביבה:

1. היחס בין מספר האחזים ומספר האפסים בסביבה.

ככל שהיחס הזה קרוב יותר לאחד, הסביבה אקראית יותר.

2. מספר החלפות בין אחזים ואפסים לאורך השורות והעמודות של הסביבה.

ככל שיש יותר החלפות, הסביבה אקראית יותר.

נסמן ב- $DC_i(p)$ וב- $AC_i(p)$ את המדד הראשון והשני בהתאמה, עבור מישור הסיבית i ,
 ($i = 0, 1, 2, 3$), ועבור נקודת שלד p . באופן טבעי, בחרנו ב- B_p כסביבה המתאימה לנקודה p .
 כאשר B הינו האיבר החצורה הבסיסי שבעזרתו חישבנו את ה- $RMMS$ (ריבוע 3×3) ו- B_p הינה ההזזה
 של B ע"י הוקטור p . עבור כל נקודה p בה רוצים לחשב את אקראיות הסביבה, מחשבים את המספרים
 הבאים:

$$(6.1) \quad DC(p) = \sum_{i=0}^{i=3} w(i)DC_i(p)$$

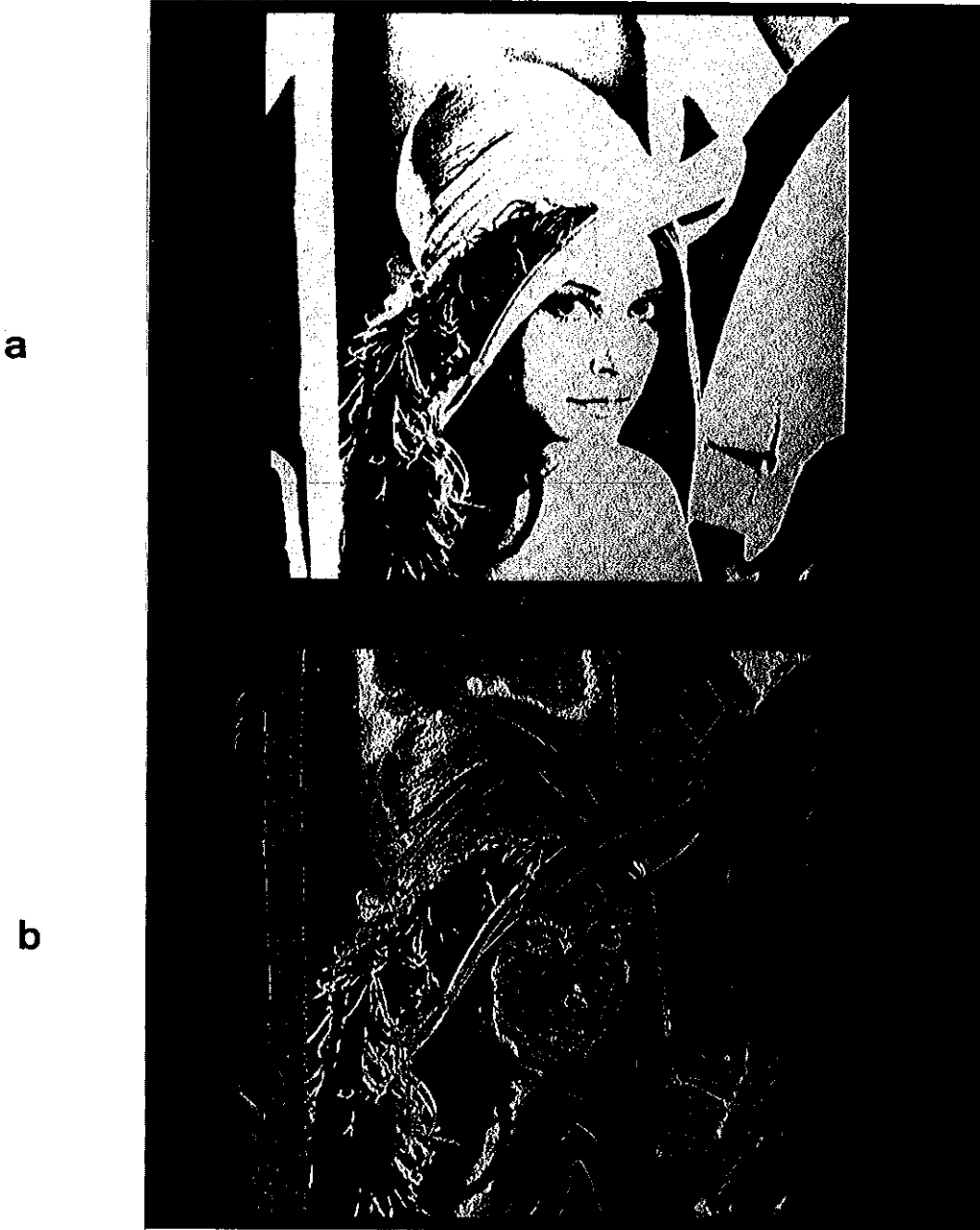
$$(6.2) \quad AC(p) = \sum_{i=0}^{i=3} w(i)AC_i(p)$$

כאשר $w(i)$, ($i = 0, 1, 2, 3$), הינם משקלים השולטים על ההשפעה של כל מישור סיבית בהחלטת
 האקראיות (במקרה שלנו, $w(0) = w(3) = 1$ ו- $w(1) = w(2) = 2$).

בתמונה 6.6.a, ניתן לראות את כל נקודות השלד עם רדיוס אפס במישור הפחות משמעותי של "לנה" (V)
 ובתמונות 6.6.b ו-6.6.c את הנקודות מתוכם בעלי מדד $DC(p)$ קטן מסף מסוים (הנתון בצירוף). תמונה

6.7 הינה כמו תמונה 6.6 עבור המדד $AC(p)$.

בתמונה 6.5d רואים את ההמשך של השידור הפרוגרסיבי שנעצר בתמונה 6.3b, כאשר כאן נאספו
 לקבוצת השיחזור נקודות עם רדיוס אפס של V , שנבחרו על סמן המדד $DC(p)$, עד לקבלת קצב של
 0.30 סיביות לתא תמונה (ז"א, אוספים בהתחלה נקודות עם $DC(p)$ נמוך וממשיכים כל פעם עם נקודות
 שלד בעלי $DC(p)$ גדול יותר עד שמגיעים לקצב הרצוי). כאן הסף היה 0.19. את האזוריים בהם לא
 הוספנו נקודות, ממלאים כמו קודם בצורה אקראית.



ציור 6.1: מישור טיבית (MSB) של "לנה" - (a), והשליד שלו - (b)

Fig 6.1: One of Lena's bit-plane (MSB) - (a), and its skeleton - (b)

a



b

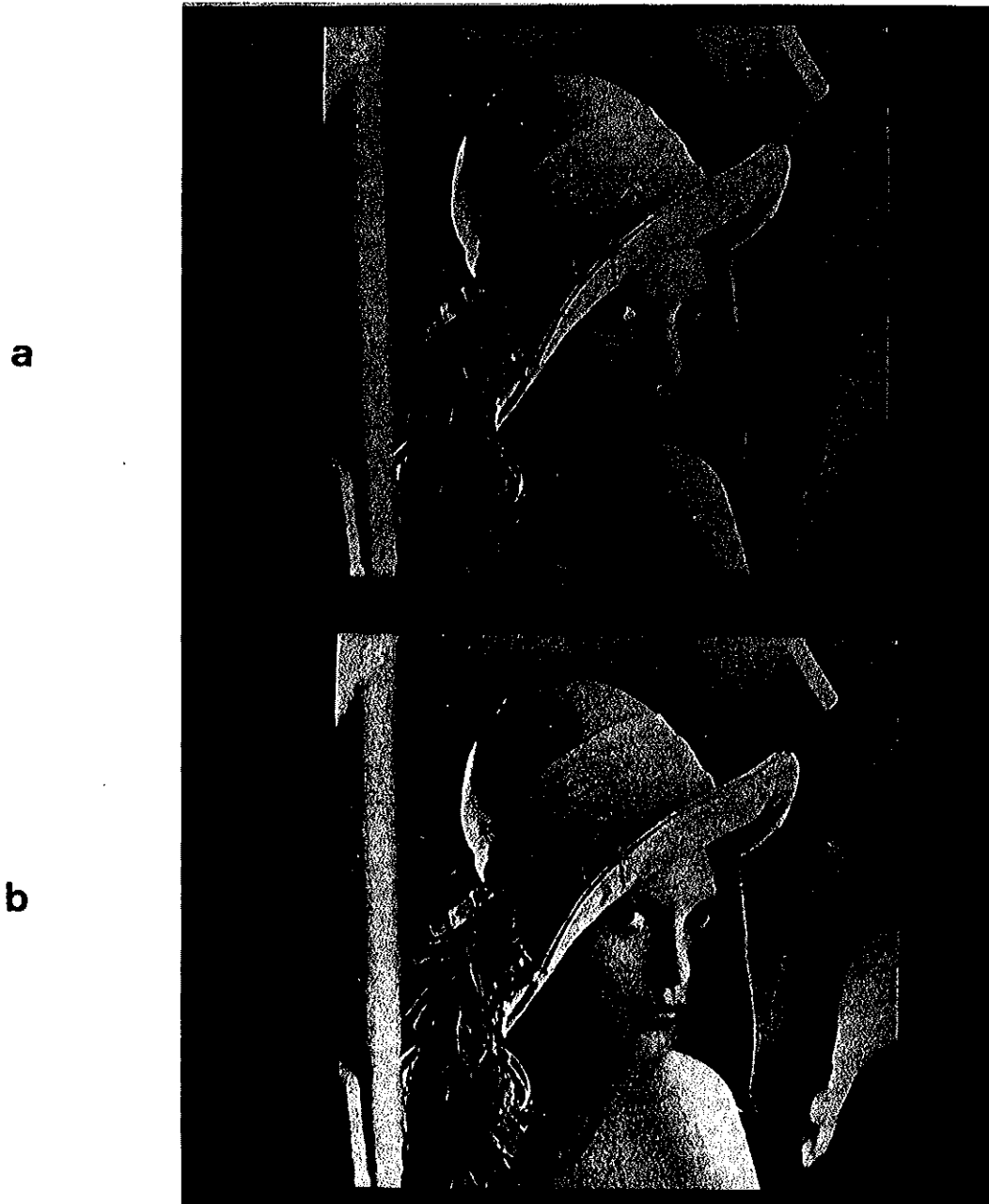


ציור 6.2: (a) תמונה מקורית ("לנה" 512×512 - 8 סיביות)

(b) תמונת ארבע סיביות עם פיזור שגיאה ללא שגיאת קידוד: 0.35 b/p

Fig. 6.2: (a) Original image (Lena 512×512 , 8 bits)

(b) Four-bits (error-diffusion) error-free image: 0.35 b/p



ציור 6.3: (a) תמונת ארבע-סיביות לאחר סינון median: 0.29 b/p

(b) תמונת ארבע-סיביות כאשר מישור הסיבית הפחות משמעותי קודד לאחר פתיחה ב- B : 0.29 b/p

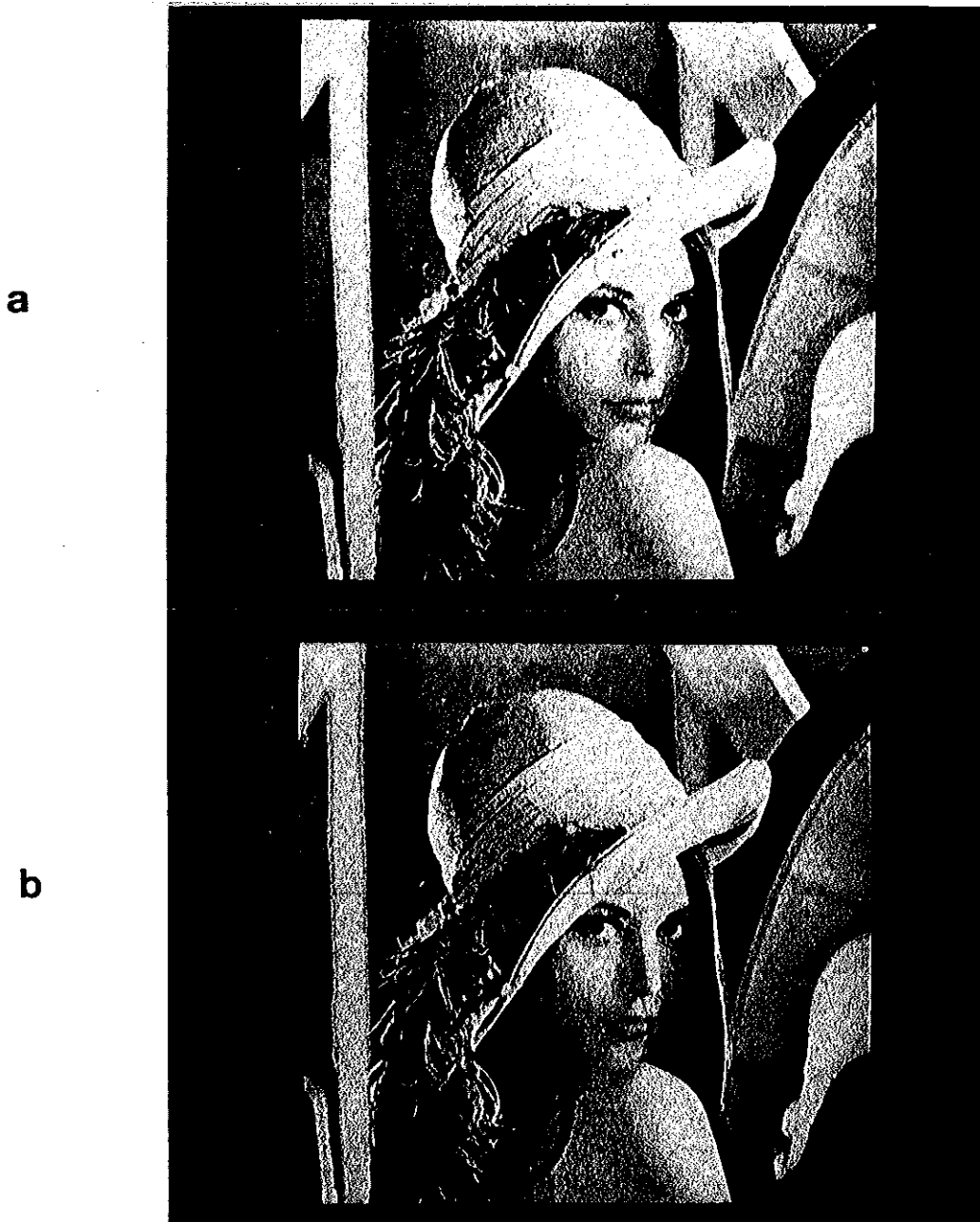
Fig 6.3: (a) Median Filtered Four-bits image: 0.29 b/p

(b) Four-bit image with the least significant bit-plane coded after opening by B : 0.29 b/p



צור 6.4: תמונת שלוש-טיביות המתקבלת מהתמונה המקורית ע"י תהליך של פיזור השגיאה: 0.26 b/p

Fig 6.4: Three-bit image, after the error diffusion process: 0.26 b/p



ציור 6.5: (a) תמונת ארבע-סיביות כאשר מישור הסיבית הפחות משמעותי קודד לאחר פתיחה ב- $4B$

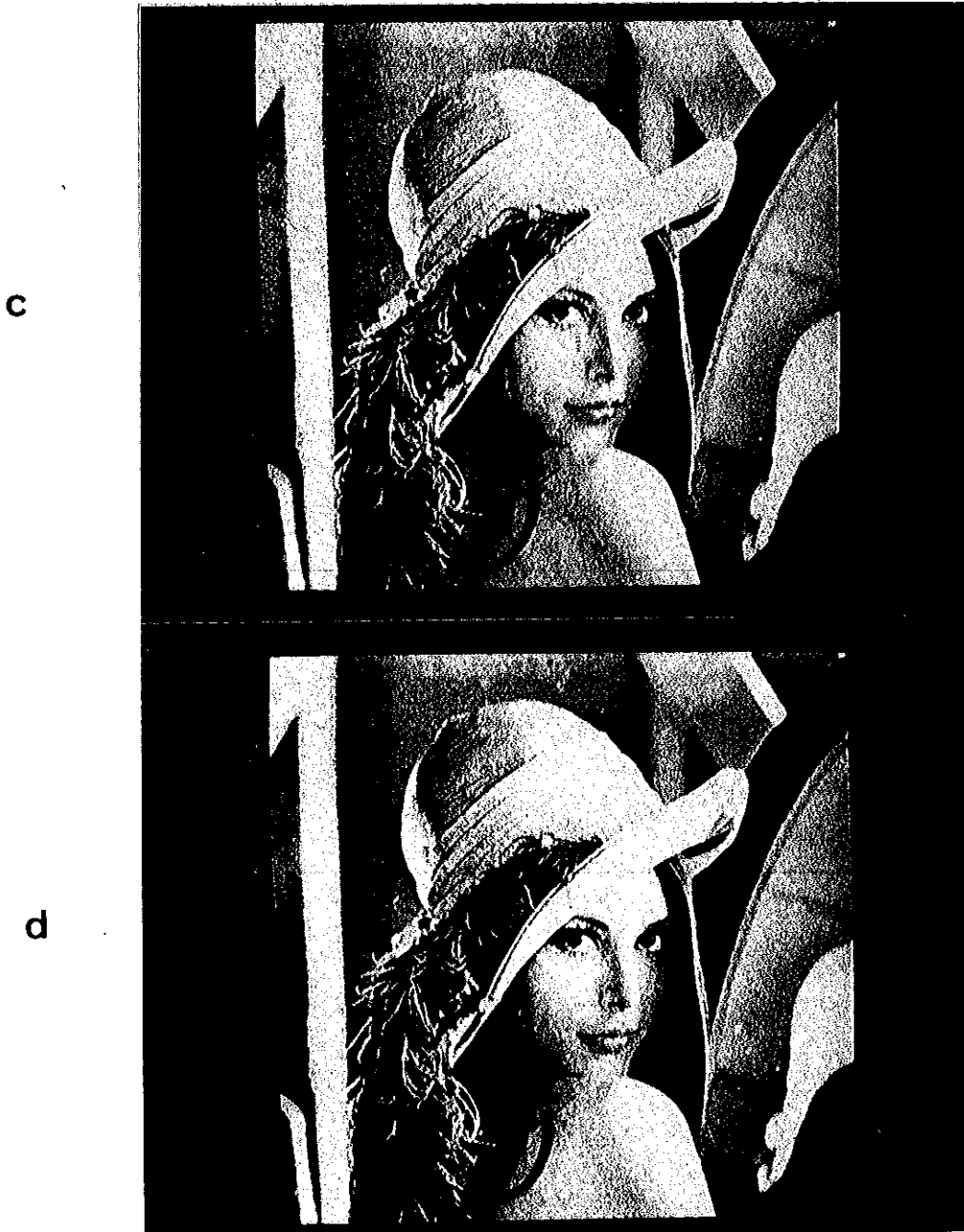
ומישור הסיבית שמעליו קודד לאחר פתיחה ב- $2B$: 0.18 b/p

(b) תמונת ארבע-סיביות כאשר מישור הסיבית הפחות משמעותי קודד לאחר פתיחה ב- $4B$: 0.23 b/p

Fig. 6.5: (a) Four-bits image with the least significant bit-plane coded after opening by $4B$

and the next one coded after opening by $2B$: 0.18 b/p

(b) Four-bits image with the least significant bit-plane coded after opening by $4B$: 0.23 b/p



ציור 6.5 (המשך): (c) תמונת ארבע-סיביות כאשר מישור הסיבית הפחות משמעותי קודד לאחר פתיחה ב- $2B$: 0.25 b/p

(d) המשך של השידור הפרוגרסיבי: כמו ציור 6.3a אבל חלק מהנקודות עם רדיוס אפס

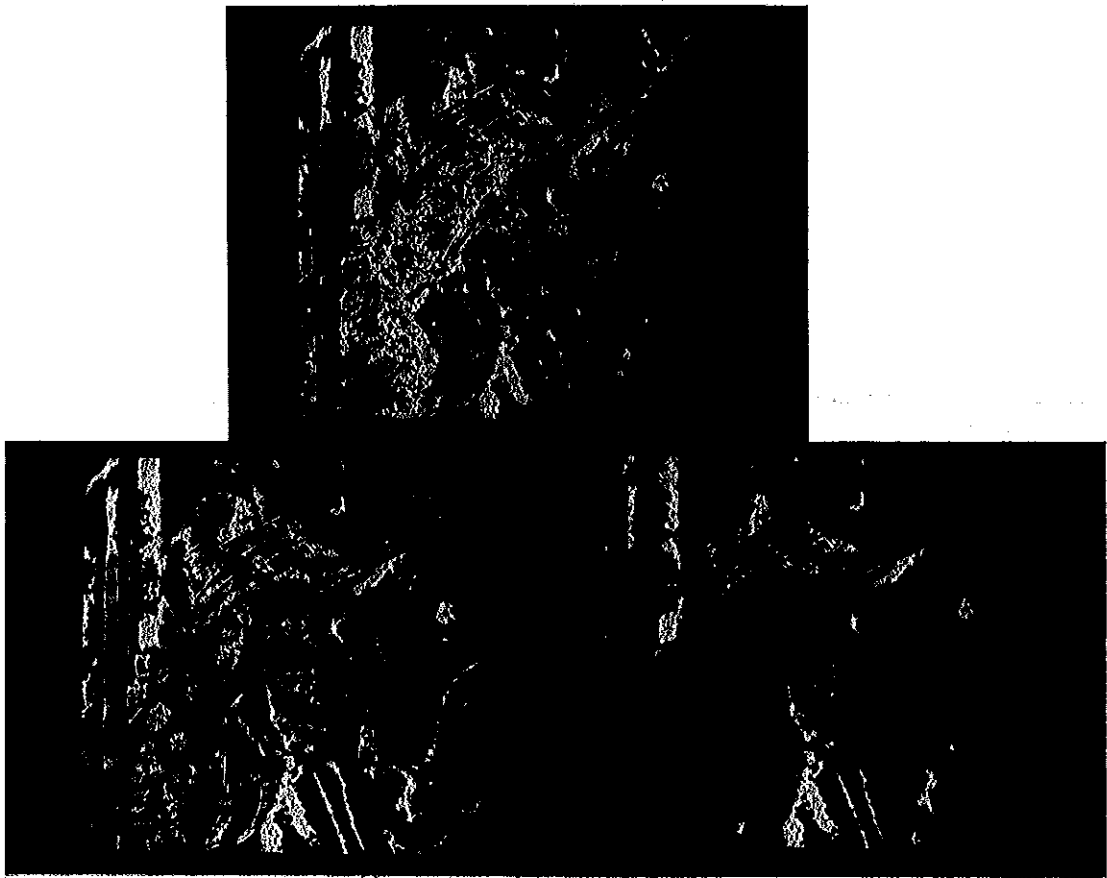
במישור הסיבית הפחות משמעותי הוספו על פי קריטריון סובייקטיבי: 0.30 b/p

Fig. 6.5 (cont.): (c) Four-bits image with the least significant bit-plane coded after opening by $2B$: 0.25 b/p

(d) A new step in the Geometric Progressive Transmission: As Fig. 3.a with some zero radius

skeleton points added according to a subjective criterion: 0.30 b/p

a



c

b

ציור 6.6: (a) נקודות שלד עם רדיוס אפס במישור הסיבית הפחות משמעותי

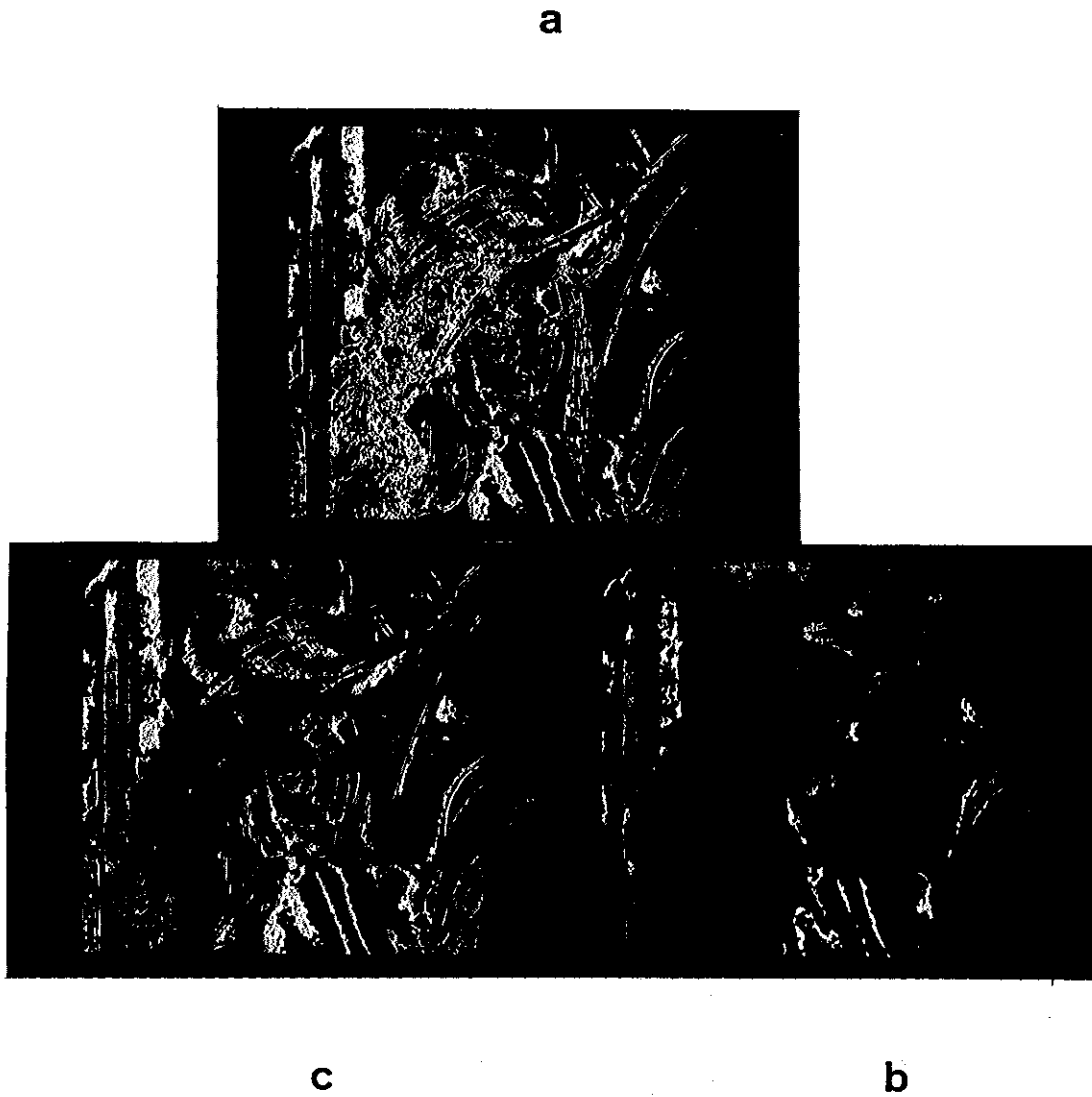
(b) נקודות מתוך הנקודות שבציור 6.6.a עם $DC(\cdot) \leq 0.19$

(c) נקודות מתוך הנקודות שבציור 6.6.a עם $DC(\cdot) \leq 0.39$

Fig 6.6: (a) Zero radius skeleton points in the least significant bit-plane

(b) Points of Fig. 6.6.a with $DC(\cdot) \leq 0.19$

(c) Points of Fig. 6.6.a with $DC(\cdot) \leq 0.39$



ציור 6.7: (a) נקודות שלד עם רדיוס אפס במישור הסיבית הפחות משמעותי

(b) נקודות מתוך הנקודות שבציור 6.7.a עם $AC(\cdot) \leq 0.19$

(c) נקודות מתוך הנקודות שבציור 6.7.a עם $AC(\cdot) \leq 0.39$

Fig 6.7: (a) Zero radius skeleton points in the least significant bit-plane

(b) Points of Fig. 6.7.a with $AC(\cdot) \leq 0.19$

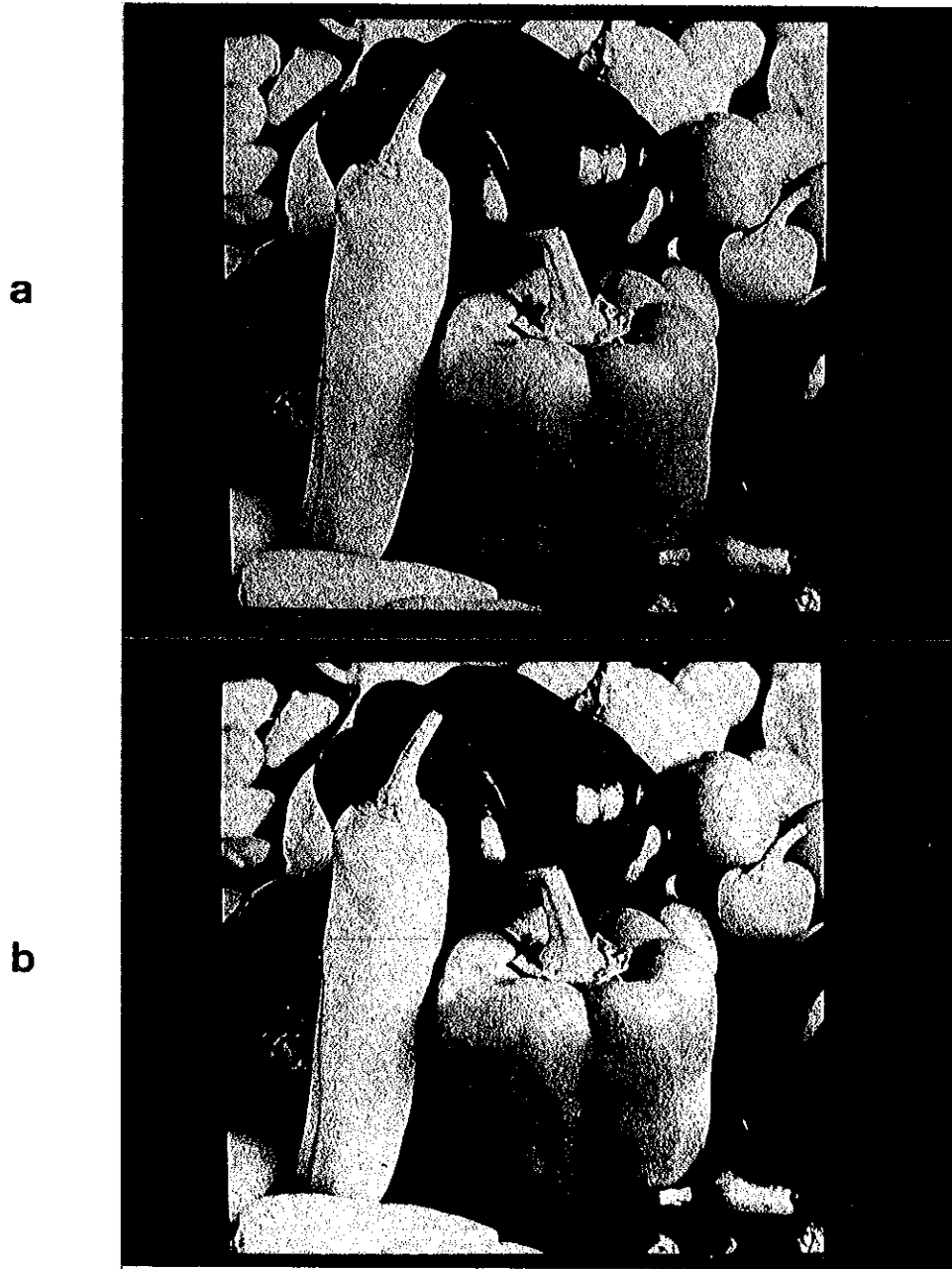
(c) Points of Fig. 6.7.a with $AC(\cdot) \leq 0.39$

6.2 תוצאות עבור התמונה "פלפלים"

תמונה 6.8a מראה את התמונה המקורית (8 סיביות). בתמונה 6.8b ניתן לראות את התמונה "פלפלים" המתקבלת מהפעלת השיטה של פיזור השגיאה שהצגנו בפרק הקודם (מעבר מ-8 סיביות ל-4 סיביות). תמונה זאת קודדה באמצעת השיטה שהצגנו ($RMMS$) בקצב של 0.36 סיביות לתא תמונה (b/p , bits per pixel), ומכונה תמונת "ארבע סיביות ללא שגיאה" ("Four-bit error-free"). אותה תמונה קודדה בשיטה שהוצגה ב-[33] בקצב של 0.41 סיביות לתא תמונה.

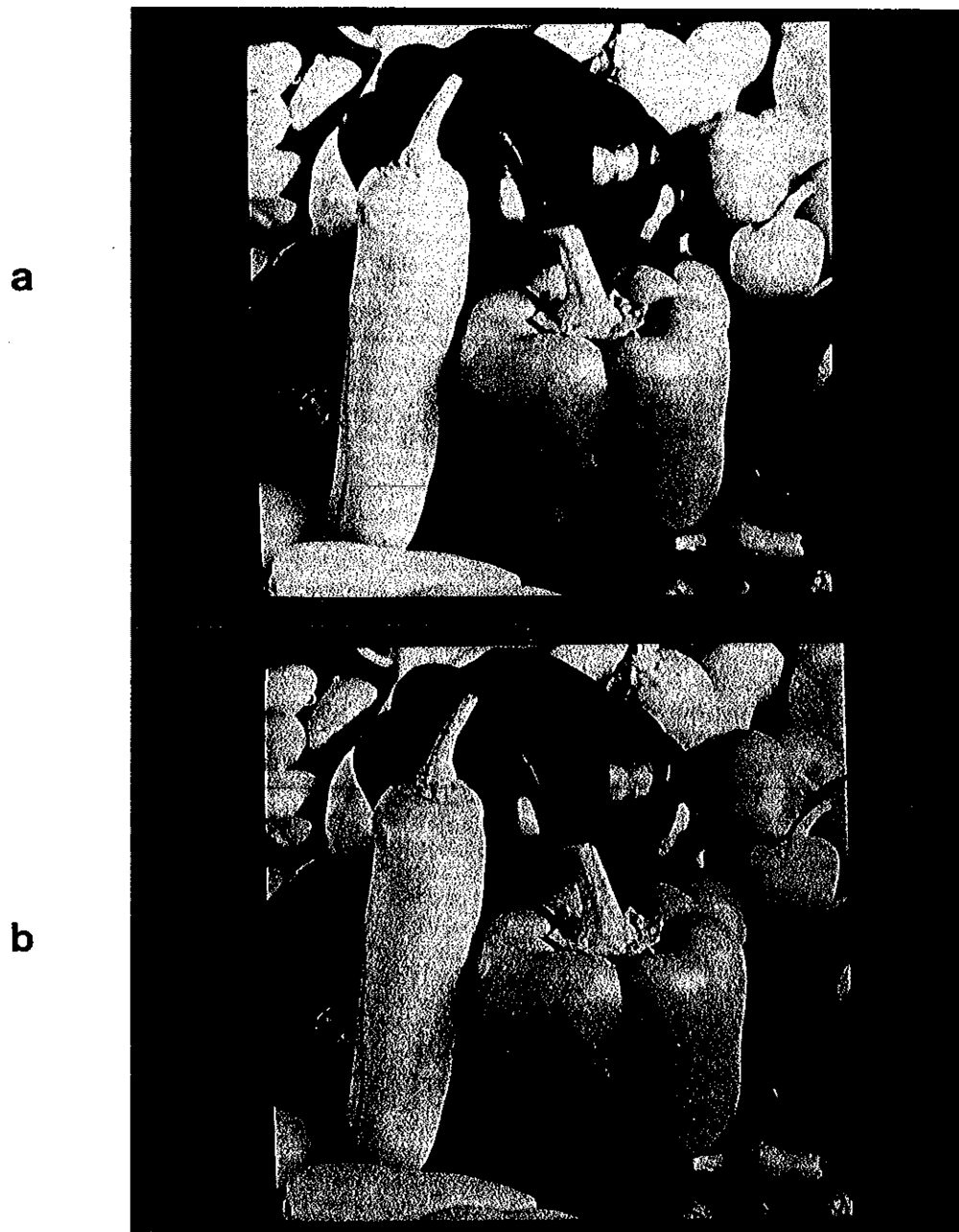
תמונה 6.9a מראה את אותה תמונה, אבל התמונה סוננה עם מסנן median (3×3) לפני התהליך של פיזור השגיאה (מעבר ל-4 סיביות). תמונה זאת קודדה בקצב של 0.29 סיביות לתא תמונה.

בתמונה 6.9b ניתן לראות את השיחזור של תמונה בה מישור הסיבית הפחות משמעותי (מתוך ארבעה מישורי הסיבית שהתקבלו מפיזור השגיאה) קודד ללא נקודות שלד ב"רדיוס אפס" (ז"א המישור קודד לאחר פתיחה ב- B , כאשר B הינו דיבוע 3×3). גם מישור הסיבית וגם המשלים שלו קודדו כך, וה"חורים" מולאו באופן אקראי (ראה פרק קודם). תמונה זו צורכת 0.30 סיביות לתא תמונה (לעומת 0.36 סיביות לתא תמונה בתמונה 6.8b).



צילום 6.8: (a) תמונה מקורית ("פלפלים" 512×512 - 8 סיביות)
(b) תמונת ארבע סיביות (פיזור השגיאה) ללא שגיאה בקידוד: 0.36 b/p

Fig 6.8: (a) Original image (Peppers, 512×512 - 8 bits)
(b) Four-bits (error diffusion) error-free image: 0.36 b/p



ציור 6.9: (a) תמונת ארבע-סיביות לאחר סינון median: 0.29 b/p

(b) תמונת ארבע-סיביות כאשר מישור הסיבית הפחות משמעותי קודד לאחר פתיחה ב- B : 0.30 b/p

Fig 6.9: (a) Median Filtered Four-bits image: 0.29 b/p

(b) Four-bit image with the least significant bit-plane coded after opening by B : 0.30 b/p

פרק 7: סיכום, מסקנות וכווני המשך

7.1 סיכום ומסקנות

בעבודה זו הצגנו אלגוריתם לקידוד תמונות רבות-רמות המשתמש בפעולות מורפולוגיות בינריות בלבד. השיטה מבוססת על ייצוג מורפולוגי יעיל הנגזר משלד מורפולוגי משופר (*Modified Morphological Skeleton*) וממשפט דגימה גאומטרית (*Geometric Sampling Theorem*).

משפט הדגימה הגאומטרית (*GST*) זן בשחזור של השפה של קבוצה במישור הרציף הדו-ממדי (ז"א, ב- R^2) באמצעות תת-קבוצה יחידה של נקודות שלד. קבוצה זו של נקודות, הנקראות נקודות סינגולריות (*singular points*), נמצאה כבעלת חשיבות רבה גם בייצוג של תמונות בינריות בדידות (ז"א, קבוצות ב- Z^2). על בסיס עובדה זו, מוצע אלגוריתם יעיל מאוד להקטנת היתרות בעלדים המורפולוגיים.

הצגנו שלד מורפולוגי משופר לייצוג של תמונות בינריות בדידות. שלד זה מחושב עם איבר תצורה בעל גודל ההולך וגדל. כך קיבלנו הקטנה משמעותית במספר התת-קבוצות של השלד, דבר שהביא להגדלה ביחס הדחיסה.

על בסיס ה-*GST* והשלד המורפולוגי המשופר, פותח אלגוריתם לקידוד של תמונות רבות-רמות. השלבים העקריים באלגוריתם הם: ראשית, התמונה עוברת תהליך של פיזור השגיאה על מנת להוריד את מספר הסיסיות בייצוגה מ-8 ל-4, ללא פגיעה משמעותית באיכות הסוביקטיבית של התמונה. לאחר מכן, מתמרים את ערכי תאי התמונה לקוד Gray כדי לקבל מישורי סיבית אחידים יותר. מישורי הסיבית המתקבלים מייצגים באמצעות השלד המורפולוגי המשופר. היתרות בייצוג זה מוקטנת באמצעות אלגוריתם הנגזר מה-*GST*, וכך מקבלים את כל מישורי הסיבית מייצגים ע"י שלד מורפולוגי משופר ומופחת (*RMMS – Reduced Modified Morphological Skeleton*). השלב האחרון הינו הקידוד של ה-*RMMS* באמצעות שילוב של מקודדי אמטרופיה שהותאם במיוחד לקידוד שלדים.

חשוב לציין שרוב הפעולות הדרושות באלגוריתם המוצע הן פעולות בינריות, וניתן לבצע את חלקן במקביל וחלקן ב-pipeline. תכונות אלו חשובות מאוד למימוש ב-VLSI.

ניתן לראות את שיטת הקידוד שהצגנו, המשיגה יחס דחיסה של כ-1:30, כשלב ראשון בכיון של קידוד תמונות רבות-רמות בשיטות גאומטריות. היא שונה מאוד משיטות אחרות המבוססות על סגמנטציה וצביעה [25, 47], היות ובתמונה המשווהזרת על פי השיטה שהצגנו לא מופיעים כתמים ושפות מלאכותיות. מצאנו כמו כן שהשגיאות המופיעות עקב "קלקולים גאומטריים" הינן קבילות יותר לצופה מאשר השגיאות המופיעות באלגוריתמים הסטנדרטיים של קידוד תמונות (למשל - blocking effects).

בנוסף לנאמר לעיל, הגדרנו מושג חדש ונקרא פילוג אורך השלד (*skeleton length distribution*) ובעזרתו ובעזרת חלק מתכונותיו דננו בשאלה: "כמה משקיעים (בנקודות שלד), לקידוד איזורים שונים בקבוצה?". למקרה הרציף הוצג משפט הנותן סף תחתון על אורך השלד הנשמט ע"י פעולת הפתיחה. למקרה הבדיד הוצגו תוצאות סימולציה.

במהלך העבודה פותח גם אלגוריתם לחישוב ישיר של פעולות מורפולוגיות בסיסיות על קוד השרשרת של תמונות בינריות. האלגוריתם מתבסס על החלפת מזוזות בקוד השרשרת של התמונה המקורית תוך כדי מעבר יחיד עליו.

7.2 בעיות פתוחות וכווני המשך

עבודה זאת מהווה שלב ראשון בכיון של קידוד תמונות רבות-רמות בשיטות גאומטריות. ישנן כמה בעיות פתוחות, חלקן קשורות ישירות עם העבודה וחלקן כלליות יותר בנושא של קידוד גאומטרי. נביא כעת חלק מהן:

1. במקרה של קבוצות במישור הרציף (ז"א, R^2), אנו יודעים לאפיין היטב את השגיאה המתקבלת ע"י השחזור המינימלי, ז"א שחזור בעזרת נקודות סינגולריות בלבד (ראה פרק 4). במקרה הבדיד (ז"א, קבוצות ב- Z^2), מצאנו בסימולציה שהשגיאה הינה קטנה, אבל אנו לא מאפיינים אותה. ניתוח של אותה שגיאה (ראה [12]) יכול לשפר עוד יותר את אלגוריתם החישוב של השלד המינימלי.

2. בפרק 4 הצגנו את ספקטרום הצורה והגדרנו את פילוג אורך השלד. למקרה של קידוד עם שגיאה, חשוב לפתח תורה, המבוססת אולי על שני המדדים הנ"ל, הנותנת מידע על כמות הסיביות הדרושות לקידוד של שטחים שונים של הקבוצה. ז"א, בדומה לפונקצית קצב-עוות (Rate-Distortion Function) המוכרת היטב מתורת האינפורמציה, חשוב לדעת איזה קצב דרוש עבור שגיאה נתונה, או לחילופין, עבור קצב נתון, מה תהיה השגיאה. כאן הקצב יהיה קשור עם כמות נקודות שלד והשגיאה תמדד במתגים גאומטריים. אותה תורה צריכה לענות על שאלות כמו: "כמה ניתן לחסוך בקצב עם במקום לקודד את הצורה X ללא שגיאה, מקודדים את הצורה לאחר פתיחה ב- kB ?", כאשר B הינו איבר תצורה נתון ו- k מספר ממשי או טבעי. במקרה הרציף נתנו תשובה מאוד ראשונית לשאלה זו ע"י חישוב אורך הקטע הנשמט מהשלד לאחר הפעלה של פעולת הפתיחה וע"י תכונות בסיסיות של ספקטרום הצורה ושל פילוג אורך השלד. במקרה הבדיד התייחסנו לשאלה זו גם ע"י פילוג אורך השלד ואף הבאנו תוצאות סימולציה (ראה פרק 6).
3. כאשר חקרנו את נושא הייצוג של ערכי תאי התמונה, חיפשנו טבלה אופטימלית לתירגום מייצוג בינרי לייצוג אחר, וראינו שייצוג Gray הינו הטוב ביותר (ראה סעיף 5.2.1.1). יתכן וייצוגים אחרים, שאינם מבוססים על טבלת תירגום חד-חד ערכית, יביאו לשיפור יחס הדחיסה. למשל, ניתן לבדוק ייצוג בעל יתרות, ז"א, לכל ערך בינרי מתאימים כמה ערכים ובחזרים תמיד את הכדאי ביותר (על פי הסביבה, עם קריטריונים דומים לאלו שהצגנו בפרק 5).
4. ניתן לבדוק שיטות אחרות לקידוד ה- $RMMS$, למשל, קידוד בעזרת קוד שרשרת [4].
5. בעבודה הגדרנו ייצוג מורפולוגי חדש - השלד המורפולוגי המשופר, המתבסס על חישוב השלד עם איבר תצורה בעל גודל משתנה. מציאת שלד המאפשר שינוי גם בצורה של איבר התצורה [49], יכולה לשפר עוד יותר את טיב הייצוג ואת יחס הדחיסה.
6. כהרחבה לנקודה הקודמת, אנו מעונינים בעצם למצוא "בסיס מורפולוגי" (*Morphological Basis*) [36, 46]: נתונה סדרה של איברי תצורה $B(n)$, $\{n = 0, 1, \dots, N\}$, רוצים לייצג את הקבוצה X ע"י:

$$(7.1) \quad X = \bigcup_{(k, n, x)} [kB(n)]_x$$

ז"א, כאיחוד של וריאציות מורחבות ומוזזות של אברי התצורה $B(n)$. הבעיה היא למצוא את הייצוג הטוב ביותר למטרות קידוד (שים לב שהשלד המורפולוגי המשופר הינו מקרה פרטי של ייצוגים מהמשפחה של משוואה 7.1).

7. בסעיף 3.5.2 הצגנו משפחה של ייצוגים מורפולוגים וראינו שכל ייצוג שונה במשפחה נקבע ע"י סידרה של אברי תצורה $B(n)$ וסדרה של התמרות $\chi_n[\cdot]$. ראינו גם שעבור סידרת התמרות מסוימת (ראה משוואה (3.44)), מתקבלים ייצוגים בעלי תכונות של שלד (ז"א, אוסף של אברי תצורה מירביים). כפי שהוסבר, גם השלד המשופר וגם השלד הרגיל שייכים לאותה משפחה של שלדים המתקבלים עבור סידרת התמרות זו. ראינו שבעזרת השלד המשופר מתקבלות תוצאות דחיסה טובות יותר מאשר בעזרת השלד הרגיל, אבל הקביעה של סדרת אברי תצורה אופטימלית למטרות קידוד, עבור אותה סידרת התמרות, הינה בעיה פתוחה.

8. ניתן גם לחקור כיוויים אחרים של שפת הקבוצה, למשל ע"י מעגלים בעלי רדיוס שווה לרדיוס העקמומיות. גם כאן יש מקום לחקור את השיטה עבור קידוד ללא שגיאה ועבור קידוד עם עוותים גאומטריים בשפה.

9. כפי שראינו בפרק 5, על מנת לאפשר הקטנת מספר הסיביות לייצוג התמונה השתמשנו בתהליך של פיזור השגיאה. יש לחקור את האפשרות לשחזור של התמונה מקורית מתוך אותה תמונה המתקבלת לאחר הפעלת התהליך, וכך יהיה אפשרי לשפר עוד יותר את האיכות הסוביקטיבית של התמונה המשוחזרת (שים לב שבמקרים של Halftoning מטריצי, כבר נחקרה האפשרות לשחזור [5]).

10. בפרקים 5 ו-6 הוצגה דרך לקביעת החשיבות הסוביקטיבית של נקודות שונות בשלד. עבור שימושים של קידוד עם שגיאה, יש לשפר את טיב המדדים בהם השתמשנו, אולי ע"י חישוב של חשיבות האזורים השונים בתמונה ישירות מהתמונה רבת-רמות (למשל, ע"י חלוקה של האזורים השונים בתמונה למחלקות: שפה, מרקם, רמת אפור קבועה).

11. בעבודה זו חקרנו את השימוש בשלד המורפולוגי של תמונות בינריות לקידוד של מישורי סיביות. כפי שצינו בפרק 3, ניתן גם להגדיר את השלד המורפולוגי של תמונות רבות-רמות (או באופן כללי, עבור מרחבים אוקלידיים N -ממדיים, N כלשהו). לא קיימות בספרות עבודות החוקרות את השימוש של השלד הרב-ממדי למטרות קידוד של תמונות רבות-רמות. קידוד של תמונות רבות-

רמות בעזרת שלד יאפשר, בין היתר, להכניס שגיאות גאומטריות בצורה טבעית יותר מאשר הגישה בה אנו בחרנו (ייצוג ע"י מישורי הסיביות). מעניין גם באותו הקשר לחקור את התכונות של הנקודות הסינגולריות בשלד הרב-ממדי, ואת האפשרויות להרחבות בדומה לשלד המורפולוגי המשופר.

נספח א - תכונות נוספות של מורפולוגיה בינרית

בנספח זה מובאות תכונות נוספות של מורפולוגיה בינרית המשלימות את אוסף התכונות שהוצגו בפרק 2. את ההוכחות המתאימות ניתן למצוא ב-[14, 17, 40, 57]. להלן, A, B, C, D ו- K הינן קבוצות ב- E^N .

תסנה A.1:

בפעולת ההרחבה, הזזות מתאימות בתמונה ובאיבר התצורה מתבטלות.

$$(A.1) \quad A_x \oplus B_{-x} = A \oplus B$$

תסנה A.2:

פעולת ההרחבה הינה גדלה (increasing).

$$(A.2) \quad \text{if } A \subseteq B \text{ then } A \oplus D \subseteq B \oplus D$$

תסנה A.3:

$$(A.3) \quad (A \cap B) \oplus C \subseteq (A \oplus C) \cap (B \oplus C)$$

תסנה A.4:

ניתן להחליף בין סדר ההפעלה של פעולות ההרחבה והאחוד.

$$(A.4) \quad (A \cup B) \oplus C = (A \oplus C) \cup (B \oplus C)$$

תסנה A.5:

פעולת הכרסום הינה בלתי-מרחיבה (anti-extensive) אם ורק אם איבר התצורה מכיל את הראשית.

$$(A.5) \quad \text{If and only if } 0 \in B \text{ then } A \ominus B \subseteq A$$

תסנה A.6:

$$(A.6) \quad A \ominus B_x = (A \ominus B)_{-x}$$

תסנה A.7:

פעולת הכרסום הינה גדלה (increasing).

$$(A.7) \quad A \subseteq B \text{ implies } A \ominus K \subseteq B \ominus K$$

תסנה A.8:

$$(A.8) \quad A \supseteq B \text{ implies } D \ominus A \subseteq D \ominus B$$

תסנה A.9:

$$(A.9) \quad (A \cap B) \ominus K = (A \ominus K) \cap (B \ominus K)$$

תסנה A.10:

$$(A.10) \quad (A \cup B) \ominus K \supseteq (A \ominus K) \cup (B \ominus K)$$

תסנה A.11:

$$(A.11) \quad A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C)$$

תסנה A.12:

$$(A.12) \quad A \ominus (B \cap C) \supseteq (A \ominus B) \cup (A \ominus C)$$

תסנה A.13:

$$(A.13) \quad A \oplus (B \ominus C) \subseteq (A \oplus B) \ominus C$$

תכונה A.14:

תכונה זאת מראה שבניגוד למשוואות אלגבריות, לא ניתן לצמצם במשוואות מורפולוגיות. כל מה שניתן להגיד הוא:

$$(A.14) \quad A \subseteq B \ominus C \text{ if and only if } B \supseteq A \oplus C$$

אבל אין טענה דואלית עבור שוויון.

תכונה A.15:

$$(A.15) \quad A \oplus K = (A \oplus K) \circ K = (A \otimes K) \oplus K$$

תכונה A.16:

$$(A.16) \quad A \ominus K = (A \circ K) \ominus K = (A \ominus K) \otimes K$$

נספח ב - מורפולוגיה רבת-רמות

ניתן להרחיב את הפעולות המורפולוגיות שהצגנו בפרק 2 למקרה של מורפולוגיה רבת-רמות (multilevel morphology) בעזרת פעולות מקסימום-מינימום ($max-min$) [45, 43] או ע"י שימוש בעקרונות של fuzzy logic [15, 22]. ההרחבה, כפי שהוצגה ע"י Sternberg [62] שומרת על כל התכונות שהוצגו עבור מורפולוגיה בינרית. נביא כעת את ההגדרות עבור מורפולוגיה רבת-רמות בעזרת עקרונות ה-*umbra* והמשטח העליון (*top surface*) ולאחר מכן נראה את השימוש בפעולות מקסימום-מינימום כתכונות הנובעות ישירות מההגדרות [14, 17, 62]. נציג כמו כן כמה תכונות בטיסיות של *umbra* ומשטח עליון המהוות את הבסיס להוכחה שהתכונות של מורפולוגיה רבת-רמות הן אותן תכונות כמו של המורפולוגיה הבינרית.

B.1 הגדרות במורפולוגיה רבת-רמות

משטח עליון (top surface):

יהיה $A \subseteq E^N$ ו- $F = \{x \in E^{N-1} \mid \text{for some } y \in E, (x, y) \in A\}$. המשטח עליון של A , המסומן ב- $T[A] : F \rightarrow E$, מוגדר ע"י:

$$(B.1) \quad T[A](x) = \max \{y \mid (x, y) \in A\}$$

umbra:

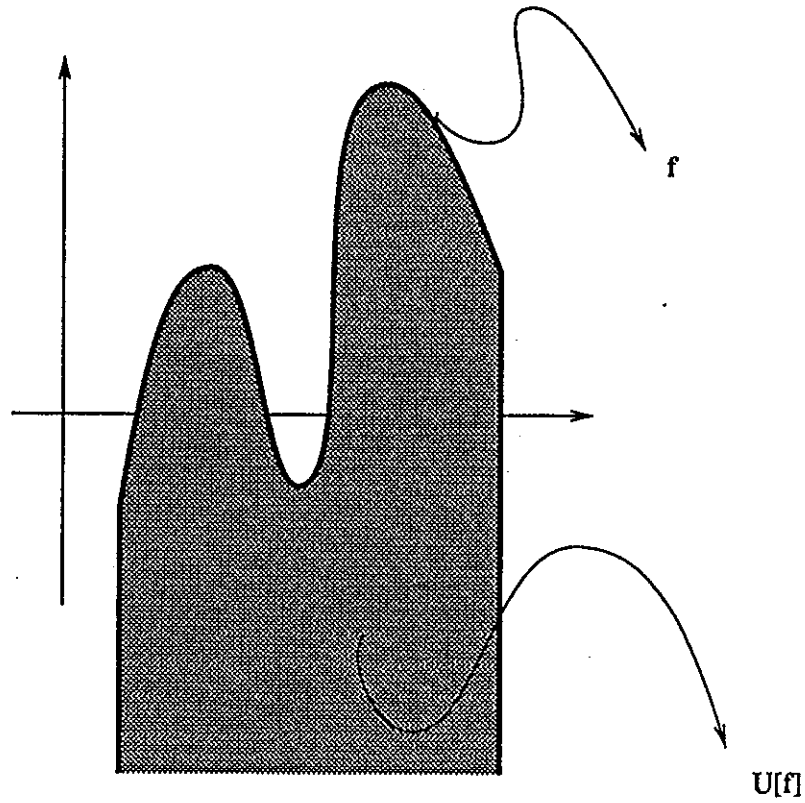
קבוצה $A \in E^{N-1} \times E$ הינה *umbra* אם ורק אם העובדה ש $(x, y) \in A$ גורמת לכך ש $(x, z) \in A$ לכל $z \leq y$.

umbra של אות:

יהיה $F \subseteq E^{N-1}$ ו- $f : F \rightarrow E$ ה-*umbra* של f מסומן ב- $U[f] \subseteq F \times E$, ומוגדר ע"י:

$$(B.2) \quad U[f] = \{(x, y) \in F \times E \mid y \leq f(x)\}$$

ברור שה-*umbra* של אות f הינו הוא בעצמו *umbra* (ראה ציור B.1).



ציור B.1 : דוגמא של umbra של אות

Figure B.1: Example of umbra of a signal

נסמן ב- F ו- K קבוצות ב- E^{N-1} . $f : F \rightarrow E$, $k : K \rightarrow E$.

מכאן, הפעולות במודרפולוגיה רב-רמות מזגורות באופן הבא:

הרחבה (dilation):

ההרחבה $f \oplus k : F \oplus K \rightarrow E$ מזגורת ע"י:

$$(B.3) \quad f \oplus k = T[U[f] \oplus U[k]]$$

כאשר הרחבה בין umbras הינה הרחבה בתרית.

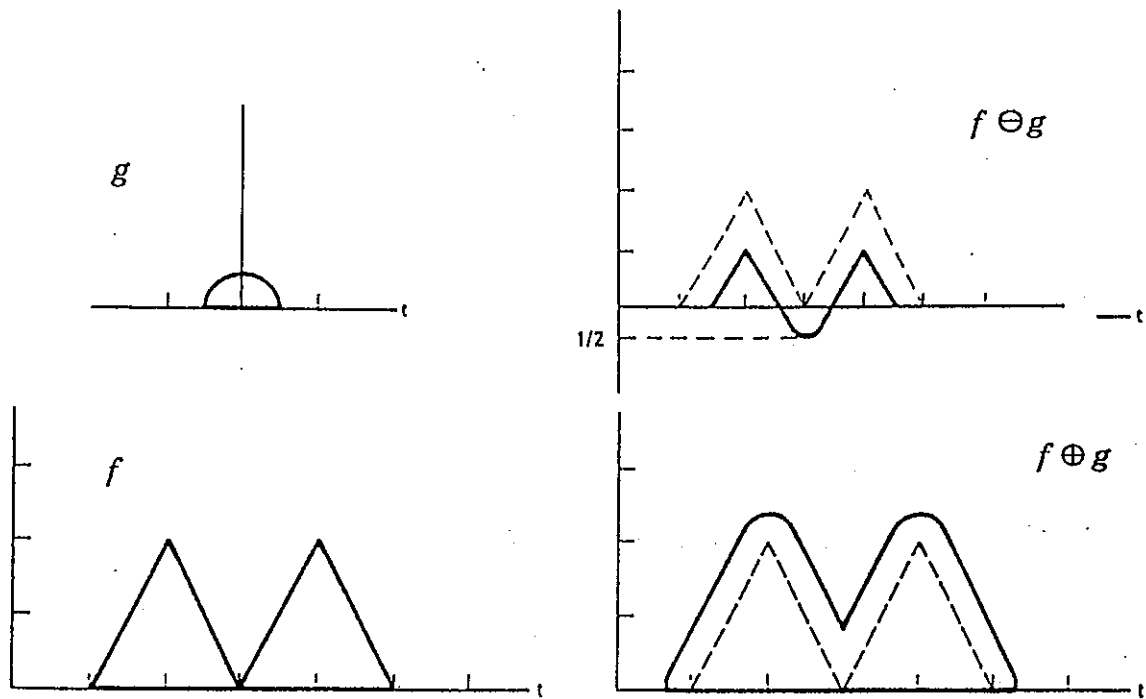
כרסום (erosion):

הכרסום $f \ominus k : F \ominus K \rightarrow E$ מוגדר ע"י:

(B.4)
$$f \ominus k = T[U[f] \ominus U[k]]$$

כאשר הכרסום בין umbras הינו כרסום בינרי.

ראה ציור B.2 עבור דוגמאות של הפעולות הנ"ל באותות חד ממדיים.



ציור B.2: הרחבה וכרסום של אותות רבי-רמות

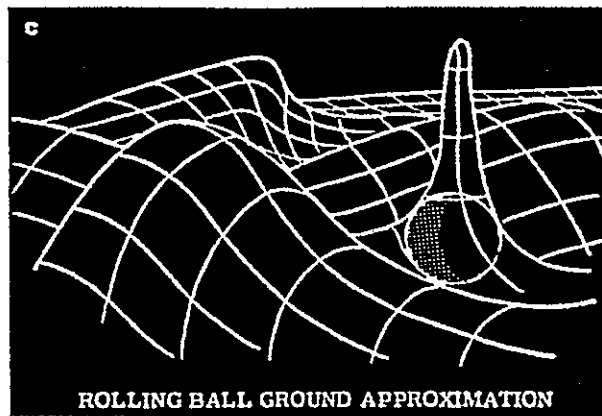
Figure B.2: Dilation and erosion of multilevel signals

פתיחת (opening):

פתיחה רבת-רמות מזגדרת ע"י:

$$(B.5) \quad f \circ k = (f \ominus k) \oplus k$$

ציור B.3 ממחיש את המובן הגאומטרי של פעולת פתיחה רבת-רמות: ניתן לראות את פעולת הפתיחה ככדור המתגלגל בצמוד למשטח, ומוחק כל מקום בו אינו מצליח להכנס (ז"א, כל מקום בו המשטח צר יותר מהכדור).



ציור B.3: פתיחה בשיטת הכדור המתגלגל

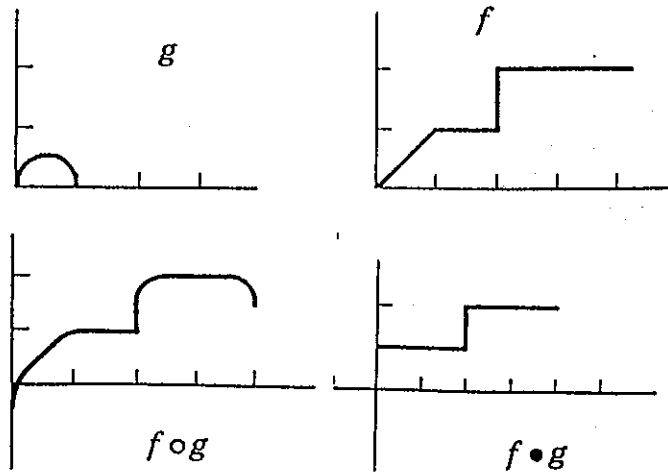
Figure B.3: Opening via the rolling ball technique

סגירה (closing):

סגירה רבת-רמות מזגדרת ע"י:

$$(B.6) \quad f \oplus k = (f \oplus k) \ominus k$$

ציור B.4 מדגים את פעולת הפתיחה והסגירה עבור אותות רבי-רמות.



ציור B.4: פתיחה וסגירה של אותות רבי-רמות

Figure B.4: Opening and closing of multilevel signals

שיקוף (reflection):

השיקוף של $f : F \rightarrow E$ מסומן ב $f' : F' \rightarrow E$ ומוגדר ע"י:

$$(B.7) \quad f'(x) = f(-x)$$

בהגדרות שלעיל, k נקרא איבר תצורה רב-רמות (*multilevel structuring element*).

B.2 תכונות של מורפולוגיה רבת-רמות

תפינה B.1:

$$(B.8) \quad (f \oplus k)(x) = \max_{z \in K, x-z \in F} \{f(x-z) + k(z)\}$$

תכונה זו (המקשרת בין הרחבה רבת-רמות ופעולת המקסימום) נובעת ישירות מההגדרה של הרחבה

רבת-רמות. ניתן לבחור בתכונה כהגדרה עצמה של פעולת הרחבה רבת-רמות וממנה להוכיח את הקשרים בין umbra, משטח עליון והרחבה.

תכונה B.2:

$$(B.9) \quad (f \ominus k)(x) = \min_{z \in K, x+z \in F} \{f(x+z) - k(z)\}$$

תכונה זו מראה את הקשר בין כרטום רב-רמות ופעולת המינימום.

תכונה B.3:

$$(B.10) \quad T[U[f]] = f$$

תכונה B.4:

$$(B.11) \quad U[T[U[f]]] = U[f]$$

תכונה B.5:

$$(B.12) \quad A \subseteq U[T[A]]$$

תכונה B.6:

$$(B.13) \quad \text{If } A \text{ is an umbra, then } A = U[T[A]]$$

תכונה B.7:

$$(B.14) \quad A, B \text{ umbras, then } A \oplus B, A \ominus B \text{ umbras}$$

תכונה B.8:

$$(B.15) \quad U[f \oplus k] = U[f] \oplus U[k]$$

תכונה B.9:

$$(B.16) \quad U[f \ominus k] = U[f] \ominus U[k]$$

תפסנה B.10:

$$(B.17) \quad \text{if } f \leq g \text{ then } U[f] \subseteq U[g]$$

תפסנה B.11:

$$(B.18) \quad \text{if } A \subseteq B \text{ then } T[A](x) \leq T[B](x)$$

תפסנה B.12:

תכונה זו מראה את הדואליות בין פעולת הרחבה רבת-רמות ופעולת כרסום רב-רמות:

$$(B.19) \quad -(f \oplus k)(x) = ((-f) \ominus k')(x)$$

בעזרת התכונות הנ"ל, ניתן להראות שכל התכונות שציינו עבור מורפולוגיה בינרית, מתקיימות במורפולוגיה רבת-רמות גם כן (עם אותם הפרושים הגאומטריים).

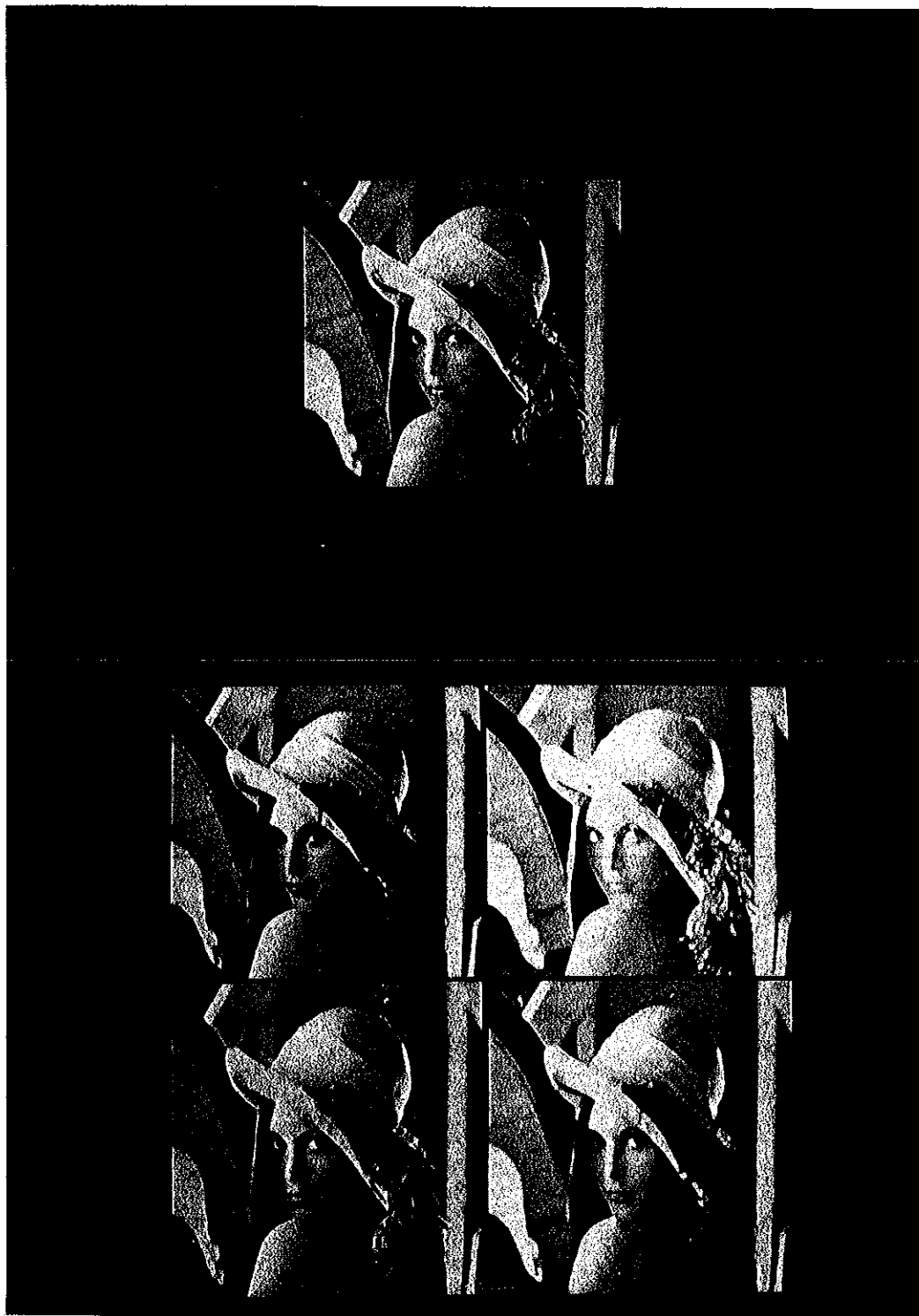
B.3 מורפולוגיה רבת-רמות עם איבר תצורה בינרי

קיים מקרה פרטי של מורפולוגיה רבת-רמות, בו איבר התצורה מוגבל לשני ערכים. במקרה זה, ניתן להגדיר הרחבה וכרסום כדלקמן:

$$(B.20) \quad (f \oplus B)(x) = \max\{f(x-z) : x-z \in F, z \in B\}$$

$$(B.21) \quad (f \ominus B)(x) = \max\{f(x+z) : x+z \in F, z \in B\}$$

כאשר f אמת רב-רמות ו- B איבר תצורה בינרי (כפי שהוגדרו בסעיפים קודמים). ראה ציור B.5 (דוגמא של הפעולות הנ"ל בתמונות).



ציור B.5: פעולות מורפולוגיות על תמונות בעלות רמת אפור עם איבר תצורה בינרי:

(a) מקור, (b) הרחבה, (c) כרסום, (d) פתיחה, (e) סגירה

Figure B.5: Morphological operations on gray-level images with binary structuring element:

(a) Original, (b) Dilation, (c) Erosion, (d) Opening, (e) Closing

B.4 פרוק של מורפולוגיה רבת-רמות למורפולוגיה בינרית

הפעולות המורפולוגיות $f \oplus B$ ו- $f \ominus B$ (כמו כן $f \circ B$ ו- $f \otimes B$) הן חילופיות עם פעולת סף (threshold commutative) [35, 57]; ז"א $t_a[\psi(f)] = \psi[t_a(f)]$, כאשר $\psi(\cdot)$ מסמל אחת מהפעולות הנ"ל ו- $t_a(\cdot)$ מסמל את פעולת הסף (עם סף a). Ziff ו-Maragos [35] השתמשו בתוצאה זאת כדי להוכיח שאלגוריתמים שונים במורפולוגיה רבת-רמות (כגון חישוב שלד, גילוי שפות, וכו') ניתנים למימוש על בסיס של פעולות מורפולוגיות בינריות בלבד.

לאחרונה, Shih ו-Mitchell [59] הוכיחו שגם במקרה של איבר תצורה רב-רמות, ניתן לממש פעולות מורפולוגיות רבות-רמות בעזרת פעולות מורפולוגיות בינריות בלבד (העובדה מתבססת על פירוק גם של האות וגם של איבר התצורה לאוסף של אותות בינריים בעזרת הפעלת ספים משתנים).

היתרון בפרוק מורפולוגיה רבת-רמות לבינרית בעזרת סף נובע מהאפשרות להשתמש במערכות VLSI קיימות לפעולות בינריות עבור פעולות רבות-רמות. החיסרון הוא בכך שבתמונות אמיתיות (בהן מספר רמות האפור גדול), הפרוק לתמונות בינריות בעזרת סף יתן מספר גדול מאוד של רכיבים. הגישה שאנו מציגים בעבודה זו (עבודה במישורי סיבית-bit planes) פותרת חלקית בעיה זו (מספר הרכיבים קטן יותר, אבל הפעולות המורפולוגיות אינן חילופיות עם הפרוק למישורי סיביות).

Appendix C

The following are the proofs of the theorems stated in chapter 4:

Lemma 4.1:

All singular points are in $\Psi_m(X)$.

Proof:

This is a direct consequence from the definitions of the skeleton and the singular points, since the maximal disk corresponding to a singular point contributes at least one point which is not included in any other maximal disk in X .

Hence, we conclude that $S(X) \subseteq \Psi_m(X)$.

□

Theorem 4.1:

$x \in X$ is a *boundary singular point* if and only if x is a singular point.

Proof:

⇒ From the definitions, if x is boundary singular, then x is singular.

⇐ Given a singular point x , we have to prove that x is boundary singular:

For all $z \in \Psi(X)$, $D(z, \rho_z) \cap \partial X \neq \emptyset$ (see marked points in Figure C.1). If $D(z, \rho_z)$, with $z \in \Psi(X)$ and $\rho_z > 0$, touches ∂X only at points with *not* well defined curvature, i.e., $D(z, \rho_z) \cap \partial X \subseteq \xi(X)$; then z can not be a singular point (all the points of its maximal disk are covered by more than one

maximal disk). Therefore, for any singular point $x \in \Psi(X)$, its corresponding maximal disk $D(x, \rho_x)$ touches the object boundary at least at one point a_x (see Figure C.2), such that $a_x \in D(x, \rho_x) \cap \partial X$ and $a_x \in \partial X \setminus \xi(X)$. If we prove that $D(x, \rho_x)$ is the only maximal disk which contributes to a_x , then x is also a boundary singular point.

Let's prove now that $D(x, \rho_x)$ is the only maximal disk which touches ∂X at a_x , when $\kappa(a_x)$ is well defined. We have to show that there is no other $y \in \Psi(X)$, $x \neq y$, such that $a_x \in D(y, \rho_y) \cap \partial X$. Suppose such a y does exist. Since the curvature $\kappa(a_x)$ is well defined, then both $D(x, \rho_x)$ and $D(y, \rho_y)$ are tangent to ∂X at a_x ; and $x, y \in N_{a_x}$, where N_p stands for the normal to ∂X at a point $p \in \partial X$ with $\kappa(p)$ well defined. This means that $D(x, \rho_x)$ and $D(y, \rho_y)$ are nested disks (see Figure C.2), a contradiction to the hypothesis that they are maximal disks ($x, y \in \Psi(X)$). Then, $D(x, \rho_x)$ is the only maximal disk which contains $a_x \in \partial X$, and x is a boundary singular point.

□

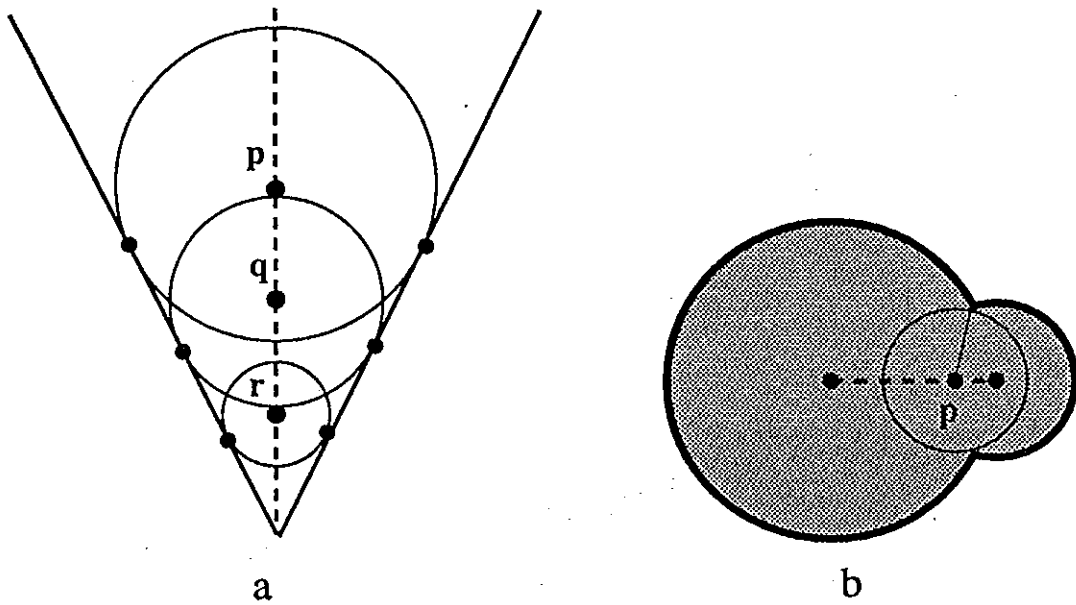


Fig. C.1: Different types of skeleton points and the tangent points of their maximal disks with the boundary:

C.1a: Maximal disks corresponding to singular points (p, q, r).

C.1b: Maximal disk of a non singular point (p).

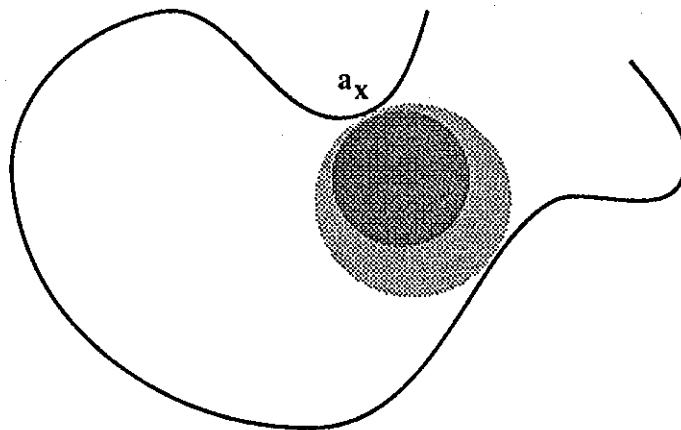


Fig. C.2: Nested circles. Only the outer one corresponds to a maximal disk.

Theorem 4.2 - The Geometric Sampling Theorem:

- a) X^* covers all the X boundary (∂X), except for a finite number of points.
- b) The subset of $S(X)$ containing singular points with corresponding radii $r \geq \rho$, is sufficient for the reconstruction of all of Y_ρ boundary, except for a finite number of points (these points are the same as in the first part of the theorem).

Proof:

- a) Any boundary point $a_x \in \partial X$ belongs at least to one maximal disk $D(x, \rho_x)$ (eqn. (6)), $x \in \Psi(X)$. In the proof of Thm. 1 we showed that if $\kappa(a_x)$ is well defined, then x is a singular point (or a boundary singular point). Therefore, X^* covers at least all the boundary points with well defined curvature, i.e., $\partial X \setminus \xi(X)$, and the number of uncovered points is at most $\#\xi(X) < \infty$.

For coverage of the uncovered points (a subset of $\xi(X)$), we have to add to the reconstruction set, skeleton points with corresponding maximal disks touching ∂X just at points in $\xi(X)$. Each one of these maximal disks touches ∂X at least at two points, therefore the number of skeleton points that must be added is less than or equal to $[\#\xi(X)]/2$.

- b) This is a direct consequence from the first part of the theorem and from the fact that $Y_\rho = \bigcup_{\psi \in \Psi(X), \rho_\psi \geq \rho} D(\psi, \rho_\psi)$ [40, 57, 58].

□

Theorem 4.3:

If $Y_\rho \neq Y_{\rho+r}$ and $\Psi(Y_\rho)$ does not contain isolated points, then $L[\Psi(Y_\rho)] - L[\Psi(Y_{\rho+r})] \geq r$, where $L(\cdot)$ stands for arc length.

Proof:

If we define $\sigma_P(p)$ as the Euclidian distance of a point p in a set $P \subset R^2$ to the set boundary ∂P , then $\sigma_P(\cdot)$ is a Lipschitz function [58, Ch. 11], i.e. $|\sigma_P(p) - \sigma_P(q)| \leq d(p, q)$, $\forall p, q \in P$ ($d(\cdot, \cdot)$ is the Euclidian distance in R^2). In the case that p, q are skeleton points, i.e. $p, q \in \Psi(P)$, $|\sigma_P(p) - \sigma_P(q)| < d(p, q)$ [58, Ch. 11].

Let y be one of the skeleton points of Y_ρ , $y \in \Psi(Y_\rho)$, with correspondent skeleton radius ρ (such a point exists from the hypothesis and eqns. (3.5) and (3.15), i.e. $\sigma_{Y_\rho}(y) = \rho$). Travel from y a distance r through the skeleton in a given direction (if this is not possible, the skeleton length is less than $2r$, which is not an important case). Call this arc Δ ($\Delta \subseteq \Psi(Y_\rho)$). For any point $z \in \Delta$, we have ($\sigma_{Y_\rho}(z) \geq \rho$)

$$\sigma_{Y_\rho}(z) - \sigma_{Y_\rho}(y) < d(y, z) \leq r$$

then

$$\sigma_{Y_\rho}(z) < \sigma_{Y_\rho}(y) + r = \rho + r$$

and therefore, z is eliminated when opening with the element $(\rho+r)U$ (all skeleton points with radius less than $\rho+r$ are eliminated, see eqns. (3.14)-(3.16)). Hence, the whole segment Δ , of length $L(\Delta) = r$, is eliminated.

□

Theorem 4.4:

If $\Psi(X \circ rU)$, $0 \leq r \leq \rho$, does not contain isolated points and $L(\Psi(X)) > 0$, then

$$X = X \circ \rho U \Leftrightarrow \Lambda_X(r) = 0, \quad \forall 0 \leq r \leq \rho$$

Proof:

\Rightarrow Since $X = X \circ \rho B$, then $X \circ \mu B = X \circ (\mu + dr)B$, $\mu + dr \leq \rho$ (see Ch. 2 and [57, pp. 53-54]).

If the set does not change, neither are the skeleton and its length. Therefore,

$$\Lambda_X(r) = 0, \quad \forall 0 \leq r \leq \rho.$$

\Leftarrow We see from eqn. (3.14) - (3.16) that when opening X , we eliminate skeleton points, therefore the length can only be reduced. Suppose that $X = X \circ \mu B$ and $X \neq X \circ (\mu + dr)B$ ($\mu + dr < \rho$). If the skeleton length does not change when opening with $(\mu + dr)B$, that means that we just eliminate isolated points, not segments, but this is a contradiction even to the Theorem 4.3 (segments are eliminated), or to the theorem assumptions (the skeleton does not contain isolated points). Therefore, if there is no change in the skeleton length, $X = X \circ (\mu + dr)B$.

□

Theorem 4.5:

If X and B are convex sets, then:

$$X = X \circ_k B \Leftrightarrow \Lambda_X(n, B) = 0, \quad \forall 0 \leq n \leq k$$

Proof:

\Leftarrow If $\Lambda_X(n, B) = 0$, then $S_n^B(X) = \emptyset$. Therefore, $X \circ_n B = X \circ_{(n+1)} B$, and hence $X = X \circ_n B$ for all $0 \leq n \leq k$.

\Rightarrow Maragos [33] proved that generally, $X \circ_n B = X \circ_{(n+1)} B$ guarantees that $S_n^B(X) = \emptyset$ if and only if X and B are convex sets. Therefore, if X and B are convex sets, the proposition is true ($\text{Card}[\emptyset] = 0$).

If we deal with minimal skeletons, the fact that $X \circ_n B = X \circ_{(n+1)} B$ guarantees that $S_n^B(X) = \emptyset$ (otherwise, all the points in $S_n^B(X)$ are redundant, see eqn. 3.23, in contradiction with the definition of minimal skeletons). Therefore, for minimal skeletons, the theorem is true even for non convex sets.

□

נספח ד - מבוא לאלגוריתם של simulated annealing

בנספח זה נסביר בקצרה את שיטת האופטימיזציה הנקראת simulated annealing, אותה הזכרנו

בסעיף 5.2.1.2 כשדנו במדד לטיב הייצוג של מישורי סיבית. מידע נוסף ניתן למצוא ב-[26].

נתונה פונקציה מחיר C ("אנרגיה", במקרה שלנו $C = \Omega(I)$, ראה משוואה 5.5) ופרמטר בקרה c

("טמפרטורה").

תאור האלגוריתם הוא כדלקמן:

תחילה, פרמטר הבקרה c מקבל ערך גבוה (טמפרטורה גבוהה המאפשרת לפונקציה C לצאת מנקודות מינימום מקומיים). מייצרים סידרה של תבניות (configurations) כך שקיים חוק הממיר מתבנית i לתבנית j . במקרה המתואר בסעיף 5.2.1.2, ז"א אופטימיזציה של $\Omega(I)$, כל טבלת תרגום מגדירה תבנית, והמעבר בין תבניות נעשה ע"י החלפה אקראית בין שתי כניסות שונות בטבלה. נסמן ב- $\Delta C_{ij} = C(j) - C(i)$. ההסתברות ש- j הינה התבנית הבאה היא 1, אם $\Delta C_{ij} \leq 0$, ו- $\exp(-\Delta C_{ij}/c)$, אם $\Delta C_{ij} > 0$. לכן, קיימת הסתברות שונה מאפס לעבור לתבנית בעלת אנרגיה גדולה יותר מהאנרגיה של התבנית הנוכחית.

פרמטר הבקרה c הולך וקטן משלב לשלב, כך שהמערכת מתקרבת ליציבות, ותבניות הגורמות להגדלה באנרגיה מתקבלות כל פעם בהסתברות נמוכה יותר. השתנות c נתונה ע"י פונקציה יורדת $f(\cdot)$.

התהליך נעצר בדרך כלל כאשר עוברות מספר מסוים של איטרציות רצופות ללא שינויים באנרגית המערכת (או עם שינויים קטנים מאוד). במקרה זה אומרים שהמערכת יציבה. אי-שינוי באנרגית המערכת אומר שגם לא התקבלה תבנית בעלת אנרגיה גבוהה יותר מהתבנית הנוכחית, וגם לא נוצרה אף תבנית עם אנרגיה נמוכה יותר.

נסכם את האלגוריתם:

0. אתחל את התבנית ואת אינדקס האיטרציות: $m = 0$

1. החלף מתבנית i (התבנית הנוכחית) לתבנית j עפ"י חוק המרה נתון (למשל באקראי) וחשב את

$$\Delta C_{ij}$$

אם $\Delta C_{ij} \leq 0$ אזי המשך ל-2.

אחרת, אם $\exp(-\Delta C_{ij}/c) \leq \text{random}[0,1)$ המשך ל-3.

2. עדכן את התבנית (התבנית החדשה תהיה j)

$$c_{m+1} = f(c_m) \quad .3$$

$$m \leftarrow m+1$$

4. אם המערכת יציבה (על פי קריטריון נתון), עצור.

אחרת, חזור ל-1.

REFERENCES

1. M. F. Barnsley and A. D. Sloan, "A Better Way to Compress Images," *Byte*, pp. 215-223, 1988.
2. H. Blum, "A Transformation for Extracting New Descriptors of Shape," in *Models for the Perception of Speech and Visual Forms*, W. Wathen-Dunn, Ed., M.I.T. Press, 1967.
3. H. Blum, "Biological Shape and Visual Science," *J. Theor. Biol.*, vol. 38, pp. 205-287, 1973.
4. J. W. Brandt, A. K. Jain, and V. R. Algazi, *Medial Axis Representation and Encoding of Scanned Documents*, Internal Report, The Center for Image Processing and Integrated Computing, University of California, Davis, 1990.
5. J. Bruck, *Real-Time Image Compression and Reconstruction Using Dither Matrices*, M. Sc. Thesis, Technion, Israel Institute of Technology, Dept. of Electrical Engineering, 1985.
6. P. J. Burt and E. H. Adelson, "The Laplacian Pyramid as a Compact Image Code," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 31, No. 4, pp. 532-540, 1983.
7. L. Calabi and W. E. Hartnett, "Shape Recognition, Praire Fires, Convex Deficiencies and Skeletons," *Am. Math. Mon.*, vol. 75, pp. 335-342, 1968.
8. M. P. Do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.
9. C. T. Chen and T. R. Hsing, "Digital Coding Techniques for Visual Communications," *Journal of Visual Communication and Image Representation*, vol. 2, No. 1, pp. 1-16, 1991.

10. M. Chen and P. Yan, "A Multiscaling Approach Based on Morphological Filtering," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 11, No. 7, pp. 694-700, 1989.
11. A. R. Dill, M. D. Levine, and P. B. Noble, "Multiple Resolution Skeletons," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 9, No. 4, pp. 495-504, 1987.
12. E. R. Dougherty and C. R. Giardina, "Error Bounds for Morphologically Derived Measurements," *SIAM J. Appl. Math.*, vol. 47, No. 2, pp. 425-440, 1987.
13. P. Elias, "Predictive Coding - Part I," *Trans. Information Theory*, vol. IT-2, pp. 16-33, 1955.
14. C. R. Giardina and E. R. Dougherty, *Morphological Methods in Image and Signal Processing*, Prentice Hall, New Jersey, 1988.
15. V. Goetcherian, "From Binary to Gray Tone Image Processing Using Fuzzy Logic Concepts," *Pattern Recognition*, vol. 12, pp. 7-15, 1980.
16. J. Goutsias and D. Schonfeld, *Morphological Image Representation Transforms of Discrete and Binary Images*, Department of Electrical and Computer Engineering, The Johns Hopkins University, Technical Report JHU/ECE 88-05, 1988.
17. R. M. Haralick, S. R. Sternberg, and Z. Zhuang, "Image Analysis Using Mathematical Morphology," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 9, No. 4, pp. 532-550, 1987.
18. R. M. Haralick, X. Zhuang, C. Lin, and J. S. J. Lee, "The Digital Morphological Sampling Theorem," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. 37, No. 12, 1989.
19. H. J. A. M. Heijmans and A. Toet, *Morphological Sampling*, Center for Mathematics and Computer Science, Report AM-R8913, Amsterdam, 1989.

20. S. Ho and C. R. Dyer, "Shape Smoothing Using Medial Axis Properties," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 8, No. 4, pp. 512-520, 1986.
21. M. I. Irshid, "Gray Code Weighting System," *IEEE Trans. Information Theory*, pp. 930-931, 1987.
22. A. Kaufmann, *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets*, Academic Press, New York, 1975.
23. E. Kawaguchi, T. Endo, and J. Matsunaga, "Depth-First Picture Expression Viewed from Digital Picture Processing," *IEEE Trans. Pattern. Anal. Machine Intell.*, vol. 5, No. 4, pp. 373-384, 1983.
24. E. Kawaguchi and S. Kamata, "Data Reductive Image Coding by Bit-Plane Modifications," *IEEE ICPR '90*, pp. 208-214, 1990.
25. M. Kunt, A. Ikonomopoulos, and M. Kocher, "Second Generation Image Coding," *Proc. IEEE*, vol. 73, pp. 549-574, 1985.
26. P. J. M. van Laarhoven and E. H. L. Aarts, *Simulated Annealing: Theory and Applications*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1987.
27. C. Lantuejoul, *La Squelettisation et son Application aux Mesures Topologiques des Mosaïques Polycristallines*, These de Docteur-Ingenieur, School of Mines, Paris, France, 1978.
28. C. Lantuejoul, "Skeletonization in Quantitative Metallography," *Issues in Digital Image Processing*, pp. 107-135, Sijthoff & Noordhoff, 1980.
29. C. Lantuejoul and F. Maisonneuve, "Geodesic Methods in Quantitative Image Analysis," *Pattern Recognition*, vol. 17, No. 2, pp. 177-187, 1984.
30. A. Lejtman, *Efficient Data-Base Storage of Images by Compression Techniques*, M. Sc. Thesis, Technion, Israel Institute of Technology, Dept. of Electrical Engineer-

ing, 1984.

31. F. Leymarie and M. D. Levine, *Curvature Morphology*, McGill Research Centre for Intelligent Machines, TR-CIM-88-26, Montreal, 1988.
32. R. Libeskind-Hadas and P. Maragos, "Application of Iterated Function Systems and Skeletonization to Synthesis of Fractal Images," *SPIE Visual Communication and Image Processing*, vol. 845, pp. 276-284, 1987.
33. P. Maragos and R. W. Schafer, "Morphological Skeleton Representation and Coding of Binary Images," *IEEE Trans. Acoustics, Speech, Signal Processing*, vol. ASSP-34, No. 5, pp. 1228-1244, 1986.
34. P. Maragos, "Tutorial on Advances in Morphological Image Processing and Analysis," *Optical Engineering*, vol. 26, No. 7, pp. 623-632, 1987.
35. P. Maragos and R. D. Ziff, "Threshold Parallelism in Morphological Feature Extraction, Skeletonization, and Pattern Spectrum," *SPIE, Visual Communications and Image Processing*, vol. 1001, pp. 106-115, 1988.
36. P. Maragos, "Morphology-Based Symbolic Image Modeling, Multi-Scale Non-linear Smoothing, and Pattern Spectrum," *Proc. of the IEEE Conf. on CVPR*, pp. 766-773, Ann Arbor, MI, 1988.
37. P. Maragos, "A Representation Theory for Morphological Image and Signal Processing," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 11, No. 6, pp. 586-599, 1989.
38. P. Maragos, "Pattern Spectrum and Multiscale Shape Representation," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 11, No. 7, pp. 701-716, 1989.
39. P. Maragos and R. W. Schafer, "Morphological Systems for Multidimensional Signal Processing," *Proc. IEEE*, vol. 78, No. 4, 1990.

40. G. Matheron, *Random Sets and Integral Geometry*, Wiley, New York, 1975.
41. U. Montanari, "Continuous Skeletons from Digitized Images," *Journal of the Association for Computing Machinery*, vol. 16, No. 4, pp. 534-549, 1969.
42. J. C. Mott-Smith, "Medial Axis Transformations," in *Picture Processing and Psychopictorics*, B. S. Lipkin and A. Rosenfeld, Eds., Academic Press, 1970.
43. Y. Nakagawa and A. Rosenfeld, "A Note on the Use of Local Min and Max Operations in Digital Picture Processing," *IEEE Trans. SMC*, vol. 8, No. 8, pp. 632-635, 1978.
44. S. K. Pal, "Fuzzy Skeletonization of an Image," *Pattern Recognition Letters*, vol. 10, pp. 17-23, 1989.
45. S. Peleg and A. Rosenfeld, "A Min-Max Medial Axis Transformation," *IEEE Trans. Pattern Anal. and Machine Intell.*, vol. 3, No. 2, pp. 208-210, 1981.
46. I. Pitas and A. N. Venetsanopoulos, "Morphological Shape Decomposition," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 12, No. 1, pp. 38-45, 1990.
47. S. A. Rajala, H. A. Peterson, and E. J. Delp, "Binary Morphological Coding of Images," *ISCAS '88*, pp. 2807-2811, 1988.
48. C. Ronse, *Fourier Analysis, Mathematical Morphology, and Vision*, Philips Research Laboratory, Working Document WD54, Brussels, 1989.
49. C. Ronse and B. Macq, *Morphological Shape and Region Description*, Internal Report, Philips Research Laboratory, Belgium, 1991.
50. A. Rosenfeld and A. C. Kak, *Digital Picture Processing*, Academic Press, New York, 1982.
51. G. Sapiro and D. Malah, "A Geometric Sampling Theorem and its Applications in Morphological Image Coding," *Proc. of the Int. Conf. on Digital Signal Process-*

- ing, Florence, 1991.
52. G. Sapiro and D. Malah, "Morphological Image Coding via Bit-plane Decomposition and a New Skeleton Representation," *Proc. of the 17th IEEE Convention of Electrical and Electronics Engineers in Israel*, pp. 174-177, Tel Aviv, 1991.
 53. G. Sapiro and D. Malah, *Morphological Image Coding Based on a Geometric Sampling Theorem and a Modified Skeleton Representation*, EE Pub. No. 785, Technion, Israel Institute of Technology, Dept. of Electrical Engineering, April, 1991.
 54. M. Schmitt, "Mathematical Morphology and Artificial Intelligence: An Automatic Programming System," *Signal Processing*, vol. 16, pp. 389-401, 1989.
 55. D. Schonfeld and J. Goutsias, "On the Morphological Representation of Binary Images in a Noisy Environment," *Journal of Visual Communication and Image Representation*, vol. 2, No. 1, pp. 17-30, 1991.
 56. J. W. Schwartz and R. C. Barker, "Bit-Plane Encoding: A Technique for Source Encoding," *IEEE Trans. Aerospace and Electronic Systems*, vol. 2, No. 4, pp. 385-392, 1966.
 57. J. Serra, *Image Analysis and Mathematical Morphology*, Academic Press, 1982.
 58. J. Serra, Editor, *Image Analysis and Mathematical Morphology: Theoretical Advances*, Academic Press, London, 1988.
 59. F. Shih and O. R. Mitchell, "Threshold Decomposition of Gray-Scale Morphology into Binary Morphology," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 11, No. 1, pp. 31-42, 1989.
 60. J. Song and E. J. Delp, *A Study of the Generalized Morphological Filter*, Computer Vision and Image Processing Laboratory, Purdue University, Indiana, 1990.

61. J. Song and E. L. Delp, *The Analysis of Morphological Filters with Multiple Structuring Elements*, Computer Vision and Image Processing Laboratory, Purdue University, Indiana, 1990.
62. S. R. Sternberg, "Grayscale Morphology," *Comput., Vision, Graphics, Image Processing*, vol. 35, pp. 333-355, 1986.
63. A. Toet, "A Morphological Pyramidal Image Decomposition," *Pattern Recognition Letters*, vol. 9, pp. 255-261, 1989.
64. R. Ulichney, *Digital Halftoning*, M.I.T. Press, 1987.
65. L. Vincent, "Morphological Transformations of Binary Images with Arbitrary Structuring Elements," *Signal Processing*, vol. 22, pp. 3-23, 1991.
66. T. A. Welch, "A Technique for High-Performance Data Compression," *IEEE Computer*, vol. 17, No. 6, pp. 8-19, 1984.
67. X. Zhuang and R. M. Haralick, "Morphological Structuring Element Decomposition," *Computer Vision, Graphics, and Image Processing*, vol. 35, pp. 370-382, 1986.

IMAGE CODING BY MORPHOLOGICAL TECHNIQUES

Research Thesis
Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements
for the Degree of Master of Science
in
ELECTRICAL ENGINEERING

BY

GUILLERMO SAPIRO

Submitted to the Senate of the Technion - Israel Institute of Technology

ELUL 5751

Haifa

September 1991

This research was carried out in the Faculty of Electrical Engineering under the supervision of Prof. David Malah.

Many people helped me during my research. I will express in the next few lines my thanks to them.

Thanks to *Prof. David Malah*, not just for his dedicated supervision, but also for the education for research he gave me and for his help and support along all this work. I can not express in words all that I learned from him and all his help to me. Again, thanks.

Thanks to all the staff of the Signal Processing Lab.: To *Yoram Or-Chen*, who "adopted" me at my first days at the Technion and helped me in difficult decisions. To *Ziva Avni* and *Nimrod Peleg*, for their help with technical-computer problems and for making the work in the laboratory very pleasant. To *Avi Rozen*, for his jokes. Thanks to all of you, for your patience.

Thanks to all my colleagues at the Technion, and especially to *Shmuel Farkash* and *Ehud Winer*.

Thanks to my friends and colleagues *Gabriel Weissman* and *Beni Zilberstein*.

Specially thanks to my friends, *Goyo Eisips* and *Dario Ringach*. We studied together, we ate together, we went through pressure periods together, and the most important of all, we were always together to help each other. Thanks.

Thanks to my friends *Mimi Alter*, *Miguel Oppenheim*, and *Marcelo Svirsky*. They are not related to Image Processing, and perhaps they even do not understand my research, but they helped me a lot. Thanks for the support and encourage.

Thanks, this word is very small for her, to my girl-friend *Dalia Gheiler*. She makes me happy, and this allows me to study.

At the end, thanks to my family. To my parents, *Miriam* and *Jobo*. They educated me as a curious man with desire of learning. These characteristics made me continue my studies towards graduate studies. Thanks to my brother, *Alvi*, for his support. Special thanks to my mother and to my sister, *Rossi*. In spite of the physical distance between us, they were always beside me, since my first days at the Technion. Only who went through this, can understand how difficult is to live and to study when a so important part of the family is so far, but their constant support helped me to overcome the problems.

To all the persons that I gave here my thanks, I hope that I did no disappoint you. I also hope that we will continue working and living together, this make the life more beautiful.

The generous financial support of the Guttwirth Fund is gratefully acknowledged.

To Miriam, Rossi, and Dalia

CONTENTS

ABSTRACT	1
LIST OF SYMBOLS AND ABBREVIATIONS	3
1. INTRODUCTION	6
1.1 Problem presentation	6
1.2 Summary of main results	7
1.3 Structure of the thesis	8
2. CONCEPTS IN BINARY MATHEMATICAL MORPHOLOGY	10
2.1 Introduction	10
2.2 Definitions in binary morphology	12
2.3 Basic properties of binary morphology	17
2.4 Extension of binary morphology to gray-level morphology	20
2.5 Morphological operations of the chain code	21
2.5.1 Four directions chain code	21
2.5.2 Morphological operations in the four direction chain code	23
3. MORPHOLOGICAL SKELETON FOR IMAGE REPRESENTATION	31
3.1 Skeleton in continuous space	31
3.2 Skeleton computation via morphological operations	34
3.3 Morphological skeleton of binary discrete images	36
3.3.1 Minimal skeleton computation	39
3.4 Advantages of the morphological skeleton	41

CONTENTS (CONT.)

3.5 Modified morphological skeleton	42
3.5.1 Advantages of the modified morphological skeleton for image coding	47
3.5.2 Relation of the modified morphological skeleton with other morphological representations	49
4. GEOMETRIC SAMPLING THEOREM AND SKELETON LENGTH DISTRIBUTION	52
4.1 Geometric Sampling Theorem	52
4.1.1 Problem presentation	52
4.1.2 Definitions	54
4.1.3 Theorems on unique representations via the skeleton	55
4.2 Skeleton length distribution and pattern spectrum	56
4.2.1 Pattern spectrum	57
4.2.2 Continuous skeleton length distribution	60
4.2.3 Analogy with algebraic signal processing	62
4.2.4 Discrete skeleton length distribution	62
5. MORPHOLOGICAL IMAGE CODING	64
5.1 Binary image coding	64
5.1.1 Image representation via the modified morphological skeleton ..	65
5.1.2 Redundancy reduction in the modified morphological skeleton ..	65
5.1.3 Coding of the reduced modified morphological skeleton	67
5.2 Gray-level image coding	69

CONTENTS (CONT.)

5.2.1 Pre-processing	70
5.2.1.1 Reduction of the number of bits in the image representation	70
5.2.1.2 Pixel representation	72
5.2.2 Bit-plane representation	74
5.2.3 Geometric progressive transmission	75
6. SIMULATION RESULTS	78
6.1 Results for the picture "Lena"	78
6.1.1 Geometric progressive transmission	79
6.2 Results for the picture "peppers"	89
7. SUMMARY, CONCLUSIONS, AND EXTENSIONS	92
7.1 Summary and conclusions	92
7.2 Open problems and extensions	93
APPENDIX A - MORE PROPERTIES OF BINARY MORPHOLOGY	97
APPENDIX B - GRAY-LEVEL MORPHOLOGY	100
B.1 Definitions in gray-level morphology	100
B.2 Basic properties in gray-level morphology	104
B.3 Gray-level morphology with a binary structuring element	106
B.4 Decomposition of gray-level morphology into binary morphology	108
APPENDIX C - PROOFS	109

CONTENTS (CONT.)

APPENDIX D - INTRODUCTION TO THE SIMULATED ANNEALING

ALGORITHM 116

REFERENCES 118

ABSTRACT (IN ENGLISH) I

ABSTRACT

In this work, a new approach for gray-level image coding using binary morphological operations is presented. The coding scheme is based on a geometric approach instead of an algebraic one. This approach is based on a *Geometric Sampling Theorem (GST)*, and on bit-plane representation by a *Modified Morphological Skeleton (MMS)*, developed in this research.

The morphological skeleton, which is defined as the set of centers of maximal disks in a given shape, was recently proposed for geometric binary image coding. In this work, we extend this representation and presents a *modified morphological skeleton (MMS)*, which uses an *increasing size* structuring element and provides a more efficient representation for coding purposes.

The morphological skeleton is, in general, a redundant representation of binary images, skeleton points can be eliminated and error free reconstruction can still be obtained. The *Geometric Sampling Theorem* states conditions for the reconstruction of the boundary of a *continuous* two level image from a *unique* subset of points of its skeleton representation. This set of points, denoted as *singular points*, is found to play an important role in the skeleton representation of *discrete* binary images as well. Based on this fact, we propose an algorithm for efficient computation of *minimal skeletons*, i.e., skeletons without redundant points.

Based on the modified morphological skeleton and on the Geometric Sampling Theorem, a new morphological representation, denoted as the *Reduced*

Modified Morphological Skeleton (RMMS), is proposed.

The coding scheme consists of the following steps: First, the image is pre-processed by a Halftoning technique (error-diffusion) in order to reduce the number of bit-planes from 8 to 4 without significant quality degradation. The pixel values are subsequently converted to Gray-code in order to obtain more uniform bit-planes. These bit-planes are represented by the *RMMS*. The obtained *reduced modified morphological skeletons* are coded with an entropy coding scheme particularly devised for efficient skeleton coding. This scheme includes Huffman code for the lines with no skeleton points, and Elias code together with Ziv-Lempel universal code for the remaining lines. Compression ratios of about 30:1 are obtained for real-world gray-level images. Since the algorithm is not based on segmentation and labeling operations, no false contours appear in the reconstructed image. Almost all the algorithm operations are binary, therefore, the proposed scheme may be very efficient for VLSI implementations.

In this work we also deal with the possibility of introducing geometric errors in the bit-planes for bit-rate reduction. In the continuous case, we bring a theorem which gives a lower bound for the length of eliminated arcs in the skeleton due to these errors. In the discrete case, we bring simulation results.

If geometric errors are introduced, we also propose a post-processing operation for subjective quality enhancement of the reconstructed image. This processing is based on random filling of undefined regions in the reconstructed bit-planes.

The above mentioned geometric errors constitute the basis for a *Geometric Progressive Transmission* algorithm which is also presented. With this algorithm,

images of acceptable quality are obtained with less than 0.2 bits per pixel.

At the conclusion of the work, we discuss open problems related to geometric coding of both gray-level and binary images.