



הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל
Technion – Israel Institute of Technology

ספריות הטכניון
The Technion Libraries

בית הספר ללימודי מוסמכים ע"ש ארווין וג'ואן ג'ייקובס
Irwin and Joan Jacobs Graduate School

©

All rights reserved

*This work, in whole or in part, may not be copied (in any media), printed, translated, stored in a retrieval system, transmitted via the internet or other electronic means, except for "fair use" of brief quotations for academic instruction, criticism, or research purposes only.
Commercial use of this material is completely prohibited.*

©

כל הזכויות שמורות

אין להעתיק (במדיה כלשהי), להדפיס, לתרגם, לאחסן במאגר מידע, להפיץ באינטרנט, חיבור זה או כל חלק ממנו, למעט "שימוש הוגן" בקטעים קצרים מן החיבור למטרות לימוד, הוראה, ביקורת או מחקר. שימוש מסחרי בחומר הכלול בחיבור זה אסור בהחלט.

קידוד תמונות בתחומי תדר
נפרדים באמצעות TRELLIS

חבור - מחקר

2045285



000000871655

8.1.89

לשם מילוי חלקי של הדרישות לקבלת תואר

מגיסטר למדעים

בהנדסת חשמל

מ א ת

אפרת רותם

טכניון
פקולטה לזוגות חשמל
פקולטה למדעי מחשב
ספרייה מס' 74924

הוגש לסנט הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל

אוגוסט 1987

ח י פ ה

אב חשמ"ז

המחקר נעשה בהנחיית פרופסור דוד מלאך
במעבדה לעיבוד אותות בפקולטה להנדסת חשמל.

תודתי העמוקה נתונה לפרופסור דוד מלאך
על הנחיתו המועילה והמסורה בכל שלבי המחקר

המחקר נושא את הסימון 050-520 ומומן ע"י
הקרן המשותפת משרד התעשייה והמסחר (מת"מ) - טכניון

כמו כן ברצוני להודות לצוות המעבדה
מר יורם אור-חן, גב' זיוה אבני ומר נמרוד פלג
על עזרתם בעבודה במעבדה ותרומתם לאוירה
הנעימה במשך שעות רבות.

תוכן הענינים

עמוד

1 ת ק צ י ר	
2 רשימת סמלים וקיצורים	
4 מ ב ו א	
6 פרק 1: רקע - מערכי מסננים	
6 1.1 מערכי מסננים אחידים	
10 1.2 מסנני QMF חד-מימדיים	
19 1.3 הרחבת מערכי QMF לאותות דו-מימדיים	
23 1.4 הפרדה לתחומי תדר באמצעות הפירמידה הלאפליאנית	
25 פרק 2: קידוד תמונות בתחומי תדר נפרדים	
25 2.1 קידוד תוך שימוש במערך מסננים אחיד דו-מימדי	
26 2.2 קידוד באמצעות הפירמידה הלאפליאנית	
27 2.3 קידוד באמצעות 2D-QMF ו-DPCM	
29 פרק 3: רקע - קידוד באמצעות TRELLIS	
30 3.1 מבנה ה-TRELLIS	
32 3.2 אלגוריתמי חיפוש ב-TRELLIS	
36 3.3 איכלוס ה-TRELLIS	
36 3.3.1 איכלוס אקראי	
39 3.3.2 תהליך "מזויף"	
41 3.3.3 אלגוריתם איטרטיבי לאיכלוס TRELLIS קבוע בזמן	
42 3.3.4 איכלוס באמצעות מספר מוגבל של ערכים	
48 3.4 השוואת קידוד באמצעות TRELLIS ו-VQ	

51	פרק 4: קידוד תמונות באמצעות מערך מסננים ו-TRELLIS
52	4.1 קביעת מקודדי ה-TRELLIS בתחומי החדר השונים
52	4.1.1 הקצאת סיביות דינמית
55	4.1.2 איכלוס ה-TRELLIS
56	4.1.3 תוצאות קידוד תמונות
	4.2 אדפטציה של איכלוס ה-TRELLIS והקצאת הסיביות
64	בהתאם לאיזורים בתמונה
	4.2.1 אדפטציה תחת אילוץ קצב קבוע לכל
64	האיזורים בתמונה
	4.2.2 אדפטציה תחת אילוץ עינות קבוע לכל
65	האיזורים בתמונה
69	פרק 5: הוספת חיזוי במקודדים
69	5.1 שילוב החזאי וה-TRELLIS
72	5.2 קידוד תמונות באמצעות חזאי ו-TRELLIS
77	פרק 6: שיקולים במימוש המערכת
77	6.1 אפשרויות מימוש מערך 2D-QMF בזמן אמיתי
80	6.2- שיקולים במימוש ה-TRELLIS
84	פרק 7: סיכום ומסקנות
85	נספח א': הקצאת סיביות אופטימלית בקונטינציה סקלרית
	נספח ב': הקצאת הסיביות המחאימה למדד העינות -
86	שגיאה ריבועית משוקללת
87	רשימת מקורות

ת ק צ י ר :

בעבודה זו מוצעת שיטה לקידוד תמונות בקצבים נמוכים (1 b/p ומטה). המקודד מורכב מ-2 חלקים עיקריים: מערך מסנני QMF דו-מימדים ומקודד וקטורי מסוג TRELLIS לכל אחד מתחומי החדר. מערך המסננים מפריד את התמונה לתת תמונות שכל אחת מייצגת תחום חדרים שונה. בהנחה שניתן להתייחס לתמונה כאל תהליך אקראי בעל צפיפות ספקטרלית המשתנה באיטיות ותחומי החדר צרים אזי מתקבל שתת התמונות המתקבלות מההפרדה לאחר דצימציה הן בקירוב מקורות חסרי קורלציה. יתרונו של מערך מסנני 2D-QMF הוא שכאשר אין קידוד מערכת האנליזה והסינטיזה מהווה בקירוב מערכת יחידה וקיים ביטול מוחלט של הקיפולים (ALIASING) הנובעים מהדצימציה של תת התמונות במוצא מסנני ה-QMF.

כל אחד מתחומי החדר מקודד באמצעות מקודד וקטורי מסוג TRELLIS. העובדה שכל תחום חדר מהווה בקירוב מקור חסר זכרון מאפשרת לאכלס את ה-TRELLIS באיכלוס אקראי. בעבודה נבחנים איכלוסי ה-TRELLIS המותאמים ל-2 מקורות: גאוסי ולפלט. החיפוש של וקטור הקוד המתאים ביותר לוקטור המקודד ב-TRELLIS מבוצע באמצעות אלגוריתם M המהווה חיפוש תת-אופטימלי המחשב משישוט של האלגוריתם של VITERBI. בעבודה נחקרת שאלת אופן בחירת הפרמטרים של ה-TRELLIS לקבלת הביצועים הטובים ביותר. העובדה שהתמונה איננה מקור סטציונרי מחייבת ביצוע אדפטציה של איכלוס ה-TRELLIS והקצאת הטיביות בהתאם לאיזורים השונים בתמונה. האדפטציה מביאה לשיפור משמעותי בביצועי המערכת.

חלק מתחומי החדר המתקבלים אינם חסרי קורלציה. בתחומים אילו מוצע להשתמש במקודד הדומה במבנהו למקודד DPCM אלא שהקונטינר מוחלף במקודד מסוג TRELLIS. כמו כן מוצע שינוי לאלגוריתם M לחיפוש ב-TRELLIS המתאים למקרה בו יש חיזוי במערכת. התוצאות המתקבלות במבנה זה טובות יותר מהמקרה בו לא קיים חיזוי במקודד.

במערכת ללא החיזוי אך עם אדפטציה התקבלו התוצאות הסובייקטיביות הטובות ביותר בקצב 1 b/p , כאשר ההפרדה היא ל-64 תחומי חדר (3 דרגות). ה-SNR שהתקבל הוא 31.5 dB . במערכת דומה בה בוצע קידוד סקלרי (DPCM) בתחומי החדר התקבלו תוצאות אובייקטיביות דומות אך מבחינה סובייקטיבית התמונה שהתקבלה פחות טובה והרעש הנראה לעין הוא גררי.

במערכת עם החזאי התוצאות הטובות ביותר התקבלו כאשר ההפרדה בוצעה ל-16 תחומי חדר (2 דרגות). ב- 1 b/p התקבל $\text{SNR} = 32.3 \text{ dB}$ ובקצב 0.65 b/p $\text{SNR} = 29.8 \text{ dB}$.

למרות כמות החישובים הגדולה הנדרשת לביצוע האלגוריתם ניתן לישמו במערכות זמן אמיתי. זאת מכיון שמערך המסננים ניתן למימוש באמצעות רכיבי קונבולוציה מהירים ואילו ה-TRELLIS ניתן למימוש ב-VLSI באמצעות ארכיטקטורה מקבילית לביצוע אלגוריתם M.

- $P^*(X)$ - פונקציית הצפיפות של תהליך היציאה המתקבל מהפילוג המגשים.
 $F_x(x)$ - הפילוג השולי של תהליך X .
 $S_x(w)$ - הצפיפות הספקטרית של תהליך אקראי X .
 \bar{M} - גודל אות היציאה של אות המשוחזר מקידוד.
 \bar{L} - מספר האינטרוולים המחלקים את תהליך הכניסה המקודד.
 $\{V_k\}$ - ערכי תהליך היציאה השונים המותרים.
 $q(V_k|X)$ - ההסתברות המותנית של V_k בידיעת ערך הכניסה X .
 P_j - הסתברות תהליך הכניסה להיות באינטרוול j .
 Q_k - הסתברות ערך היציאה V_k .
 r_1 - קצב הקידוד בתחום החדר ה- i .
 r_1^* - קצב הקידוד האופטימלי המתקבל מהקצאת הסיביות.
 D_1 - העיוות המתקבל בתחום החדר ה- i .
 D_1^* - העיוות המינימלי אליו ניתן להתקרב בקידוד בקצב r_1^* .
 σ_1^2 - וריאנס תת-התמונה המיוצגת את תחום החדר ה- i .
 m_1 - ממוצע " " " " " " ה- i .
 $r_{1,j}$ - קצב הקידוד של איזור ה- j , בתח תמונה ה- i .
 $\sigma_{1,j}^2$ - וריאנס האיזור ה- j בתח תמונה ה- i .
 D_T - העיוות בין התמונה המקורית לתמונה המשוחזרת.
 $\{X_k\}$ - סדרת הכניסה למקודד עם החזאי.
 $\{\hat{X}_k\}$ - הסדרה המשוחזרת ביציאת המפענח.
 $\{e_k\}$ - אות שארית בחזאי.
 $q\{e_k\}$ - מילת הקוד המותאמת ל- e_k .
 $\{u_k\}$ - סדרת הקוד הנשלחת לערוץ.
 $\{a_1\}$ - מקדמי מסנן החיזוי.
 b/p - BITS/PIXEL.
 VQ - VECTOR QUANTIZATION.
 QMF - QUADRATURE MIRROR FILTERS.
 SNR - SIGNAL TO NOISE RATIO.
 mse - MEAS SQUARE ERROR.
 $abse$ - ABSALUTE ERROR.
 $i.i.d$ - INDEPENDENT, IDENTICALLY DISTRUTED.

מטרת העבודה להציע מערכת קידוד תמונות לקצבים נמוכים (1 b/p ומטה). על המערכת להיות מסוגלת לקודד בעילות תמונות שונות מבלי שיסופק לה מידע קודם על אופי התמונה המקודדת.

בכדי להגיע לתוצאות טובות בקצבים אילו ניתן לבצע TRANSFORM CODING או SUB-BAND CODING. הגישה הראשונה אופטימלית במובן זה שניתן לבחור התמרה כזו שהדגמים המתקבלים במישור ההתמרה הינם חסרי קורלציה. הקידוד מתבצע במישור ההתמרה תוך שימוש בהקצאת סיביות בין הדגמים ויכול להיות קידוד סקלרי או וקטורי. הגישה השניה מתבססת על ההנחה שלתמונה צפיפות ספקטרלית דו מימדית המשתנה באיטיות. לפיכך הפרדת התמונה המקורית לתת תמונות המייצגות כ"א תחום תדרים צר וביצוע הדצימציה המקסימלית האפשרית מבחינת רוחב הפס מביאה לכך שבכל תת תמונה הצפיפות הספקטרלית תהיה בקירוב קבועה ומשמעות הדבר שהדגמים בכל תת תמונה הם בקירוב חסרי קורלציה. כל תת תמונה מקודדת בנפרד כאשר גם כאן ניתן לבצע הקצאת סיביות בין תת התמונות בהתאם לקריטריונים שונים כמו: מינימום שגיאה ריבועית, מינימום שגיאה ריבועית המשוקללת לפי תכונות מערכת הראיה, וכד'.

בעבודה זו נבחרה הגישה השניה והיא: קידוד התמונה בתחומי תדר נפרדים המתקבלים תוך שימוש במערך מסננים דו מימדי. סיבה אחת לבחירה זו היא העובדה שלצורך ביצוע טרנספורמציות כגון: DCT או DFT בצורה יעילה יש צורך לבצע פעולות FFT ואילו לצורך הפרדת התמונה באמצעות מערך מסננים נדרשות פעולות קונבולוציה. פעולת הקונבולוציה היא פעולה פשוטה יחסית ל-FFT וקיימים כיום רכיבי קונבולוציה מהירים המאפשרים סינון תמונות בזמן אמיתי (למשל רכיבי חברת ZORAN). סיבה נוספת לקידוד בפסי תדר נפרדים היא העובדה שלא קיימת הבעיה המאפיינת תמונות המשוחררות לאחר TRANSFORM CODING והיא שניתן להבחין בגבולות בין בלוקים בתמונה, הגולטים לעין כתוצאה מכך שאופי העיוות המתקבל מהקידוד יכול להשתנות מבלוק לבלוק.

בפרק הראשון של עבודה זו מתוארים סוגים שונים של מערכי מסננים דו מימדיים ומערכי מסננים דו מימדיים המתאימים לקידוד תמונות. במיוחד מפורטת ההרחבה של מערך מסנני QMF (QUADRATURE MIRROR FILTERS) מהמקרה החד מימדי לדו מימדי שכן מערך זה מהווה חלק מהמערכת המוצעת בעבודה זו.

פרק 2 מהווה סקירת מערכות לקידוד תמונות המבוססות על מערכי המסננים שתוארו בפרק 1 תוך שימוש במקודדים סקלרים.

תוצאות הקידוד במערכות המתוארות בפרק 2 נותנות מוטיבציה לקודד תמונות בפסי תדר נפרדים תוך שיפור המקודדים. שיפור המקודדים יכול להתבצע ע"י מעבר ממקודדים סקלריים למקודדים וקטורים. קיימים 3 סוגי מקודדים וקטורים: (1) VQ, (2) TREE, (3) TRELLIS. לגבי כל אחד מהמקודדים הוקטורים קיים משפט צפינה המבטיח שניתן למצוא מקודד שעבור מקור סטציונרי וחסר זכרון יתקרב בביצועיו, קרוב כרצוננו לחסם התחתון המוגדר באמצעות פוקצית קצב העיוות (R(D)).

מקודד וקטורי מסוג VQ מורכב מטבלה הנמצאת במקודד ובמפענח. הטבלה מכילה וקטורי קוד בגודל 'n' מילים. מספר הוקטורים בטבלה הוא 2^m כאשר R הוא קצב הקידוד. בתהליך הקידוד מקודד כל פעם וקטור מקור באורך 'n' דגמים. המקודד מחשב את העיוות (תחת מידת עיוות נתונה) בין וקטור המקור לכל אחד מהוקטורים בטבלה, ושולח לערוץ את אינדקס הוקטור עבורו מתקבל העיוות המינימלי. המפענח, המכיל גם כן את טבלת וקטורי הקוד, משחזר מתוך האינדקס את הוקטור הקרוב ביותר לוקטור המקור.

בפרק 3 מתואר קידוד באמצעות עץ קידוד (TREE). ה-TRELLIS מוצג כמקרה פרטי של עץ קידוד. הפרק דן בפירוט באלגוריתמי חיפוש ב-TRELLIS ובדרכים לאיכלוסו, ז"א, לקביעת מילות הקוד בו. מבין הדרכים האפשריות לאיכלוס ה-TRELLIS נבחר האיכלוס האקראי כמתאים ביותר לתנאי הבעיה והם שאין ידע מוקדם על אופי התמונה וכן שתת התמונות המתקבלות מההפרדה לתחומי תדר הן בקירוב מקורות חסרי קורלציה. נשאלת השאלה עבור איכלוס זה האם עדיף להשתמש במקודד מסוג TRELLIS או VQ? בשאלת ההעדפה יש לבחון איזה מקודד יתן ביצועים טובים יותר כאשר קצב הקידוד וכמות החישובים זהה בשניהם. פתרון הבעיה מתקבל באופן אמפירי ע"י הצגת מ-VQ כמקרה פרטי ל-TRELLIS. התוצאה המתקבלת היא שכל בחירה של פרמטרי ה-TRELLIS שאינה מתלכדת עם המקרה הפרטי בו ה-TRELLIS הוא גם VQ, טובה יותר מבחירת ה-TRELLIS כ-VQ. מסיבה זו נבחר ה-TRELLIS לשמש כמקודד הוקטורי במערכת המוצעת.

בפרק 4 מתוארת המערכת המוצעת המשלבת את מערך המסננים מסוג 2D-QMF עם מקודדים מסוג TRELLIS המותאמים כ"א לתת התמונות שאותן הם מקודדים. לכל מקודד יש לקבוע קצב קידוד וכן מילות קוד המאכלסות את ענפיו. הקצב בו פועל המקודד נקבע בתהליך הקצאת סיביות שמטרתו להביא למינימום את השגיאה הריבועית הממוצעת בין התמונה המקורית לתמונה המשוחזרת. בשאלת איכלוס ה-TRELLIS נבדקו שני פילוגים, האחד גאוסי והשני לפלס. כמו כן מתוארות בפרק שתי גישות לביצוע אדפטציה בהקצאת הסיביות ואיכלוס ה-TRELLIS בהתאם לאיזורים השונים בתמונה.

כיוון שתת התמונות שהתקבלו לא תמיד מהוות מקור חסר קורלציה בגלל שינויים חדים בצפיפות הספקטרלית יש מקום להוסיף חזאי במקודד באותם תחומי תדר. סכימת הקידוד המוצעת בפרק 5 היא מקודד DPCM בו מוחלף הקונטינזר הסקלרי במקודד וקטורי מסוג TRELLIS. מוצע אלגוריתם לחיפוש ב-TRELLIS המתקבל משינוי באלגוריתם M ומותאם לחיפוש ב-TRELLIS הנמצא במערכת המכילה חזאי. מוצגות תוצאות הקידוד בקצבים $0.65+1.0$ b/p של המערכת המומלצת.

האפשרויות למימוש אלגוריתם הקידוד המוצע במערכות הפועלות בזמן אמיתי נדונות בפרק 6. מתוארות דרכים שונות למימוש מערך מסנני 2D-QMF בזמן אמיתי באמצעות CONVOLVERS (ממשחח רכיבי חברת צורן). כמו כן מוצעים שינויים באלגוריתם שתכליתם הקטנת סיבוכיות ה-TRELLIS מבחינת גודל זכרון וכמות חישובים, ונבחנת השפעתם של שינויים אילו על ביצועי האלגוריתם.

בפרק 7 מסוכמות המסקנות הנובעות מעבודה זו וכן הצעות להמשך מחקר.

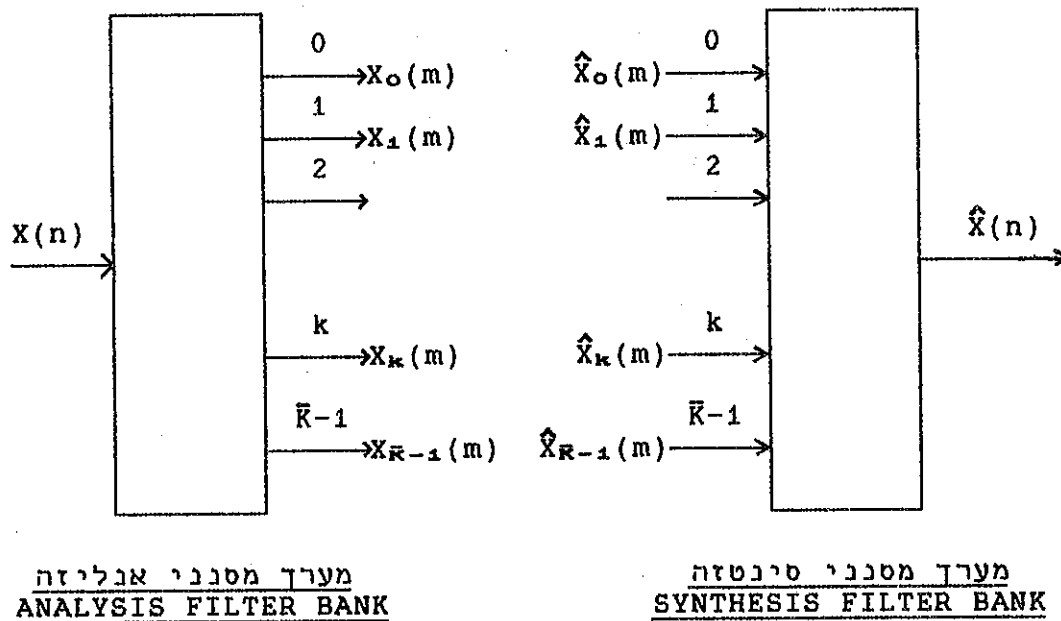
פרק 1. רקע - מערכי מסננים

הפרדת אותות (חד מימדיים או רב מימדיים) לפסי תדר, באמצעות מערכי מסננים, יכולה לשמש מטרת שונות ביניהן: אנליזה ספקטרלית, זיהוי אותות שעברו ריבוב בתדר, קידוד וכו'.

תהליך הפרדת התמונה הדגומה לתחומי-תדר ושיחזור, מהווה חלק ממערכת קידוד. לכן, במהלך הפרק, נדון בסוגים שונים של מערכי-מסננים ספרתיים, המותאמים למטרה זו. בסעיף 1.1 מתוארים מערכי מסננים חד-מימדיים אחידים, בסעיף 1.2 מתואר מערך מסננים חד-מימדיים המתקבל מהפרדת הפסים במבנה עץ באמצעות מסנני QMF (QUADRATURE MIRROR FILTERS). סעיף 1.3 דן בהרחבה של מערך מסנני QMF לשני מימדים וסעיף 1.4 מציג דרך נוספת להפרדת תמונות לפסי תדר והיא הפירמידה הלפלאסיאנית.

1.1 מערכי מסננים אחידים:

לצורך קידוד אות בפסי-תדר נפרדים ושיחזורו, נדרשים שני מערכי מסננים: מערך מסנני אנליזה במקודד ומערך מסנני סינטזה במפענח. בצורתם הכללית הם מתוארים בצירוף 1.1.



צ י ו ר 1.1
FIGURE 1.1

הכניסה למערך מסנני האנליזה היא האות הדגום $X(n)$. סדרות היציאה מהאנליזה, $\{X_k(m)\}$, $0 \leq k \leq R-1$, מייצגות כ"א תחום ספקטרי שונה של $X(n)$. האינדקס m נועד להבהיר כי מירווח הדגימה של $X_k(m)$ יכול להיות גדול מזה של $X(n)$, עקב דצימציה. לעובדה זאת נתייחס ביתר פירוט בהמשך.

אוסף הסדרות $\{X_k(m)\}$ מקודד ומפוענח. הסדרות המפוענחות $\{\hat{X}_k(m)\}$ הן הכניסות למערך מסנני הסינטזה. מתוך אוסף הסדרות נקבל ביציאה את $\hat{X}(n)$.

קיימות דרישות בסיסיות מצמד מערכי המסננים, הנובעות מהעובדה שהמערכת מיועדת למטרות קידוד:

א. המערכת, ללא קידוד ביציאת האנליזה ($X_k(m) = \hat{X}_k(m)$), מהווה מערכת יחידה, עד כדי השהייה קבועה, ז.א.: $\hat{X}(n) = X(n-n_0)$

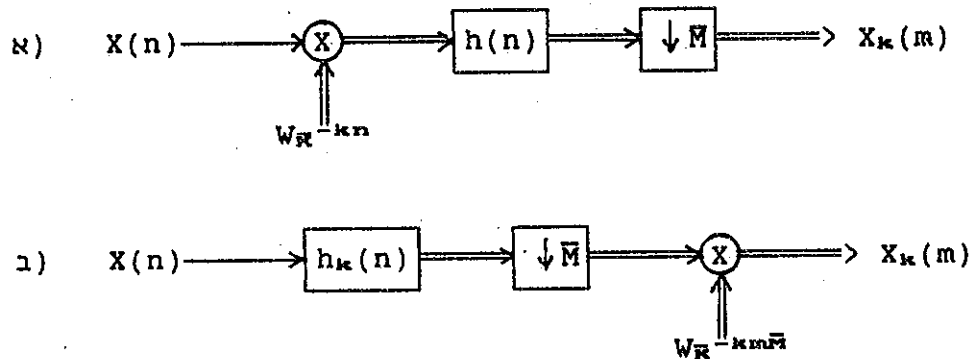
ב. מידת החפיפה, בין פסי החדר, שמייצגות כ"א מבין הסדרות $\{X_k(m)\}$ תהיה מינימלית בכדי להקטין את התלות בין הסדרות.

ג. סה"כ מספר הדגמים בכל הסדרות $\{X_k(m)\}$, יהיה זהה לזה של האות המקורי $X(n)$, ולא יגדל עקב הפרדת האות לפסי חדר.

לכל אחת מהדרישות הנ"ל נתייחס בהמשך כשנציג מערכי מסננים מסוגים מסויימים.

חלוקת כל הספקטרום לפסים נפרדים, יכולה להתבצע בצורות שונות, כאשר מרכז כל פס חדר w_k ורוחב הסרט של הפס, Δw_k , יבחרו מתוך ידע מוקדם על התכונות הספקטרליות של האות. כאשר אין מידע מוקדם, או כאשר רצוי לקבל פסי חדר ברוחב פס שווה לכולם, ניתן להשתמש במערך מסננים אחיד.

מערך מסננים אחיד מתאפיין בכך ש: $X_k(m)$ מייצג פס חדר שמרכזו $w_k = 2\pi k/K$. רוחב סרט הפס קבוע Δw וניתן לקבלו בצורות שונות, למשל: 2 הסכמות המתוארות בציור 1.2 (מתוך [1]).



ציור 1.2: הערוץ ה-k במערך מסננים אחיד
FIGURE 1.2: THE k CHANNEL IN UNIFORM FILTER BANK

$$\text{כאשר } h_k(n) = h(n) \cdot W_R^{+kn}, \quad W_R = e^{j2\pi/K}$$

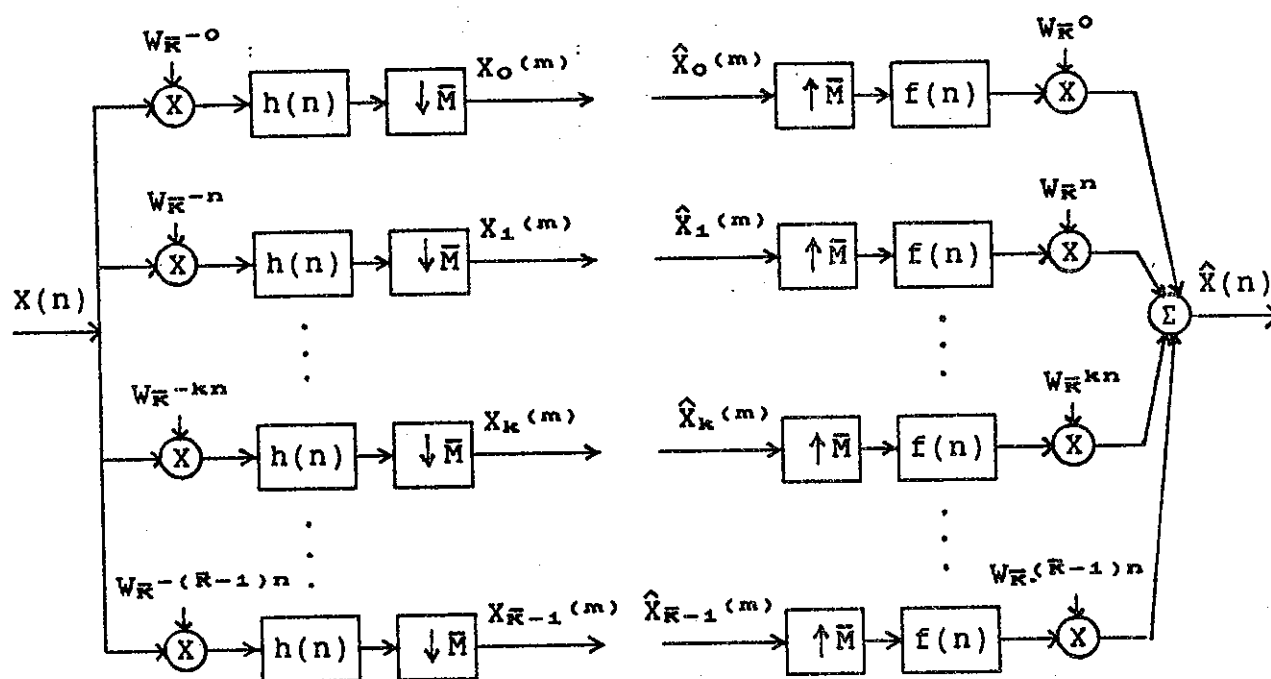
$h(n)$ מעביר נמוכים ו- $\downarrow M$ מובנו דצימציה ביחס M .

בציור 1.2 $X_k(m)$ הפס ה-k במערך מסנני האנליזה מתקבל ע"י דה-מודולציה קומפלקסית (כך שמרכז החחום הספקטרי של הפס ה-k, $w=w_k$, עובר לראשית, $w=0$), סינון באמצעות מעביר נמוכים, ודצימציה ביחס M . כאשר הדצימציה המקסימלית המותרת תלויה ברוחב הסרט של $h(n)$.

בציור 1.2 הסינון מתבצע בסרט מעבר סביב w_k ולאחריו דצימציה בפס מעבר, ניתן להראות ש: 2 ו- 2 שקולים.

מסתי הגישה מחקבל כי כל פסי החדר מחקבלים באמצעות מסנן אב-טיפוס יחיד $h(n)$. עובדה זאת משמשת לקבלת מימוש יעיל (מבחינת סיבוכיות חישוב) של מערך המסננים האחיד.

מערך מסנני אנליזה וסינתזה המחבט על הגישה בצורך 1.2 מובא בצורך 1.3. $f(n)$ הוא אבטיפוס למערך מסנני סינתזה ו- \bar{M} מהווה העלאה קצב ביחס \bar{M} (אנטרפולציה). בערוץ ה- k של מערך מסנני הסינתזה הכניסה $\hat{X}_k(m)$ עוברת אינטרפולציה ע"י הכנסת $\bar{M}-1$ אפסים בין כל שתי דגימות ואחריה סינון L.P.F. $f(n)$ כך שהאינטרפולציה המעניינת תשאר סביב $w=0$. לצורך שיחזור $X(n)$ מזיזים, באמצעות מודולציה, את מרכז הפס מ- $w=0$ ל- w_k ומחקבלת הסדרה \hat{X}_k והשיחזור מחקבל מסיכום הפסים.



צורך 1.3: מערך מסננים אחיד
FIGURE 1.3: UNIFORM FILTER BANK

מחוד משוואת מערך המסננים בחחום החדר, מחקבלים התנאים לכך שהמערכת ללא קידוד תהיה מערכת יחידה (דרישה 1).

$$X_k(w') = \frac{1}{\bar{M}} \sum_{l=0}^{\bar{M}-1} H\left(\frac{w'-2\pi l}{\bar{M}}\right) \cdot X\left(w_k + \frac{w'-2\pi l}{\bar{M}}\right) \quad (1.1)$$

w' - החדר הספרתי המתייחס למרווח הדגימה לאחר דצימציה.

$$\bar{X}_k(w) = \bar{M} \cdot F(w-w_k) \cdot \hat{X}_k((w-w_k) \cdot \bar{M}) \quad (1.2)$$

$$\hat{X}(w) = \frac{1}{\bar{R}} \sum_{k=0}^{\bar{R}-1} \bar{X}_k(w) \quad (1.3)$$

כאשר אין קידוד או מודיפיקציה אחרת ומתקיים:

$$X_k(w') = \hat{X}_k(w')$$

נוכל להציב (1.1) ו-(1.2) ב-(1.3) ונקבל:

$$\hat{X}(w) = \frac{1}{\bar{K}} X(w) \cdot \sum_{k=0}^{\bar{K}-1} H(w-w_k) \cdot F(w-w_k) + \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{\bar{K}} \sum_{l=1}^{\bar{M}-1} X(w - \frac{2\pi l}{\bar{M}}) \sum_{k=0}^{\bar{K}-1} F(w-w_k) \cdot H(w-w_k - \frac{2\pi l}{\bar{M}})$$

מתוך (1.4) ניתן לראות שבכדי שחוקל מערכת יחידה צריכים להתקיים 2 התנאים הבאים:

$$\sum_{k=0}^{\bar{K}-1} F(w-w_k) \cdot H(w-w_k - \frac{2\pi l}{\bar{M}}) = 0 \quad \forall w, l=1, \dots, \bar{M}-1 \quad (1.4.1)$$

$$\sum_{k=0}^{\bar{K}-1} F(w-w_k) \cdot H(w-w_k) = 1 \quad \forall w \quad (1.4.2)$$

קיום התנאי (1.4.1) מביא לביטול הקיפול בתדר הנובע מהדצימציה ואילו קיום התנאי (1.4.2) מביא לכך שאם מתקיים תנאי (1.4.1) אכן תחוקל מערכת יחידה.

באופן מעשי לא ניתן למצוא מסננים $H(w)$ ו- $F(w)$ שיענו על שני התנאים. לכן, בוחרים מסנן אנליזה, $H(w)$, בעל ניווח גבוה מחוץ לתחום המעבר כך שתנאי (1.4.1) מתקיים עד כדי שגיאה קטנה, הנובעת מכך שהניחות סופי. בבחירה זו מתקיימת גם דרישה 2 והתלות בין פסי התדר קטנה. לאחר בחירת $H(w)$, נבחר $F(w)$ כך שיתקיים תנאי (1.4.2) בקרוב.

אחת הדרישות ממערך מסננים למטרת קידוד (דרישה 3), התייחסה למספר הדגמים לקידוד ביחס למספר הדגמים של האות המקורי. ניתן להגיע לכך שמספר הדגמים לקידוד יהיה שווה לזה של האות המקורי, זאת בתנאי ש: $\bar{K} = \bar{M}$. אמנם יציאות מערכי המסננים מהווים דגמים קומפלקסיים אך כיון שהאות המקורי ממשי אין צורך לקודד את יציאות כל הפסים ובקצב דצימציה קריטי נקבל שמספר הנקודות לקידוד שווה לזה של האות $X(n)$.

אחד היתרונות לשימוש במערכי מסננים אחידים הוא שקיימות סכמות מימוש יעילות מבחינת כמות החישובים. ב-[1] מופיעות 2 סכמות מימוש יעילות המתבססות שתייהן על השימוש באבטיפוס אחד לכל פסי התדר וכן על ביצוע מודולציות באמצעות FFT.

הסכימה הראשונה - POLYPHASE STRUCTURE - מוגבלת למקרים בהם $\bar{K} = \bar{M}$ ו- $\bar{K} = \bar{M}I$ (שלם חיובי).

הסכימה השנייה - WEIGHTED OVERLAP-ADD STRUCTURE (WOLA) מתאימה ליחס \bar{K}, \bar{M} כלשהו בתחום $1 \leq \bar{M} \leq \bar{K}$, אך $h(n)$ סופי.

סכמת WOLA התפתחה מתוך התייחסות ליציאות מסנני האנליזה כאל התמרת פוריה לזמן קצר - STFT.

$$X_k(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y_m(n) W_{\bar{K}}^{-nk}$$

$$y_m(n) = X(n) h(m\bar{M}-n) \quad \text{כאשר:}$$

ז"א, עבור m קבוע, $X_k(m)$ הוא התמרת פוריה של חלק מתוך $X(n)$, המתקבל באמצעות החלון $h(n)$ הנע על פני האות. התייחסות זאת שונה מההתייחסות הקודמת ל- $X_k(m)$ כאל יציאות של מערך מסננים (k קבוע ו- m משתנה) אך מבחינה מתימטית הן שקולות.

עבור סינון בקצב קריטי $\bar{K} = \bar{M}$ ומסנן $h(n)$ סופי באורך L נקבל שכמות החישובים הנדרשת לדגם כניסה באנליזה:

- במימוש ישיר $2(L+\bar{M})$ כפלים ממשיים ו- $2L$ חיבורים ממשיים.
- במימוש אחת הסכמות היעילות $L/\bar{M} + 2\log \bar{M}$ כפלים וחיבורים ממשיים.

למרות היתרון באפשרות למימוש יעיל של מערך המסננים החסרונות העיקריים הם:

א. לכל פסי החדר אותו רוחב סרט.

ב. לקבלת קרוב טוב למערכת יחידה באמצעות מסנני FIR, יש להשתמש במסננים ארוכים מאד, בכדי לבטל את הקיפולים שהתקבלו מהדצימציה. עובדה זאת מגדילה מאד את סיבוכיות החישוב.

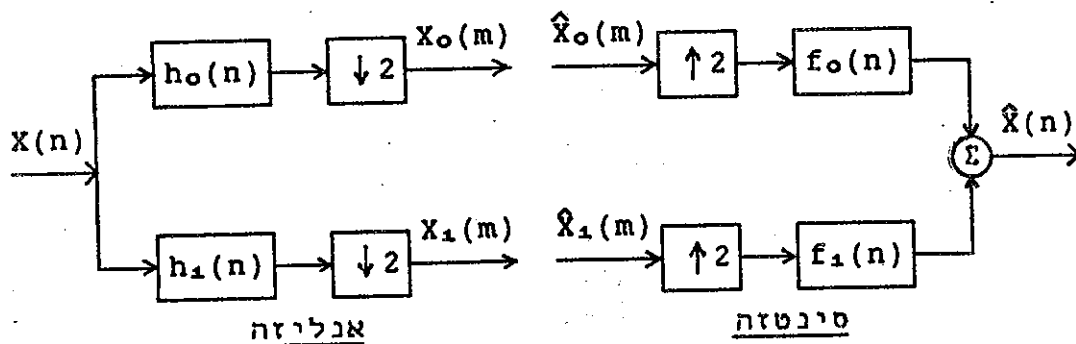
בסעיף הבא נדון במערך מסננים המתגבר על חסרונות אלו.

1.2 מסנני QMF (חד מימדיים):

תיאור הדרגה הבסיסית:

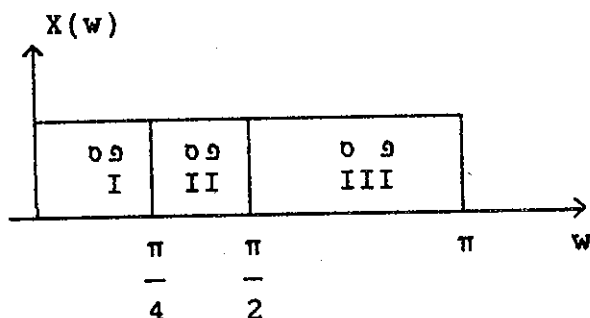
בסעיף זה מתואר מערך מסננים נוסף המאפשר הפרדת סדרת כניסה חד-מימדית לפסי חדר נפרדים. בניגוד למערך מסננים אחיד, פסי החדר במערך מסננים זה אינם בהכרח בעלי רוחב סרט זהה. מערך מסננים זה משתמש בדרגה בסיסית אחת. הדרגה הבסיסית מתוארת בציור 1.4. תפקיד הדרגה הבסיסית היא להפריד את אות הכניסה לשני אותות. הראשון $X_0(m)$, המייצג את תחום החדרים הנמוכים, $[0:\pi/2]$, של אות הכניסה והשני $X_1(m)$ המייצג את תחום הגבוהים, $[\pi/2,\pi]$, של $X(n)$. כל אחד מהפסים מתקבל באמצעות מסנן אנליזה מתאים ($h_0(n)$ או $h_1(n)$) והורדת קצב פי 2.

שיחזור האות מתוך שני פסי החדר, מתבצע באמצעות העלאת קצב פי 2, סינון בכל פס באמצעות מסנן סינטזה מתאים ($f_0(n)$ או $f_1(n)$) וסיכום שני הפסים. $f_0(n)$ הוא מסנן מעביר נמוכים ו- $f_1(n)$ מסנן מעביר גבוהים.



צ י ו ר 1.4
FIGURE 1.4

מערך המסננים נבנה מתוך הדרגה הבסיסית בצורת עץ. אם לדוגמא רוצים להפריד את תחום הספקטרום של $X(n)$ בצורה הבאה (ציוור 1.5):



צ י ו ר 1.5
FIGURE 1.5

$X_1(m)$ ישאר כמו שהוא ואילו $X_0(m)$ ישמש כניסה לדרגה בסיסית נוספת כמו זו המתוארת בציוור 1.4. הפרדת האות לפסים, המתבצעת במספר דרגות, בצורת עץ, מאפשרת הפרדה בצורות שונות ביניהן: מערך מסננים אחד (מספר פסי התדר $K=2^x$ ורוחב סרט $\Delta\omega = \pi/2^x$) ומערך מסננים במבנה אוקטבי (ביציאת כל דרגה ממשיכים להפריד רק את תחום התדרים הנמוך לפסים צרים יותר).

תנאים למערכת יחידה:

בהתאם לדרישה 1 ממערכי מסננים למטרות קידוד, לפיה המערכת ללא קידוד מהווה מערכת יחידה, נבדק מהם התנאים על $h_0(n)$, $h_1(n)$, $f_0(n)$ ו- $f_1(n)$, כך שהדרגה הבסיסית תהווה מערכת יחידה. אם התנאים לכך יתקיימו בכל הדרגות הבסיסיות שבשימוש המערך, אזי המערכת כולה תהיה מערכת יחידה.

$$X_i(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k) \cdot h_i(2m-k) \quad i=0,1 \quad (1.5)$$

לכן, בתחום החדר:

$$X_i(w') = \frac{1}{2} \left[X\left(\frac{w'}{2}\right) \cdot H_i\left(\frac{w'}{2}\right) + X\left(\frac{w'}{2} + \pi\right) \cdot H_i\left(\frac{w'}{2} + \pi\right) \right] \quad i=0,1 \quad (1.6)$$

ללא קידוד נקבל:

$$\hat{X}(w) = X_0(2w) \cdot F_0(w) + X_1(2w) \cdot F_1(w) \quad (1.7)$$

ובהצבת (1.6) ל-(1.7) נקבל:

$$\hat{X}(w) = \frac{1}{2} [H_0(w) \cdot F_0(w) + H_1(w) \cdot F_1(w)] \cdot X(w) + \frac{1}{2} [H_0(w+\pi) \cdot F_0(w) + H_1(w+\pi) \cdot F_1(w)] \cdot X(w+\pi)$$

לכן, לקבלת מערכת יחידה נדרשים להחזיקים 2 התנאים הבאים:

$$H_0(w+\pi) \cdot F_0(w) + H_1(w+\pi) \cdot F_1(w) = 0 \quad (1.8) \quad \text{א.}$$

קיום התנאי מבטיח את ביטול הקיפולים.

$$H_0(w) \cdot F_0(w) + H_1(w) \cdot F_1(w) = 2 \quad (1.9.1) \quad \text{ב.}$$

או בתנאי שמותרת השהייה קבועה בסיגנל היציאה לעומת אור
הכניסה:

$$H_0(w) \cdot F_0(w) + H_1(w) \cdot F_1(w) = 2e^{-jwn_0} \quad (1.9.2)$$

קיימות בחירות שונות של מסנני המערכים המאפשרות קיום
תנאי 1 בצורה מוחלטת וקיום תנאי 2 בקירוב טוב או בצורה
מוחלטת בהתאם לבחירה.

אפשרות א' ([1], [3], [4]):

$$h_0(n) = h(n) \quad f_0(n) = h(n) \quad (1.10)$$

$$h_1(n) = (-1)^n h(n) \quad f_1(n) = -(-1)^n h(n)$$

נציב ב: (1.8)

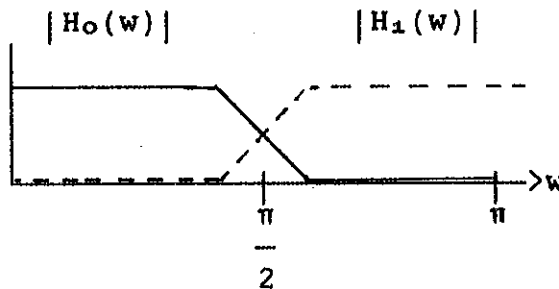
$$H_0(w+\pi) \cdot F_0(w) + H_1(w+\pi) \cdot F_1(w) =$$

$$H(w+\pi) \cdot H(w) - H(w+\pi+\pi) \cdot H(w+\pi) = 0 \quad (1.11)$$

נציב ב: (1.9.2)

$$H_0(w) \cdot F_0(w) + H_1(w) \cdot F_1(w) = H^2(w) - H^2(w+\pi) = 2e^{-jwn_0} \quad (1.12)$$

בבחירה זאת ביטול הקיפולים מוחלט ויש למצוא $H(w)$ אשר מקיים את התנאי (1.12) וכן ישמש כמסנן מעביר נמוכים בתחום $[0: \pi/2]$. נשים לב שהבחירה $H_1(w) = H(w+\pi)$ קובעת את $H_1(w)$ כמסנן מעביר גבוהים שהוא שקוף של $H(w)$ סביב $\pi/2$ כמחואר בציר 1.6.



ציור 1.6: ההפרדה המתקבלת בדרגת QMF
FIGURE 1.6: SUBBANDS OF QMF

בחירה מקובלת ל: $h(n)$, היא קביעתו כמסנן FIR סימטרי וסיבתי. הסיבה לתגובה הסופית להלם היא למניעת התפשטות שגיאות בשיחזור והסיבה לסימטריות היא לקבלת מסנן פאזה לינארית. בבחירה זאת נוכל לרשום את:

$$H(w) = H_r(w) e^{-jw(N-1)/2} \quad (H_r(w) - \text{ממשי}) \quad (1.13)$$

- N מספר מקדמי המסנן

ונהצבה ל-(1.12) נקבל:

$$H^2(w) - H^2(w+\pi) =$$

$$|H(w)|^2 e^{-j(N-1)w} - |H(w+\pi)|^2 e^{-j(N-1)(w+\pi)} =$$

$$(|H(w)|^2 - (-1)^{N-1} |H(w+\pi)|^2) e^{-j(N-1)w} = 2e^{-jn_0w}$$

במקרה בו N אי-זוגי לא ניתן למצוא $H(w)$ כך שהשיויון יתקיים לכן יש לבחור מסנן בעל מספר מקדמים, N , זוגי עבורו נקבל שהתנאי למערכת יחידה הוא:

$$|H(w)|^2 + |H(w+\pi)|^2 = 2 \quad \forall w \quad (1.14)$$

ניתן להראות ([3]) שבבחירה (1.10) תגובת ההלם של המערכת הכוללת, $h_{\text{QMF}}(n)$, תהיה:

$$h_{\text{QMF}}(n) = h_E(n) * h_o(n) \quad (1.15)$$

$$h_E(n) \triangleq \begin{cases} h(n) & n \text{ זוגי} \\ 0 & n \text{ אי-זוגי} \end{cases} \quad \text{כאשר:}$$

$$h_o(n) \triangleq \begin{cases} 0 & n \text{ זוגי} \\ h(n) & n \text{ אי-זוגי} \end{cases}$$

כאשר $h(n)$ נבחר להיות ממשי, סימטרי סיבתי ובעל מספר מקדמים זוגי מחקבל כי $h_o(n)$ ו- $h_E(n)$ מקיימים: $h_E(n) = h_o(N-1-n)$. כמו כן נדרש כי $h_{\text{QMF}}(n) = \delta(n-n_0)$. תנאי זה יכול להתקיים רק אם $h(n)$ מכיל 2 איברים בלבד השונים מאפס. תגובתו של מסנן כזה תהיה מעביר נמוכים בתנאי ש: $N = 2$ אך מסנן באורך זה לא יכול לשמש להפרדה טובה של פסי חדר. לסיכום, בחירת $h(n)$ לפי (1.13) לא מאפשרת הפרדה טובה של פסי החדר וקבלת מערכת יחידה במדויק. דרכים לתכנון $h(n)$ שהוא FIR סימטרי בעל תגובת חדר רצויה המקרב מערכת יחידה ידונו בהמשך.

אפשרות ב' [2]:

$$\begin{aligned} h_0(n) &= h(n) & f_0(n) &= h(N-1-n) & (1.16) \\ h_1(n) &= (-1)^n h(N-1-n) & f_1(n) &= -(-1)^n h(n) \end{aligned}$$

כאשר $h(n)$ בעל תגובה להלם סופית באורך N , זוגי (לא בהכרח סימטרי) ובעל פס מעבר בתחום $[0:\pi/2]$ למרות השינוי ב- $h_1(n)$ ישאר נכון ציור 1.6 גם לבחירה זאת.

הצבת (1.16) ל-(1.8):

$$H_0(w+\pi) \cdot F_0(w) + H_1(w+\pi) \cdot F_1(w) = \quad (1.17)$$

$$H(w+\pi) \cdot e^{-j(N-1)w} \cdot H^*(w) - e^{-j(N-1)(w+2\pi)} \cdot H^*(w+2\pi) \cdot H(w+\pi) = 0$$

הצבת (1.16) ל-(1.9):

$$H_0(w) \cdot F_0(w) + H_1(w) \cdot F_1(w) =$$

$$H(w) e^{-j(N-1)w} \cdot H^*(w) - e^{-j(N-1)w} (-1)^{N-1} \cdot H^*(w+\pi) \cdot H(w+\pi) =$$

$$\left(|H(w)|^2 - (-1)^{N-1} |H(w+\pi)|^2 \right) e^{-j(N-1)w} = 2e^{-jn_0 w}$$

ובבחירת N זוגי נקבל התנאי הזה לתנאי (1.14)

$$|H(w)|^2 + |H(w+\pi)|^2 = 2 \quad (1.18)$$

כאשר $h(n)$ אינו בהכרח סימטרי.

חסרונה של הבחירה לפי (1.16) היא בכך שאמנם כל המסננים מתקבלים מאותו אבטיפוס אך בגלל ההיפוך לא נקבל מימוש יעיל כמו זה האפשרי לפי בחירה (1.10).

שתי אפשרויות הבחירה א' ו-ב' המביאות לתנאי (1.14) ו-(1.18) מחייבות מסנן באורך זוגי. ב-[2] מחוורת סכימה לדרגה בסיסית כאשר בחירת המסננים זהה לזאת ב-(1.18) והשינוי היחיד הינו בכך שבניגוד לסכימה המקורית בה:

$$X_1(m) = \sum_k X(k) h_1(2m-k)$$

$$X_1(m) = \sum_k X(k) h_1(2m+1-k) \quad \text{בסכימה המוחלפת:}$$

דהיינו, $X_0(m)$ נשאר כמו בדרגה הבסיסית המקורית ואילו $X_1(m)$ מתקבל מחוצא הסינון בדגמים אי-זוגיים. בסכימה שהתקבלה התנאי למערכת יחידה הוא גם כן (1.18) אלא שאורך המסנן חייב להיות אי-זוגי.

שיטות לתכנון מסנני - QMF:

לאחר מציאת התנאים למערכת יחידה בכל אחת מהבחירות בסעיף הקודם נותרה השאלה כיצד לתכנן את $h(n)$ כך שיתקיים (1.14). נחאר בקצרה 3 גישות שונות:

א. [1] תכנון מסנן FIR סימטרי באמצעות חלון Hanning.

לדוגמא: הסטייה ממערכת יחידה עבור $N=32$ היא $\pm 0.2\text{dB}$. תכנון כזה יכול לשמש דרגה אחת אך יש לשים לב שהשגיאה תגדל בחיבור מספר דרגות במבנה עץ.

ב. [4], [3], [1] כפי שהובהר לא ניתן למצוא מסנן FIR סימטרי שיקיים במדויק את התנאי למערכת יחידה ויהיה מסנן מעביר נמוכים (מלבד $N=2$). בנסיון לתכנן מסנן FIR סימטרי מסדר N , שיקרב מערכת יחידה ואף יהיה מעביר נמוכים, מגדירים 2 גורמים עליהם רוצים לבצע מינימיזציה:

$$E_r = 2 \int_0^{\pi/2} (|H(w)|^2 + |H(w+\pi)|^2 - 1)^2 dw \quad (1.19.1)$$

אנרגיית הסטייה ממערכת יחידה.

$$E_s = \int_{w_s}^{\pi} |H(w)|^2 dw \quad (1.19.2)$$

אנרגיית תחום החסימה, כאשר תחום החסימה הוא $[w_s: \pi]$

חשיבותו של הגורם (1.19.2) בהיותו מדד להפרדת פסי התדר זה מזה.

המינימיזציה על שני הגורמים מתבצעת ע"י איחודם באמצעות פרמטר α :

$$E = E_r + \alpha E_s$$

וביצוע מינימיזציה של E בשיטות איטרטיביות כפונקציה של מקדמי המסנן. לדוגמא: עבור $N=32$, $w_s=0.6\pi$, $\alpha=1$, תוכנן ב-[4] מסנן כך שהסטייה ממערכת יחידה $\pm 0.015\text{dB}$.

ג. [2] השיטה מחייסת לבחירת מסננים לפי (1.16). המסנן המתוכנן הוא FIR באורך N אך לא סימטרי. שיטה זאת מבטיחה קיום מערכת יחידה באופן מוחלט ומבוטסת על הסגת הדרישה (1.18) ממשור התדר למישור הזמן.

$$|H(w)|^2 + |H(w+\pi)|^2 = 2 \quad (1.18)$$

$$R(n) + (-1)^n R(n) = 2\delta(n) \quad (1.20)$$

$$R(n) = \text{ACF}\{h(n)\} = \sum_{k=0}^{N-1-|n|} h(k) h(|n|+k) \quad \text{כאשר:}$$

מחוד (1.20) מחקבל:

$$R(n) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = \text{זוגי} \\ \text{לא מוגדר} & n = \text{אי זוגי} \end{cases} \quad (1.21)$$

לכן בעיית החכנון היא מציאת מסנן $h(n)$, מעביר נמוכים שפונקציית האוטוקורלציה שלו מקיימת את (1.21). ניתן לאלץ פונקציית אוטוקורלציה של מסנן נתון לקיים את (1.21) ע"י הכפלתה בחלון $w(n)$.

$$w(n) = \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi} \quad \text{למשל:}$$

המסנן שיתקבל יהיה בעל חגובת חדר חלקה יותר מאשר המסנן המקורי ופס מעבר רחב יותר.

מימוש יעיל של מערך מסנני QMF:

מסנני האנליזה, $h_0(n)$ ו- $h_1(n)$, בדרגה הבסיסית של מסנני QMF ניתנים להפרדה ל-2 מסנני פוליפאזה.

$$P_{1\mu}(m) = h_1(2m+\mu) \quad \mu = 0,1, \quad i = 0,1 \quad (1.22)$$

בבחירת $h_0(n)$ ו- $h_1(n)$ לפי (1.10), ז"א:

$$h_1(n) = (-1)^n h(n), \quad h_0(n) = h(n)$$

מחקבל ([1]) שמסנני הפוליפאזה משותפים ל-2 מסנני האנליזה.

$$P_0(m) = h(2m), \quad P_1(m) = h(2m+1) \quad (1.23)$$

$$\tilde{X}_i(m) \triangleq X(2m-i) \quad i = 0,1$$

מתקיים:

$$X_k(m) = P_0(m) * \tilde{X}_0(m) + (-1)^k P_1(m) * \tilde{X}_1(m) \quad (1.24)$$

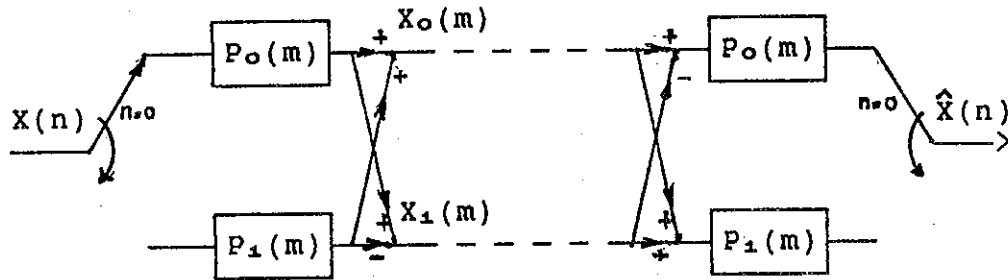
מאחר ומסנני הסינטזה גם כן מקיימים:

$$f_0(n) = h(n), \quad f_1(n) = -(-1)^n h(n)$$

ניתן לייעל גם את מימוש הסינטזה ולקבל:

$$\hat{X}(n) = \begin{cases} P_0(m) * [\hat{X}_0(m) - \hat{X}_1(m)] & n = 2m \\ P_1(m) * [\hat{X}_0(m) + \hat{X}_1(m)] & n = 2m+1 \end{cases}$$

וכל המערכת מתוארת בציור 1.7.



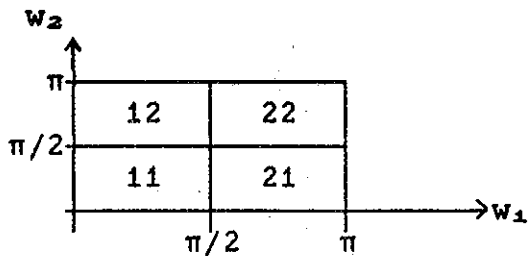
ציור 1.7: דרגת QMF באמצעות מסנני פוליפאזה
FIGURE 1.7: ONE STAGE OF QMF BANK USING POLYPHASE FILTERS

במימוש זה כמות החישובים באנליזה לדגם כניסה אחד היא $L/2$ כפלים וחיבורים ממשיים. כמות זהה של חישובים נדרשת בסינטזה.

לסיכום: היחרונות בשימוש במערך מסנני QMF:

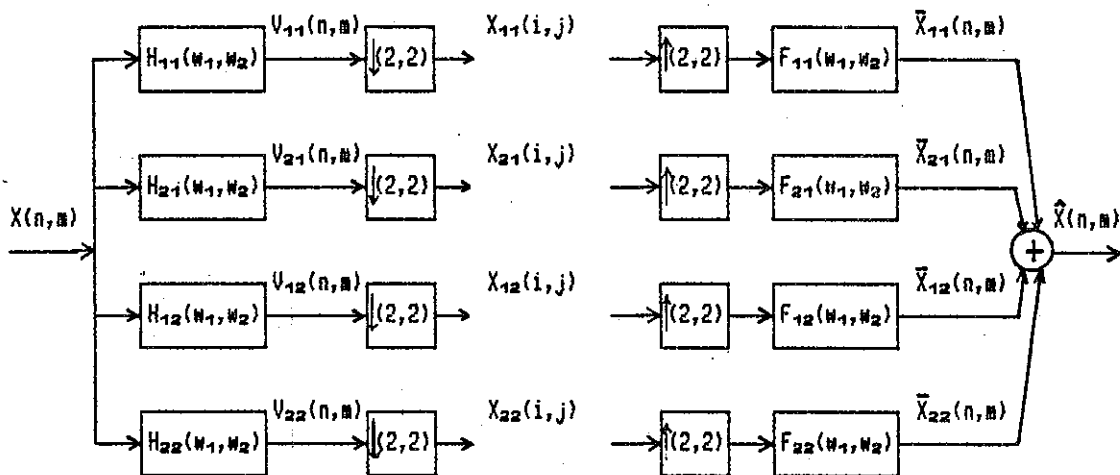
- ניתן לבחור מסנני אנליזה וסינטזה כך שביטול הקיפולים יהיה מוחלט ולא תלוי באורך המסנן. זאת, בניגוד למערך המסננים האחד שחואר בסעיף הקודם (STFT), בו נדרשים מסננים ארוכים מאד בכדי לקרב את תנאי (1.4.1) לביטול הקיפולים.
- גם במערך מסנני QMF מתבצעת הורדת קצב קריטית ומספר הדגמים לקידוד זהה לזה של האות המקורי.
- מערך המסננים מאפשר קבלת פסי חדר צרים בתחומים מסויימים ומונע את הצורך להפריד לפסים צרים תחומי חדרים רחבים שבהם הספקטרום, בקירוב קבוע.
- מאחר ולאחר דרגה אחת מתבצעת הורדת קצב פי 2 ניתן בדרגה השניה לבחור מסנן באורך קצר פי 2 להשגת אותו רוחב פס מעבר.
- יחרונות אלו הביאו לשימוש במסנני QMF להפרדת תמונות לתחומי חדר. הסעיף הבא ידון בהרחבת מערך המסננים למקרה הדו-מימדי.

במקרה החד מימדי תפקיד הדרגה הבסיסית להפריד את אות הכניסה $X(n)$ לשני פסים המייצגים את שני התחומים $[0; \pi/2]$ ו- $[\pi/2; \pi]$. במקרה הדו-מימדי נרצה להפריד את דו-מימדי $X(n, m)$ ל-4 תחומים המתוארים בציור 1.8.



ציור 1.8: תחומי החדר ב-2D-QMF
 FIGURE 1.8: SUBBANDS OF 2D-QMF

האות $X(n, m)$ מופרד ל-4 תחומי החדר ומשוחזר כמתואר בציור 1.9.



ציור 1.9: דרגת QMF דו-מימדי
 FIGURE 1.9: ONE STAGE OF 2D QMF

הסימונים $\downarrow(M_1, M_2)$ ו- $\uparrow(M_1, M_2)$ מתארים הורדת והעלאה קצב, בהתאמה, כאשר יחס ההורדה/העלאה בכיוון השורות הוא M_1 ובכיוון העמודות M_2 .

נבחר את מסנני האנליזה והסינתזה מתוך מסנן אבטיפוס יחיד מעביר נמוכים, $H(w_1, w_2)$.

$$H_{11}(w_1, w_2) = H(w_1, w_2) \quad F_{11}(w_1, w_2) = H(w_1, w_2) \quad (1.25)$$

$$H_{21}(w_1, w_2) = H(w_1 + \pi, w_2) \quad F_{21}(w_1, w_2) = -H(w_1 + \pi, w_2)$$

$$H_{12}(w_1, w_2) = H(w_1, w_2 + \pi) \quad F_{12}(w_1, w_2) = -H(w_1, w_2 + \pi)$$

$$H_{22}(w_1, w_2) = H(w_1 + \pi, w_2 + \pi) \quad F_{22}(w_1, w_2) = H(w_1 + \pi, w_2 + \pi)$$

עבור בחירה זו נרשום את התנאים לקבלת מערכת יחידה:

$$\bar{X}_{1j}(w_1, w_2) = \quad (1.26)$$

$$F_{1j}(w_1, w_2) = \frac{1}{4} \left[V_{1j}(w_1, w_2) + V_{1j}(w_1 + \pi, w_2) \quad 1, j=0, 1 \right. \\ \left. + V_{1j}(w_1, w_2 + \pi) + V_{1j}(w_1 + \pi, w_2 + \pi) \right]$$

$$V_{1j}(w_1, w_2) = X(w_1, w_2) H_{1j}(w_1, w_2) \quad \text{וכן}$$

$$\hat{X}(n, m) = \sum_{1j} \bar{X}_{1j}(n, m) \quad (1.27)$$

ובהצבה (1.26) ל-(1.27) נקבל:

$$\hat{X}(w_1, w_2) = \frac{1}{4} X(w_1, w_2) \left[H^2(w_1, w_2) - H^2(w_1 + \pi, w_2) \quad (1.28) \right. \\ \left. - H^2(w_1, w_2 + \pi) + H^2(w_1 + \pi, w_2 + \pi) \right]$$

$$+ \frac{1}{4} X(w_1 + \pi, w_2) \left[H(w_1 + \pi, w_2) H(w_1, w_2) - \right. \\ \left. H(w_1, w_2) H(w_1 + \pi, w_2) \right. \\ \left. - H(w_1 + \pi, w_2 + \pi) H(w_1, w_2 + \pi) \right. \\ \left. + H(w_1, w_2 + \pi) H(w_1 + \pi, w_2 + \pi) \right]$$

$$+ \frac{1}{4} X(w_1, w_2 + \pi) \left[H(w_1, w_2 + \pi) H(w_1, w_2) - \right. \\ \left. H(w_1, w_2) H(w_1, w_2 + \pi) \right. \\ \left. - H(w_1 + \pi, w_2 + \pi) H(w_1 + \pi, w_2) \right. \\ \left. + H(w_1 + \pi, w_2) H(w_1 + \pi, w_2 + \pi) \right]$$

$$+ \frac{1}{4} X(w_1 + \pi, w_2 + \pi) \left[H(w_1 + \pi, w_2 + \pi) H(w_1, w_2) \right. \\ \left. - H(w_1, w_2 + \pi) H(w_1 + \pi, w_2) \right. \\ \left. - H(w_1 + \pi, w_2) H(w_1, w_2 + \pi) \right. \\ \left. + H(w_1, w_2) H(w_1 + \pi, w_2 + \pi) \right]$$

נרצה לבחור מסננים כך שב- (1.28) ישאר האיבר הראשון בלבד ויתר האיברים הנובעים מקיפולים יתאפסו. הבחירה ב- (1.25) הביאה לכך שהאיבר השני והשלישי בסכום מתאפסים והאיבר הרביעי יתאפס בתנאי שיתקיים השיוויון:

$$H(w_1, w_2) \cdot H(w_1 + \pi, w_2 + \pi) = H(w_1, w_2 + \pi) \cdot H(w_1 + \pi, w_2) \quad (1.29)$$

בחירת המסנן כמסנן ספרבילי:

$$H(w_1, w_2) = H_1(w) \cdot H_2(w) \quad (1.30)$$

מביאה לכך ש- (1.29) מתקיים ומתקבל:

$$(1.31)$$

$$X(w_1, w_2) = X(w_1, w_2) \left[H_1^2(w_1) \cdot H_2^2(w_2) - H_1^2(w_1 + \pi) \cdot H_2^2(w_2) - H_1^2(w_1) \cdot H_2^2(w_2 + \pi) + H_1^2(w_1 + \pi) \cdot H_2^2(w_2 + \pi) \right]$$

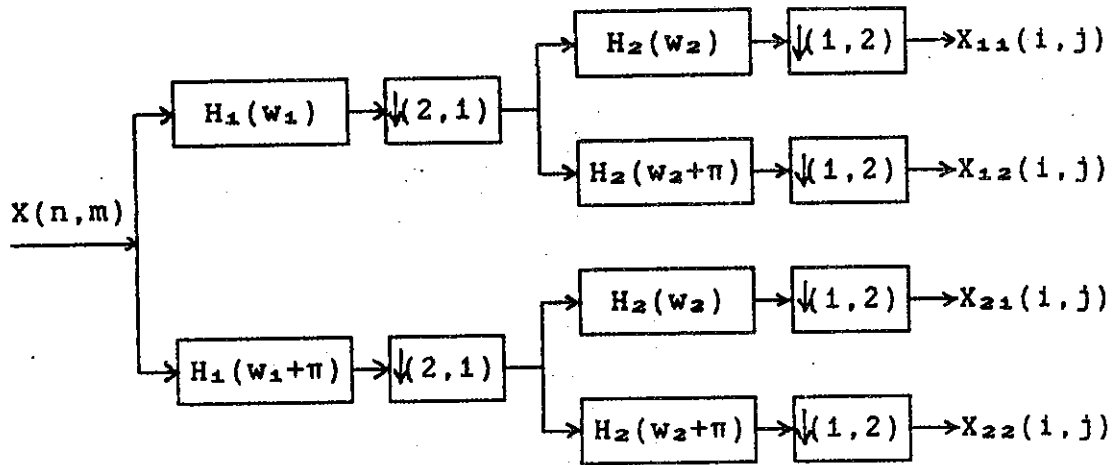
$$= \frac{1}{4} X(w_1, w_2) \cdot (H_1^2(w_1) - H_1^2(w_1 + \pi)) \cdot (H_2^2(w_2) - H_2^2(w_2 + \pi))$$

מחוך (1.31) נקבל שבחירת $H_1(w)$ ו- $H_2(w)$ בתור מסננים סימטריים באורכים N_1, N_2 , בהתאמה (N_1, N_2) זוגיים) מביאה לכך שהתנאים על $H_1(w)$ ו- $H_2(w)$ כך שתתקבל מערכת יחידה הם:

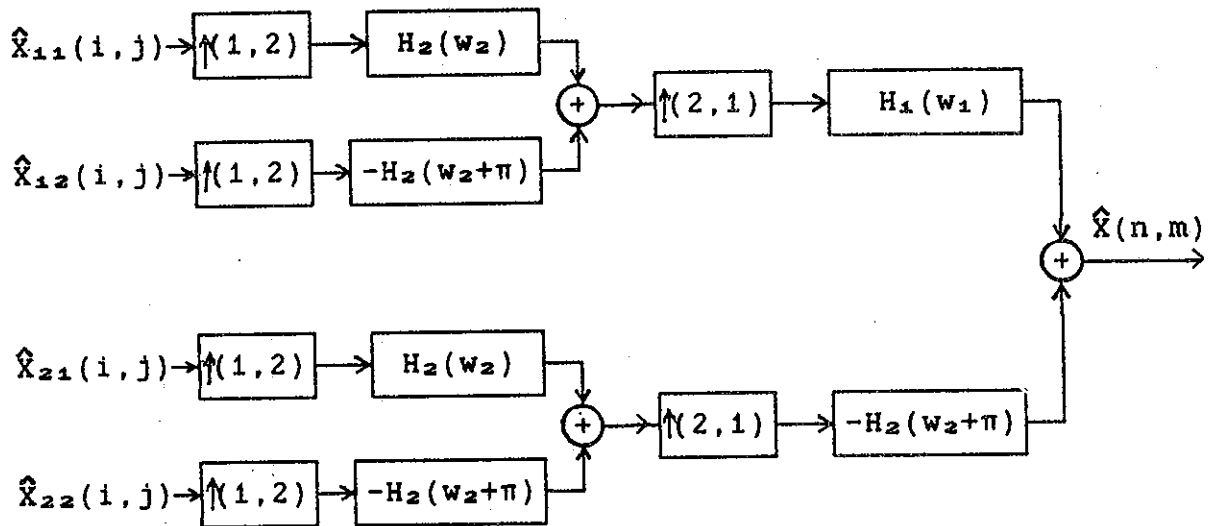
$$|H_1(w)|^2 + |H_1(w + \pi)|^2 = 2 \quad i=1, 2 \quad (1.32)$$

התנאי זהה לזה שהתקיים ב- (1.14) ולכן נוה להשתמש במסנני QMF שחוכנו למערך חד-מימדי.

בחירת $H(w_1, w_2)$ ספרבילי מאפשר להוריד את סיבוכיות החישוב. תחילה מבוצעים סינון והורדת קצב בכיוון השורות ואח"כ סינון והורדת קצב בכיוון העמודות. הסכימה המפורטת לדרגה בסיסית, אנליזה וסינטזה, מתוארת בצירור 1.10.



ANALYSIS - אַנליזה



SYNTHESIS - סינטזה

FIGURE 1.10 - ציור 1.10

מאחר והסינון מתבצע לאורך שורות ולאחר מכן לאורך עמודות כל אחד מתהליכי הסינון יכול להתבצע באמצעות מבנה פוליפאזה שחואר בציור 1.7.

בדומה למקרה החד-מימדי ניתן להשתמש בדרגה הבסיסית במבנה עץ לקבלת פסים צרים יותר.

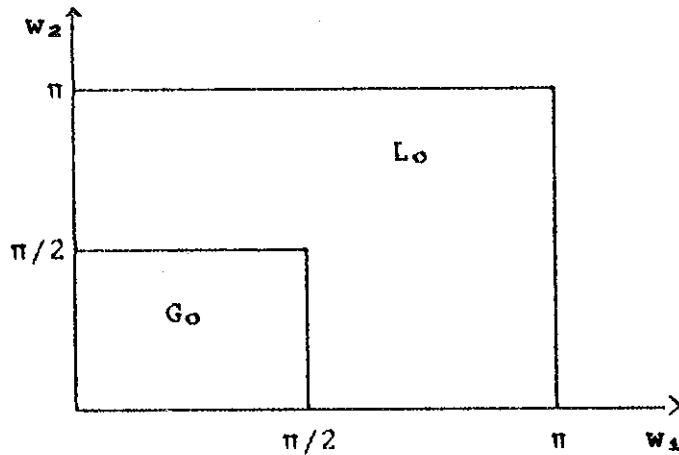
כמות החישובים, הנדרשת להפעלת מערך מסננים על תמונה בגודל $N \times N$ ואורכי מסננים $N_1 = N_2 = L$ במימוש יעיל היא LN^2 כפלים לחיבורים לדרגת האנליזה ו- LN^2 כפלים לדרגת הסינטזה שה"כ $2LN^2$ כפלים לחיבורים ממשיים או $2L$ כפלים לחיבורים ל-PIXEL.

העובדה שהאות הדו-מימדי הוא תמונה מאפשרת להשתמש במסנני FIR שאינם בהכרח סיבתיים. יחד עם זאת, מאחר והמבנה הדו-מימדי שחואר מתאים למסננים באורך זוגי בלבד. השהיית המופע לאחר האנליזה היא לפחות $\frac{1}{2}$ בכל כיוון ולאחר הסינטזה נקבל השהייה של לפחות דגם אחד בכל כיוון, ז"א: $\hat{X}(n,m) = X(n-1,m-1)$ ובשימוש במבנה עץ לא סימטרי יש לבצע הזזה מתאימה בשיחזור כדי לשלב פסי חדר שהתקבלו עקב סינטזה של פסי חדר צרים יחד עם פסי חדר שלא פוצלו.

ניתן להימנע מהשהייה זו ע"י הרחבת הדרגה הבסיסית שהתקבלה בבחירה (1.16) עבור מסננים באורך אי-זוגי, אלא שבחירה זו לא ניתן לממש באמצעות מבנה הפוליפאזה.

1.4 הפרדה לחזומי חדר באמצעות הפירמידה הלאפליאנית [7]:

בניגוד לדרגה הבסיסית במערך QMF דו-מימדי, השלב הבסיסי בפירמידה מפריד את התמונה לשני פסי חדר כפי שמחואר בציור 1.11.



ציור 1.11: תחומי החדר בפירמידה
FIGURE 1.11: SUBBANDS OF THE PYRAMID

$$G_0(n,m) = \sum_{1,j} X(1,j) h(2n-1, 2m-j) \quad \text{כאשר:}$$

$$L_0(n,m) = X(n,m) - \text{EXPAND}(G_0(n,m))$$

והאופרטור EXPAND פירושו העלאת קצב ע"י הוספת אפסים $(\uparrow(2,2))$ וסינון באמצעות $h(n,m)$. יש לשים לב ש- $G_0(n,m)$ מייצג תחום חדרים נמוך ולכן התוצעה הורדת קצב $(\downarrow(2,2))$. לאחר קידוד G_0 ו- L_0 ושיחזורם מתקבלים \hat{G}_0 ו- \hat{L}_0 . מחוץ \hat{G}_0 ו- \hat{L}_0 ניתן לשחזר את $X(n,m)$ ולקבל את $\hat{X}(n,m)$ ע"י: $\hat{X}(n,m) = \hat{L}_0(n,m) + \text{EXPAND}(\hat{G}_0(n,m))$

הפרדה נוספת מחקבלת ע"י הפעלת הדרגה הבסיסית של G_0 והפסים המתקבלים הם: G_1 ו- L_1 . בצורה זאת מתקבלת הפרדה לפסים בצורה אוקטבית. ביציאת כל דרגה בסיסית, L_1 מקודד ואילו G_1 מחווה כניסה לדרגה הבאה או בדרגה האחרונה מקודד. ניתן להראות כי תהליך השיחזור שחואר מבטיח כי כאשר אין קידוד המערכת מחווה מערכת יחידה, ללא תלות בגודל גרעין החפרדה $h(n,m)$.

היתרון בשיטה זו, להפרדה לפסים, הוא שמתקבלת מערכת יחידה גם כאשר המסנן קצר ובכך מתאפשרת הקטנת סיבוכיות החישוב. החסרון העיקרי הוא בכך שלא ניתן לבצע הורדת קצב ל L_1 ולכן היחס בין מספר הדגמים לקידוד לבין מספר הדגמים בתמונה הוא לפחות 1.25.

בפרק הבא נתאר מערכות לקידוד תמונות המבוססות על מערכי המסננים שתוארו בפרק זה.

פרק 2. קידוד תמונות בתחומי חדר נפרדים

בפרק זה נתאר מערכות לקידוד תמונות המתבססות על מערכי מסננים שתוארו בפרק הקודם. בסעיף 2.1 מתוארת מערכת המתבססת על הרחבת STFT לשני מימדים, בסעיף 2.2 מתוארת מערכת קידוד תמונה המשתמשת בפירמידה הלפלאסיאנית ובסעיף 2.3 מתוארת מערכת המבוססת על הפרדה לתחומי חדר באמצעות מערך QMF דו-מימדי.

2.1 קידוד חוץ שימוש במערך מסננים אחיד דו-מימדי:

בסעיף 1.1 הוזכרה הגישה האקויוולנטית למערך מסננים אחיד הנקראת STFT. ב-[8] ו-[9] מתוארת הרחבת STFT לאותות רב מימדיים ונקראת SSFT (SHORT SPACE F.T). יציאת כל ערוץ ממערך מסנני האנליזה מוגדרת באופן הבא:

$$X_{k_1, k_2}(m_1, m_2) = \sum_{l_1=-\infty}^{\infty} \sum_{l_2=-\infty}^{\infty} h(m_1 M_1 - l_1, m_2 M_2 - l_2).$$

$$X(l_1, l_2) e^{-j\left(\frac{2\pi}{K_1} k_1 l_1 + \frac{2\pi}{K_2} k_2 l_2\right)}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= 0, \dots, K_1-1 & \text{כאשר:} \\ k_2 &= 0, \dots, K_2-1 \end{aligned}$$

מספר המסננים במערך הוא: $K_1 \cdot K_2$ והורדת הקצב היא (M_1, M_2) . שיחזור $X(m, n)$ מחוץ תחומי החדר מתקבל ע"י העלאת קצב ע"י ריפוד באפסים $\hat{X}(M_1, M_2)$, סינון ומודולציה.

$$\hat{X}(m, n) = \sum_{k_1=0}^{K_1-1} \sum_{k_2=0}^{K_2-1} \left[y_{k_1, k_2}(m, n) * g(m, n) \right].$$

$$e^{+j\left(\frac{2\pi}{K_1} k_1 m + \frac{2\pi}{K_2} k_2 n\right)}$$

$$y_{k_1, k_2}(m, n) \triangleq \begin{cases} X_{k_1, k_2}\left(\frac{m}{M_1}, \frac{n}{M_2}\right) & n = \pm 0, M_1, 2M_1, 3M_1 \\ & m = \pm 0, M_2, 2M_2, 3M_2 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ב-[9] מתוארת סכימת מימוש דו-מימדית יעילה שמהווה הרחבה למבנה POLY-PHASE שתואר בסעיף 1.1.

הדוגמא לקידוד המתוארת ב-[8] מוצעת על תמונת פנים בגודל 256×256 . ההפרדה היא ל-256 תחומי תדר (16×16). הקצאת הסיביות בהתאם לוריאנס של כל תחום (ראה נספח א'), האמפליטודה של הפסים מקודדת באמצעות הקונטיזר של MAX לפילוג ריילי והפאזה באמצעות קונטיזר יוניפורמי. התקבל ב- $SNR=21.3dB$, $0.35b/p$ ובאדפטציה של הקצאת הסיביות התקבל ב- $SNR = 22dB$, $0.29b/p$. בעבודה ה-SNR מחושב בצורה הבאה:

$$SNR[dB] = 10 \log_{10} [255^2/mse]$$

התוצאות שהתקבלו טובות גם בהשוואה לקידוד אותה תמונה באמצעות DCT גבלוקים 16×16 . הקצאת הסיביות התבצעה גם כן לפי ואריאנס רכיב התדר ואילו רכיבי התדר קודדו באמצעות הקונטיזר של MAX לפילוג גאוס. התוצאה שהתקבלה ב- $0.35b/p$ היא $SNR = 20dB$. התוצאות שהתקבלו באמצעות מערך המסננים טובות יותר לא רק ב-SNR אלא גם מבחינה סוביקטיבית. לא קיימת בעיה של בלוקים הבולטים בגלל עיוות גדול כמו ב-DCT, כמו כן הפרטים נראים ברורים יותר.

2.2 קידוד באמצעות הפירמידה הלאפליטאנית:

מטרת המערכת המתוארת ב-[7] היא לקודד את התמונה בקצב נמוך כך שהעיוות הנראה לעין יהיה קטן מאד. לצורך הקטנת סיבוכיות החישוב ההפרדה לתחומי תדר מתבצעת באמצעות מסנן ספרבילי סימטרי באורך 5×5 .

הקידוד מתבצע באופן הבא: כל תחום תדר מקודד באמצעות קונטיזר יוניפורמי, בעל מספר רמות וצעד קונטיזציה המותאמים לו. באמצעות צופה מחליטים מה מספר רמות הקונטיזציה המינימליות הנדרשות לקבלת עיוות בלתי נראה לעין וכך גם נקבע צעד הקונטיזציה. השלב האחרון הוא קידוד באורך משתנה המתבקש מהעובדה שפילוג הפס כפי שבא לידי ביטוי בהיסטוגרמה אינו אחיד, אלא מצטופף סביב הראשית. ניתן לחזור על תהליך זה עבור מספר רב של תמונות השייכות לאותה קבוצה, למשל: תמונות פנים ומתוך התוצאות לקבוע את הקונטיזר המתאים לכל תחום תדר. הקונטיזרים שמתקבלים ישמשו לקידוד תמונות מאותה קבוצה.

ב-[7] מתוארות תוצאות שהתקבלו מקידוד שתי תמונות פנים שונות כאשר האחת הנקראת "LADY" (256×256) ומופיעה בדוגמא גם בסעיף הבא וגם במערכת המוצעת בפרקים 4 ו-5 והשניה נקראת "WALTER". בכל אחת מהתמונות הקידוד מתבצע באמצעות קונטיזרים שהותאמו לתחומי התדר, בתמונה.

כאשר השתמשו ב-9 שלבים בפירמידה (9 תחומי תדר) התקבל כי בקצב $1.58b/p$ עבור "LADY" ובקצב $0.73b/p$ בקידוד "WALTER" ההבדלים בין התמונות המקוריות למשוחזרות כמעט ולא נראים לעין.

ניתן להגיע לתוצאות אלו למרות שסה"כ כמות הפיקסלים לקידוד המתקבל לאחר ההפרדה לתחומי תדר גדול מזה של התמונה בזכות העובדה שרב הפיקסלים שייכים לתחומי תדר גבוהים בהם הואריאנס והאנתרופיה נמוכים יחסית ולכן כמות הסיביות הנדרשת לקידוד פיקסל יחיד קטנה.

כחומר בסעיף 1.3 ניתן להפריד את התמונה לתחומי תדר באמצעות מערך QMF דו-מימדי. המערכת המתוארת בסעיף זה משתמשת במערך זה לקבלת 16 תחומי תדר אחידים ברוחבם (2 דרגות). כל תחום תדר מהווה תמונה בגודל $N/4 * N/4$ ($N * N$ גודל התמונה המקורית). הקידוד מתבצע במישור התמונה באמצעות DPCM. לכל תחום תדר מותאם DPCM נפרד.

התאמת ה-DPCM פירושה מציאת החזאי הלינארי וקביעת הקונטינר. החזאי הלינארי הוא מסדר 1,1, ז"א: החיזוי מתבצע על סמך הפיקסל הצמוד בשורה הקודמת והפיקסל הצמוד בעמודה הקודמת. מספר רמות הקונטינרציה נקבע על סמך הוריאנסים כחומר בנספח א' ואילו רמות היוצג וההחלטה של הקונטינר נקבעות על סמך פילוג תחום החדר.

היתרון בשיטה זו על פני קידוד התמונה המקורית באמצעות DPCM הוא בכך שבאמצעות הקצאת הסיביות בין תחומי החדר ניתן להתאים את הצפיפות הספקטרלית של שגיאת הקידוד לרגישות מערכת הראיה ובכך להשיג איכות סובייקטיבית טובה יותר. זאת בניגוד לקידוד באמצעות DPCM של התמונה המקורית שם נקבל שהצפיפות הספקטרלית של השגיאה היא בקירוב שטוחה.

יתרון נוסף לקידוד בתחומי החדר הוא בכך שהפרדה לתחומים מאפשרת שימוש בחזאים מסדר נמוך יותר שכן הצפיפות הספקטרלית של כל תחום תדר שטוחה יותר, באופן יחסי לצפיפות הספקטרלית של התמונה המקורית.

כאשר מספר תחומי החדר גדול מאוד וגודל התחומים קטן, ניתן לבצע בחלק מהפסים PCM או APCM ולא DPCM מבלי שתהיה הגדלה של העיוות.

ב-[5] מראים שהסטוגרמת אות שגיאת החיזוי בכל אחד מתחומי החדר קרובה מאד לפילוג פלס ולכן מתאימים את הקונטינר ב-DPCM להיות הקונטינר האופטימלי לפילוג זה.

במערכת המתוארת הקידוד מתבצע על תמונות בגודל 256×256 . ההפרדה לתחומים בוצעה על לוגריתם העוצמות של הפיקסלים בתמונה. ההפרדה בוצעה באמצעות מסנני QMF ספרביליים בגודל 32×32 בשתי הדרגות.

בתהליך הקצאת הסיביות מאלצים את מספר רמות הקונטינר ב-4 תחומי החדר הנמוכים להיות אחד מתוך המספרים הבאים: 2, 4, 8, 16, 32. ביתר תחומי החדר מספר הרמות נקבע אחד מהמספרים הבאים: 2, 4, 8, 16, 32, 5, 8, 16, 32. בתחומים אלו כאשר נקבע כי כמות הסיביות לפיקסל היא 1 או 2 בוצע שימוש בקונטינר בעל 3 או 5 רמות אשר ביציאתו קידוד באורך משתנה של מספר הרמות שנקבעו.

בקידוד התמונה "LADY" התקבלו התוצאות הבאות: עבור $SNR = 29.4dB$ $R = 0.67b/p$ ועבור $SNR = 31.4dB$ $R = 1.0b/p$. מתוך כוונה לבדוק את האיכות הסובייקטיבית של התוצאות הללו מומשה המערכת המתוארת בהבדלים הבאים:

א. ההפרדה לתחומים התבצעה על התמונה המקורית ולא על לוגריתם עוצמת הפיקסלים בתמונה.

ב. מספר רמות הקונטינרציה האפשריות מוגבל להיות אחד מהמספרים הבאים בלבד: 2, 4, 8, 16 או 32 ולא בוצע קידוד אנטרופיה.

בקצב $R = 1.0b/p$ התקבל $SNR = 30dB$. התוצאה הסובייקטיבית היא שניתן להבחין בהבדלים בין התמונות ורעש בתמונה המשוחזרת הוא בעל אופי "גרגרי".

ב-[5] בוצעה אדפטציה של הקצאת הסיבית ומקדמי החיזוי בתוך כל תחום המתבקשת מהעובדה שהתמונה איננה מתקבלת ממקור סטציונרי ולכן איזורים מסויימים בכל תח תמונה יכולים להיות בעלי איפיונים שונים. יכולים להיות איזורים חלקים ויכולים להיות איזורים בעלי שינויים מהירים כמו באיזורי EDGE.

בתהליך האדפטציה כל תחום תדר חולק ל-16 בלוקים שונים, אותם יש לסווג ל-3 קבוצות. קבוצה המכילה בלוקים בעלי ואריאנס נמוך, קבוצה אליה שייכים בלוקים בעלי ואריאנס בתחום ביניים וקבוצה הכוללת בלוקים שלהם ואריאנס גבוה. הספים שלפיהם מתבצע שיוך בלוק לקבוצה, נקבעים כך שמספר הבלוקים בכל קבוצה, יהיה בקירוב שווה. לכל הבלוקים באותה קטגוריה בתחום מסויים מקצים אותו מספר סיביות ומשתמשים באותו חזאי. הקצאת הסיביות מתבצעת על סמך 48 (16X3) הוריאנטים של שגיאות החיזוי.

כתוצאה מהאדפטציה התקבל שיפור של כ-1dB בניצועים, בקצבים השונים.

קצב הקידוד, במספר רב של תחומי תדר הוא נמוך. בפסים אלו קידוד סקלרי רחוק בניצועים מפונקצית קצב העיוות. בכדי להתקרב לפונקצית קצב העיוות יש להשתמש במקודד וקטורי, המותאם לתחום התדר המקודד. המערכת המוצעת בעבודה זו ומתוארת בפרק 4 משתמשת במקודד וקטורי מסוג TRELIS. שיטת הקידוד בעזרת ה-TRELIS מתוארת בפרק הבא.

פרק 3. רקע: קידוד באמצעות TRELLIS

לצורך חיבור מבנה ה-TRELLIS נקדים ונחאר מבנה עץ קידוד. בטעיף 3.1 נחאר את ה-TRELLIS כמקרה פרטי של העץ. בצורה הכללית ביותר העץ מתחיל מצומת אחת, ממנה מתפצלים q ענפים. בדרגה הבאה מכל ענף מתפצלים q ענפים נוספים. כך מדרגה לדרגה העץ מתרחב ומספר הענפים בו גדל. כל ענף מאוכלס בוקטור \underline{u} באורך n , המכיל את n מילות הקוד המאכלסות את הענף. ערכי הוקטור \underline{u} הם פונקציה של המסלול המוביל לענף עליו נמצא הוקטור. מספר דרגות העץ, הנקרא גם עומק העץ, הוא L . בצירור 3.1 נחונה דוגמא לעץ בעל $q = 2$ ו- $L = 3$.

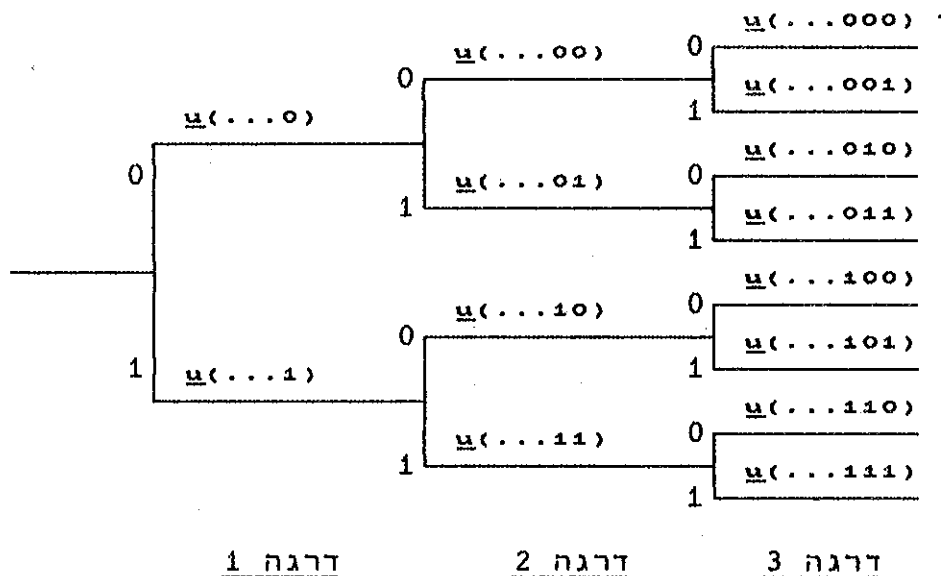
המקודד מקודד כל פעם וקטור באורך nL דגמים מהמקור. בתהליך הקידוד מחפשים את המסלול בעץ עבורו מתקבל מינימום ל: $d(\underline{X}, \hat{\underline{X}})$. כאשר \underline{X} וקטור מהמקור באורך nL דגמים, $\hat{\underline{X}}$ הוא וקטור המספרים הנמצאים על המסלול ו- $d(\underline{X}, \underline{Y})$ מקיים:

$$d(\underline{X}, \underline{Y}) = \frac{1}{nL} \sum_{i=1}^{nL} d(X_i, Y_i) \quad (3.1)$$

$$\underline{X} = (X_1, X_2, \dots, X_{nL})$$

$$\underline{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_{nL})$$

המקודד משדר למפענח את המסלול. העתק של העץ הנמצא במקודד נמצא גם במפענח. המפענח מקבל את המסלול ששודר ע"י המקודד ומשחזר ממנו את $\hat{\underline{X}}$.



צירור 3.1: עץ קידוד
FIGURE 3.1: TREE CODER

המשך הפרק ייחד לקידוד באמצעות TRELLIS.

סעיף 3.2 מכיל סקירת אלגוריתמי חיפוש ב-TRELLIS. האלגוריתמים נחלקים ל-2 סוגים: אלגוריתמי חיפוש מקביליים ואלגוריתמי חיפוש סידרתיים.

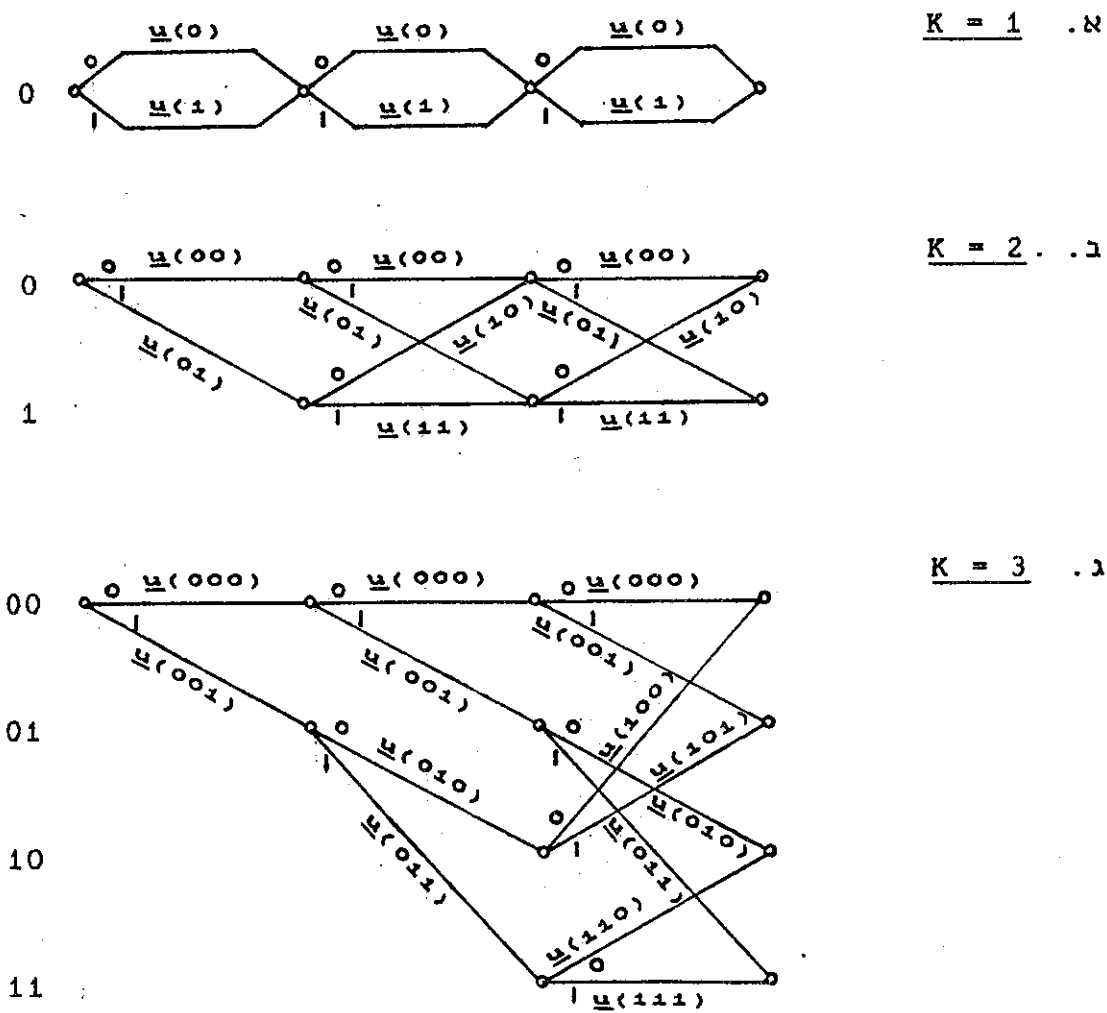
בסעיף 3.3 מחוארות דרכים לאיכלוס ה-TRELLIS, כך שבמבנה TRELLIS נחון, יתקרבו ביצועי המערכת (מקודד ומפענח) לפונקציית קצב העיוות $(R(D))$.

בסעיף 3.4 ניחנת המוטיבציה לקידוד ב-TRELLIS על פני VQ וכן מתבצע השוואת הסיבוכיות בין האפשרויות הנ"ל לקידוד הוקטורי.

3.1 מבנה TRELLIS:

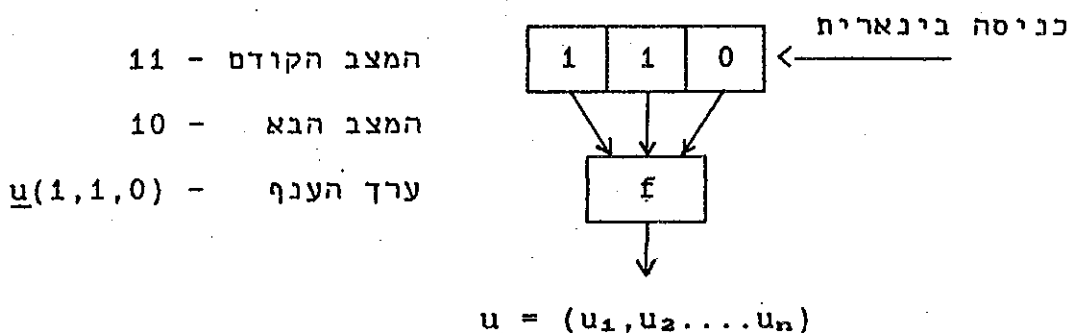
ה-TRELLIS הוא מבנה הניתן לתיאור כמקרה פרטי של העץ שהוצג בסעיף קודם. בעץ שתואר ערך כל ענף הוא וקטור \underline{u} התלוי במסלול המוביל לענף. ה-TRELLIS הוא העץ המתקבל במקרה הפרטי שבו \underline{u} הוא פונקציה של K האיברים האחרונים במסלול. במקרה זה קיימים בדרגות $K + 1$ והלאה, ענפים זהים הנובעים מכך ש- K האיברים האחרונים המתארים מסלולים שונים, זהים. מסלולים אלו ניתן לאחד החל מהענף הראשון הזהה וזאת משום שהענפים המתפצלים מענפים שווים גם כן יהיו תואמים.

ציור 3.2 מתאר את ה-TRELLIS המתקבל מתוך העץ המתואר בציור 3.1 ($q = 2$). במקרה א: $K = 1$, ב: $K = 2$ ו-ג: $K = 3$.



ציור 3.2 - TRELLIS - FIGURE 3.2

מציור 3.2 ניתן לראות שב-K הדרגות הראשונות מחפצל העץ בצורה מלאה והחל מהדרגה ה- $K + 1$ מתאחדים מסלולים. סה"כ מספר הענפים השונים בכל דרגה החל מהדרגה ה-K הוא q^K ומספר הצמתות מהם מתפצלים ענפים אלו הוא q^{K-1} . בציור 3.2 מוספרו הצמתות הנ"ל משמאל ל-TRELLIS. צמתות אלו נקראים גם מצבים, בגלל שה-TRELLIS ניתן לתיאור באמצעות SHIFT REGISTER המהווה מכונת מצבים. אורך ה-SHIFT REGISTER הוא K ובו מוכלים K האיברים האחרונים במסלול עד לענף. כל איבר הוא מספר בתחום $0:q-1$. K-1 האיברים השמאליים קובעים את המצב ממנו יצא הענף, K-1 האיברים הימניים קובעים את המצב אליו יכנס הענף ו-u מתקבל כפונקציה של כל איברי ה-S.R. בציור 3.3 מתואר המקרה בו $q = 2, K = 3$.



ציור 3.3: ה-S.R. המתאר את מבנה ה-TRELLIS
 FIGURE 3.3: THE S.R THAT DESCRIBES THE TRELLIS STRUCTURE

בתיאור ה-TRELLIS עד כה התייחסנו למקרה בו f היא פונקציה קבועה לכל הדרגות. במקרה זה המבנה נקרא TRELLIS קבוע בזמן. אולם ייתכן מצב שבו f משתנה בזמן ונסמנה ב- f_1 , כאשר i הוא אינדקס הדרגה. במקרה זה המבנה נקרא TRELLIS משתנה בזמן והוקטורים היושבים על הענף בדרגה ה-i יסומנו ב- \underline{u}_i .

תהליך הקידוד זהה לקידוד במבנה עץ כללי. למפענח ישלה המסלול עבורו מתקבל העיוות הקטן ביותר. המפענח יכול להכיל מבנה TRELLIS זהה אשר ממנו ומהמסלול שנשלח יתקבל האות המשוחרר. במקרה שבו ה-TRELLIS קבוע בזמן מספיק לשמור במפענח טבלה, בגודל q^K שורות שכל אחת מכילה n דגמי יציאה. המסלול המתקבל מהמפענח מוכנס באופן סידרתי ל-SHIFT-REGISTER. כל פעם שמוכנס איבר חדש ל-S.R תוכן ה-S.R המתקבל מהווה אינדקס לשורה המתאימה בטבלה, ותוכן השורה הוא n דגמים משוחררים. לתהליך פיענוח כזה יתרון בפשטות המימוש וכמות הזכרון הנדרשת.

קצב הקידוד חלוי בפרמטרי ה-TRELLIS בהתאם ל-(3.2).

$$R = \frac{\log_2 q}{n} \text{ BITS/SOURCE SYMBOL} \quad (3.2)$$

קבלנו שהקצב חלוי ב-q וב-n בלבד. ייתכנו ערכים שונים של q ו-n אשר עבורם הקצב שווה. לגודל ה-S.R, K, ולעומק ה-TRELLIS, L, אין השפעה על הקצב. בסעיפים הבאים נתייחס גם להשפעת הפרמטרים q, n, K ו-L, על סיבוכיות הקידוד והפיענוח ועל ביצועי המקודד.

בהמשך לא נתייחס לקידוד באמצעות עץ כללי אלא נתמקד ב-TRELLIS בלבד מהסיבה, שלמרות היותו מקרה פרטי ובעל מספר מצבים קבוע בכל הדרגות, קיימים משפטי צפינה שיתוארו בהמשך המבטיחים שקיים קוד TRELLIS עבורו ביצועי המקודד מתקרבים, קרוב כרצוננו, לפונקציית קצב העיוות.

3.2 אלגוריתמי חיפוש ב-TRELLIS:

אלגוריתמי החיפוש המתוארים בהמשך, נחלקים לשני סוגים עיקריים:

א. אלגוריתמים מקבילים בהם מתבצע חיפוש של מספר ענפים באותה דרגה ורק לאחר מכן מתבצע חיפוש בדרגה הבאה. בסוג זה נכללים האלגוריתמים M ו-ML, VITERBI.

ב. אלגוריתמים סידרתיים בהם החיפוש מתבצע על ענפים המתפצלים מענף בדרגה מסוימת מבלי להתייחס לענפים נוספים באותה דרגה. על סוג זה נימנים האלגוריתמים GALLAGER ו-A*.

האלגוריתם של VITERBI [22]:

האלגוריתם של VITERBI הוא האלגוריתם היחיד מבין האלגוריתמים המתוארים בסעיף זה, אשר באמצעותו מתבצע חיפוש מלא ב-TRELLIS. הוא גם היחיד שאינו ניתן למימוש בעץ רגיל אלא רק במקרה שמספר המצבים קבוע בכל הדרגות כמו ב-TRELLIS.

נניח כי ידועים המסלולים האופטימליים מהדרגה הראשונה עד לכל אחד מהמצבים, j, בדרגה ה-1. נסמן את העיוות שהתקבל במסלול זה $d^*(j, 1)$. נבדוק מהם המסלולים האופטימליים מהדרגה הראשונה עד כל אחד מהמצבים בדרגה ה-1+1. המסלול למצב j בדרגה ה-1+1 יכול לעבור דרך q מצבים שונים בדרגה ה-1. נסמן מצבים אלו ב- j_k כאשר $1 \leq k \leq q$. הענף המחבר את מצב j_k בדרגה ה-1 עם מצב j בדרגה ה-1+1 תורם עיוות $d(j_k)$. לכן העיוות המינימלי מתקבל בצורה הבאה:

$$d^*(j, 1+1) = \min_k [d^*(j_k, 1) + d(j_k)] \quad (3.3)$$

ומכאן שהמסלול האופטימלי מתקבל מתוך k שמקיים את המינימום k^* , ז"א, המסלול האופטימלי מורכב מהמסלול האופטימלי עד j_{k^*} בדרגה ה-1 והענף המחבר את j_{k^*} עם j בדרגה ה-1+1.

קבלנו שהפתרון הוא רקורסיבי, לכן בכדי למצוא את המסלול האופטימלי מהדרגה הראשונה לדרגה האחרונה, L, נמצא את המסלולים האופטימליים מהדרגה הראשונה עד כל אחד המצבים בדרגה השניה, מהם נמצא המסלולים האופטימליים לדרגה השלישית, וכך הלאה, עד לדרגה האחרונה.

המסלול האופטימלי נקבע בדרגה L. יש למצוא את המצב עבורו מתקבל:

$$j^* = \arg \min_j [d^*(j, L+1)] \quad (3.4)$$

בכל דרגה יש לשמור עבור כל מצב את a^* אשר מקשר למצב a^* בדרגה הקודמת. בצורה זו לאחר מציאת j^* , ניתן ע"י חזרה אחורה בדרגות לשחזר את המסלול.

כאשר ה-TRELLIS מתחיל ממצב אחד בלבד, מספיק לשדר את המסלול, אולם ניתן להגדיר את מבנה ה-TRELLIS כאילו הוא מתחיל מ- q^{K-1} מצבים. במקרה כזה יש צורך לשדר בחזרה אינפורמציה צד גם את המצב ממנו התחיל המסלול האופטימלי.

נבדוק את סיבוכיות האלגוריתם כפונקציה של פרמטרי ה-TRELLIS, במקרה בו מידת העיוות היא שגיאה ריבועית.

כמות זכרון: (בסיביות)		כמות החישובים: (לדגם)	
$n \cdot L \cdot q^K \cdot r_1$	* לאיחסון מילות הקוד	q^K	* כפלים וחיבורים
$2 \cdot q^{K-1} \cdot r_2$	* לאיחסון מידת העיוות	$\frac{q^K}{n}$	* פעולות השוואה לצורך מיון
$L \cdot q^{K-1} (\log_2 q)$	* לייצוג המסלולים האופטימליים		
r_1	- מספר הסיביות לייצוג מילת קוד.		
r_2	- מספר הסיביות לייצוג מילת עיוות.		

הנקודה הבולטת היא שהסיבוכיות (חישובים וכמות זכרון) גדלה אקספוננציאלית כפונקציה של אורך ה- K, S, R , וכמות הזכרון גדלה לינארית עם עומק ה-TRELLIS, L וגודל הוקטור אותו מקודדים, nL .

יתרון נוסף לאלגוריתם, בנוסף לעובדה שמתבצע חיפוש מלא, הוא בפשטות תכנון האלגוריתם ובכך שזמן החיפוש ב-TRELLIS קבוע.

אלגוריתם M [10]:

אלגוריתם M מהווה אלגוריתם תת-אופטימלי לחיפוש ב-TRELLIS. תת האופטימליות היא במובן זה שלא כל ה-TRELLIS נבדק. המוטיבציה לביצוע אלגוריתם תת-אופטימלי נובעת מהסיבוכיות הגדולה של VITERBI.

באלגוריתם M, בכל דרגה בוחרים M מצבים, בחור המצבים שמהם מתפצלים q מ M ענפים. ענפים אלו נכנסים למצבים בדרגה הבאה ומתוך מצבים אלו נבחר M מצבים בהם העיוות הוא הקטן ביותר. כך בכל הדרגות עד לדרגה האחרונה, בה יבחר המצב בעל העיוות הקטן ביותר ונקבל את המסלול הנבחר ע"י חזרה מהדרגה האחרונה לראשונה.

העוות שיתקבל במימוש אלגוריתם זה יהיה גדול יותר או שווה לעיוות שהתקבל מחיפוש מלא באמצעות אלגוריתם VITERBI, אך נצפה לכך שהעיוות לא יהיה גדול בהרבה שכן בכל דרגה נבחרים מסלולים בעלי הסתברות גבוהה להיות המסלולים בעלי העיוות הקטן ביותר או לפחות בעלי עיוות קטן.

חישוב סיבוכיות האלגוריתם

זכרון: (בסיביות)		כמות חישובים: (לדגם)	
$n \cdot L \cdot q^k \cdot r_1$	איחסון מילות הקוד	$M \cdot q$	כפלים וחיבורים
	טבלאות המצבים הטובים ביותר בכל דרגה	1	השוואה לצורך חיפוש
$L \cdot M \cdot \log_2(q^k - 1)$	טבלאות קישור בין הדרגות	$n \cdot Mq \cdot \log(Mq)$	
$L \cdot M \log M$	לאיחסון מידת העיוות		
$M \cdot q \cdot r_2$	VITERBI כמו באלגוריתם r_1, r_2		

הירידה המשמעותית בסיבוכיות נובעת מהקטנת הכפלים והחיבורים מ- q^k באלגוריתם VITERBI ל- $M \cdot q$ באלגוריתם זה. זאת כמובן בחנאי ש- $q^k - 1 > M$. במקרה בו $M = q^k - 1$ למעשה מתבצע ב-TRELLIS חיפוש מלא. יש לשים לב שקיימת חוספת סיבוכיות באלגוריתם זה הנובעת מהצורך בטבלה נוספת שהיא טבלת המצבים הטובים ביותר וכן בגלל תהליך מיון מסובך יותר.

אלגוריתם ML [10]:

בשני האלגוריתמים הקודמים שתוארו ההחלטה על המסלול הנבחר מתבצעת לאחר סיום חיפוש ב-L דרגות ולכן ההשתייה מגיעה עד ל-L דגמים ואינה אחידה ביחס לכל הדגמים. בכדי להתגבר על בעיה זו נקבע פרמטר 1. האלגוריתם ML זהה לאלגוריתם M פרט לכך שהחל מהדרגה ה-1+1 מבצעים החלטה על האיבר במסלול l דרגות אחורנית. ההחלטה מתבצעת על סמך המצב בעל העיוות הקטן ביותר מבין M המצבים בדרגה הנוכחית. לאחר ביצוע ההחלטה, משאירים בדרגה הנוכחית את המצבים שהתפצלו מהאיבר הנבחר בלבד. ממצבים אלו ממשיכים בתהליך לדרגה הבאה שם נבחרים M המצבים הטובים ביותר. כמו כן מתבצעת החלטה על קטע המסלול הנמצא l דרגות אחורנית וכך הלאה, עד לדרגה האחרונה.

הסיבוכיות גדלה מאד לעומת אלגוריתם M שכן בכל שלב יש להשאיר רק את המצבים שנבעו מקטע המסלול שנבחר l דרגות קודם. במקרה שרוצים לצמצם את הסיבוכיות אך לשמור על השהייה קטנה, ניתן לבצע החלטה אחת ל- l_1 דרגות על l_1 איברים במסלול, במקום בכל דרגה כמו באלגוריתם המקורי.

אלגוריתם GALLAGER [23]:

באלגוריתם זה החיפוש הוא סידרתי. נקבע סף לעיוות המותר. ממספרים את הענפים המתפצלים מכל מצב, $0:q-1$. יוצאים מהדרגה הראשונה, מענף הממוספר באינדקס הנמוך, מודדים את העיוות אם הוא קטן מהסף, ממשיכים במסלול לדרגה הבאה בה נבדק הענף בעל האינדקס הנמוך וכן הלאה עד שמתרחש מצב, שבו העיוות גדול מהסף. במקרה זה יש לבצע חזרה לענף בעל האינדקס הבא בסדר לקסיקוגרפי שלא הגיעו אליו במהלך החיפוש. המסלול שמגיע לדרגה L בלי לחרוג מהסף הוא המסלול הנבחר באלגוריתם.

האלגוריתם המוצע איננו יעיל ביותר שכן ניתן לבצע את החיפוש לפי סדר העיוותים ולא לפי סדר לקסיקוגרפי.

ב-[11] האלגוריתם שופר במספר דרכים:

א. הוגבל מספר הדרגות שמוותר לחזור חזרה וע"י כך מגבילים את גודל המחסנית הנדרשת לתיאור המסלול ומאפשרים שליחת חלק מהמסלול לפני שמגיעים לדרגה האחרונה. אפשרות אחרת היא להפסיק את האלגוריתם ולהתחיל את ביצועו מהתחלה תוך הגדלת הסף.

ב. החיפוש המוצע אכן מתבצע לפי סדר גודל העיוות של הענפים.

סיבוכיות האלגוריתם נמדדת במספר הענפים שאליהם הגיעו במהלך האלגוריתם, לאות מקור. האלגוריתם יעיל בקצבים נמוכים ($q = 2$). סיבוכיות האלגוריתם תלויה בסף שנקבע באות הכניסה ובמספר הדרגות שמוותר לחזור אחורה. במוצע, הסיבוכיות קטנה אך יש לשים לב לחסרון הבולט של האלגוריתם, מלבד היותו תת-אופטימלי והוא שההשהייה וזמן החיפוש אינם קבועים.

אלגוריתם A*:

מקורו של אלגוריתם A* הוא באנטליגנציה מלאכותית שם הוא משמש למטרות חיפוש בעצים, כאשר כמו באלגוריתם של GALLAGER שקולים היוריסטיים מנחים את החיפוש.

קיימות שתי רשימות:

רשימה א' - המכילה צמתים המועמדים לכך שהמסלול יעבור דרכם.

רשימה ב' - המכילה צמתים שבמהלך האלגוריתם עברו דרכם.

מתוך הרשימה הראשונה בוחרים את הצומת המבטיח ביותר, מוציאים אותו מרשימה א', מעבירים אותו לרשימה ב' ובמקומו מוסיפים לרשימה א' את הצמתים אליהם מגיעים מהענפים המתפצלים מהצומת הנבחר.

הקריטריון לבחירת הצומת מבוסס על שיערוך העיוות של המסלול העובר דרך הצומת. כאשר סה"כ העיוות מכיל את העיוות שהתקבל עד לצומת והעיוות המשוערך מהצומת עד לדרגה האחרונה.

אם רוצים שסיבוכיות החישוב תקטן יש להגביל את גודל רשימה א' ולא לאפשר חזרה ביותר ממספר מוגבל של דרגות אחורנית.

אלגוריתם זה כמו אלגוריתם GALLAGER יעיל בכך שכמות החיפוש הממוצעת קטנה, אך החסרון הוא שזמן החיפוש לא קבוע.

3.3 איכלוס ה-TRELLIS:

בסעיפים הקודמים תואר תהליך קידוד ופיענוח באמצעות TRELLIS תוך שימוש באלגוריתמי חיפוש שונים. בסעיף זה יתוארו דרכים לקבוע את מילוח הקוד המאכלס את ה-TRELLIS.

המטרה היא לבחור מילוח קוד ב-TRELLIS כך שעבור מקור סטציונרי נחון, תוחלת השגיאה בין האות המקודד לאות המשוחרר, \bar{D} , תהיה מינימלית וקרובה במידת האפשר לפונקציית קצב העיוות, $R(D)$, תחת אילוף מבנה TRELLIS נחון.

בהמשך הסעיף מתוארת גישות שונות לאיכלוס ה-TRELLIS הנובעות ממשפטי צפינה ל-TRELLIS.

3.3.1 איכלוס אקראי:

ב-[12] VITERBI & OMURA, מוצג משפט צפינה לקידוד מקור חסר זכרון באמצעות TRELLIS, לפיו:

לכל מקור סטציונרי וחסר זכרון ומידת עיוות לאות מקור החסומה ע"י d_b , קיים קוד TRELLIS משתנה בזמן בעל פרמטרים q ו- K , כך שתוחלת העיוות לאות מקור, \bar{D} , חסומה ע"י:

$$\bar{D} \leq D^* + \frac{-(K-1)E(R)}{d_b q} \frac{1}{[1-q^{-\epsilon E(R)}]^2}$$

כאשר :

$$d_B = \max_{X, \hat{X}} d(X, \hat{X}) < \infty \quad -$$

המקסימלי בין העיוות - העיוות המקסימלי בן אות המקור ליציאה.

$$R(D^*) \quad - \quad \text{פונקציית קצב העיוות של המקור.}$$

$$R = \frac{R(D^*)}{1 - \epsilon} \quad - \quad \text{ומכאן ש-} \epsilon > 0 \quad \text{כאשר } R > R(D^*)$$

$$E(R) \quad - \quad \text{חיובי כאשר } R > R(D^*)$$

הוכחה המשפט מתבססת על איכלוס ענפי ה-TRELLIS באקראי מתוך פילוג היציאה, $P^*(\hat{X})$, המתקבל מהפילוג המגשים את פונקציית קצב העיוות $P^*(\hat{X}|X)$ ע"י:

$$P^*(\hat{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} P^*(\hat{X}|X) \cdot P(X) dx$$

בחישוב החסם ל- \bar{D} מתבצע מיצוע על כל הצופנים המוגרלים באקראי מתוך $P^*(\hat{X})$ ומכך מתחייב שקיים לפחות צופן אחד המוגרל באקראי עבורו העיוות יקיים את החסם.

מתוך המשפט מתקבלת המוטיבציה לאיכלוס ענפי ה-TRELLIS במספרים המוגרלים מתוך הפילוג המגשים. אך יש להדגיש שהעיוות שמתקבל מקוד שנבחר באקראי לא בהכרח מקיים את החסם ובאופן מעשי יש לבצע מספר רב של הגרלות קוד ומתוכם לבחור את הקוד עבורו ממוצע העיוות המתקבל מקידוד מספר רב של וקטורי מקור, הוא הקטן ביותר.

מהמשפט מובטח, שקיים קוד TRELLIS משתנה בזמן, שעבורו תוחלת העיוות, \bar{D} , מתקרבת ל- D^* מלמעלה, לפחות באופן אקספוננציאלי לפי אורך ה- S, R, K . לכן נצפה שהגדלת מספר המצבים של ה-TRELLIS, תוביל לשיפור ביצועי המערכת.

המשפט ב-[12] מתייחס למקורות ומידות עיוות עבורם העיוות המקסימלי לאות מקור הוא סופי. קיום המשפט לא מובטח כאשר התנאי אינו מתקיים. לדוגמא: עבור מקורות לא חסומים (גאוס, לפלסיאן וכד') ומידת עיוות שגיאה ריבועית או שגיאה בערך מוחלט. ב-[13] הראו באופן אמפירי שעבור שגיאה ריבועית ומקור גאוס חסר זכרון יתקיים:

$$\bar{D} - D^* \approx B(R) \cdot q^{-KC(R)}$$

כאשר $C(R)$ ו- $B(R)$ התקבלו באופן אמפירי. הקוד התקבל באופן אקראי מהפילוג המגשים לפילוג הגאוס.

ב-[13] השוו את ביצועי אלגוריתם M והאלגוריתם של VITERBI. נבדק המקרה בו מספר הענפים לאות מקור שמקרים שני האלגוריתמים זהה, ז"א:

$$K_2 \\ q = q \cdot M$$

כאשר K_2 הוא גודל ה-S.R ב-TRELLIS שבו מתבצע חיפוש באמצעות אלגוריתם VITERBI ואילו K_1 גודל ה-S.R ב-TRELLIS בו מתבצע חיפוש באמצעות אלגוריתם M ומתקיים $K_2 < K_1$. החוצאות שהתקבלו כאשר $R = 1$ וכן כאשר $R = 2$ כי חיפוש באמצעות אלגוריתם M הביא למבצע עיוות קטן יותר ולמעשה נדרש מאלגוריתם VITERBI לבצע חיפוש בפי $2 + 2.5$ יותר ענפים מאשר באלגוריתם M בכדי להגיע לאותו עיוות. ניתן להסביר זאת בכך שכאשר מספר המצבים ב-TRELLIS קטן ומתבצע חיפוש באמצעות אלגוריתם VITERBI עלול להיווצר מצב בו שני מסלולים שסיכוייהם להיות בעלי העיוות הקטן ביותר גדולים, יתלכדו לאותו מצב ולכן יוחלט על אחד מבין השניים. לעומת זאת כאשר משתמשים ב-TRELLIS בעל מספר מצבים גדול יותר הסיכויים של שני המסלולים להיכנס לאותו מצב קטנים יותר וחיפוש באמצעות אלגוריתם M ישמר את שני המסלולים שימשיכו ויפוצלו בנפרד.

ב-[14] מחוואר שימוש באיכלוס אקראי ל-TRELLIS לקידוד מקור גאוסי סטציונרי בעל צפיפות ספקטרלית חסומה (המקור לא בהכרח חסר זכרון). במקרה זה מבצעים על וקטור מקור X באורך N טרנספורמציות K-L (KARHUNEN-LOEVE) ומתקבל וקטור V באורך N אותו מקודדים באמצעות ה-TRELLIS. מפענחים אותו ומקבלים את V , ו- X מתקבל מ- V ע"י התמרת K-L הפוכה. רכיבי הוקטור V , V_i הם גאוסיים בת"ס בעלי שונות: σ_i^2 , ופונקציית קצב העיוות למקור מקיימת:

$$D(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N d^l(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \min(\theta, \lambda_l) \quad (3.5.1)$$

$$R_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N r^l(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{l=1}^N \max\left[0, \frac{1}{2} \log_2 \frac{\lambda_l}{\theta}\right] \quad (3.5.2)$$

ה-TRELLIS שונה מזה שהוגדר בסעיף 3.1 בכך ש- n משתנה מדרגה לדרגה. נסמן ב- n_m את מספר רכיבי הוקטור המקודדים בדרגה ה- m , מכאן שכל אחד מהם מקודד בקצב $R_m = \log_2 q / n_m$. הגודל n_m נקבע כך שיתאים לקצבים r^l של רכיבי הוקטור V_i המקודדים בדרגה m . q^m מילות הקוד המתאימות לרכיב הוקטור V_i , נבחרות באקראי מחוך הפילוג המגשים, המפולג $N(0, \sigma_l^2 - \theta)$. ב-[14] קיים גם משפט צפינה המבטיח כי קיים קוד המוגרל באקראי באופן שחואר, כך שאם $R > R(D_\theta)$, ניתן להתקרב בניצוועי הקוד ל- D_θ וההתכנסות היא לפחות אקספוננציאלית לפי K .

בסעיף הקודם הוצג משפט צפינה ל-TRELLIS משתנה בזמן. בסעיף זה ובסעיף 3.3.3 נדון בדרכים לאיכלוס TRELLIS קבוע בזמן. היתרון של TRELLIS קבוע בזמן על פני TRELLIS משתנה בזמן הוא בכמות הזכרון הנדרשת לצורך הקידוד ובפשטות תהליך הפיענוח, כמוסבר בסעיף 3.1.

ב-[15] מוצג משפט צפינה למקורות ארגודיים המקודדים באמצעות TRELLIS קבוע בזמן לפיו:

יהיה X מקור ארגודי ו- d מידת עיוות כמתואר ב-3.1. אזי לכל $\epsilon > 0$ ו- R , עבור K ו- L גדולים מספיק, קיים TRELLIS קבוע בזמן, כך שתוחלת העיוות המינימלי, \bar{D} , בין X ו- \hat{X} מקיימת:

$$\bar{D} \leq D(R) + \epsilon$$

המשפט מבטיח שקיימת פונקציה f במפענח, המגדירה TRELLIS קבוע בזמן, כך שתוחלת העיוות תהיה קרובה כרצוננו לפונקציה קצב העיוות. במשפט לא מוצעת דרך למציאת f , ואין מדד למידת ההתקרבות לפונקציה קצב העיוות כפונקציה של פרמטרי ה-TRELLIS q, K ו- L . יש לשים לב לעובדה שהמשפט מתייחס למקורות ארגודיים ולא למקורות מסוג i.i.d בלבד כפי שמופיע ב-[12].

ב-[18] מוכיחים שתנאים הכרחיים לכך שתוחלת העיוות D תהיה קרובה ל- $D(R)$ הם:

$$F_x(x) \approx F_{\hat{x}}(x) \quad \forall x \quad (3.6)$$

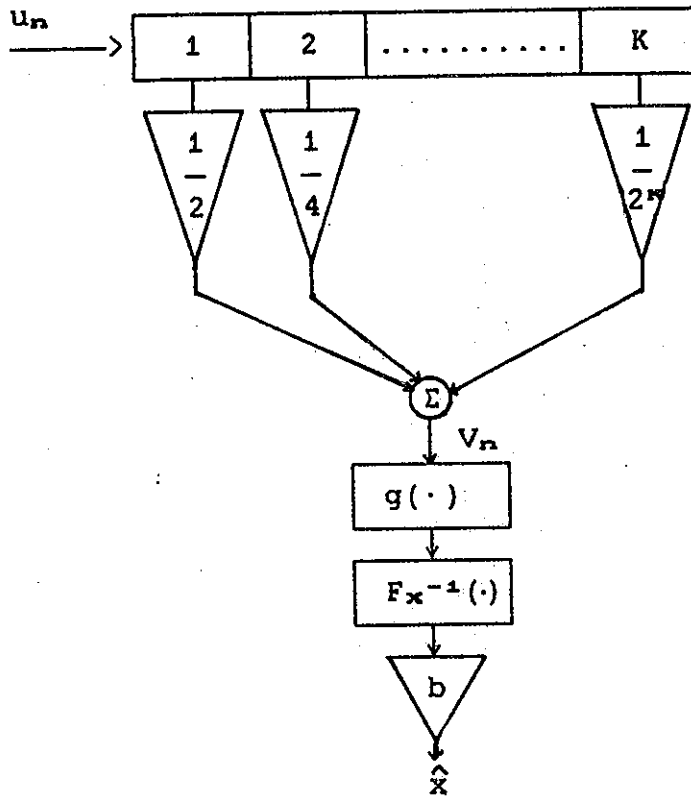
$$S_x(w) \approx S_{\hat{x}}(w) \quad \forall w \quad (3.7)$$

$F_x(x)$, $F_{\hat{x}}(x)$ - הפילוגים השוליים של תהליך המקור ותהליך היציאה בהתאמה.

$S_x(w)$, $S_{\hat{x}}(w)$ - הצפיפויות הספקטרליות של המקור ותהליך היציאה בהתאמה. בכדי לקיים תנאים הכרחיים אלו יש ליצור מפענח f כך שתהליך היציאה יהיה בעל התכונות (3.6) ו-(3.7). למעשה הוחלפה בעיה איכלוס ה-TRELLIS בבעיה אחרת והיא יצירת תהליך המקיים את (3.6) ו-(3.7) שהוא למעשה התהליך המזויף.

ב-[16] מתוארות מספר דרכים ליצירת מפענחים, אשר בהינתן המקור X , מנסות לקרב את פונקציה ההחפלות ופונקציה הצפיפות הספקטרלית. אך יש לשים לב שהתנאים (3.6) ו-(3.7) אינם בהכרח תנאים מספיקים. לכן עבור תהליך שמנסים לקודד יש לבדוק אם תוצאות הקידוד אכן מספקות.

ב-[16] מתוארים מספר מפענחים. נביא כדוגמא יצירת תהליך זיוף \hat{X} עבור מקור i.i.d, X , בעל פילוג שולי $F_x(x)$. המפענח יבנה כך שאם נכניס אליו מקור i.i.d אחד היציאה X תהיה בעלת פילוג שולי $F_{\hat{x}} \approx F_x$ ו- $R_{\hat{x}}(K) = 0$ ו- $R_x(K) \triangleq E[X(t)X(t+K)]$, שכן X מקור חסר זכרון. ציור 3.4 מתאר את המפענח.



ציוור 3.4: המפענה המוחאם למקור i.i.d
 FIGURE 3.4: DECODER FOR i.i.d SOURCE

נניח כי u_n מוחאם למקרה בו $q = 2$. לכן $P(u_n=0) = P(u_n=1) = \frac{1}{2}$. המחקבל יהיה תהליך אקראי שהפילוג שלו אחיד בתחום הערכים $\{1/2^k, k=0, \dots, 2^k-1\}$. כאשר ה-S.R. ארוך מאד, $K \rightarrow \infty$, V_n מחקר לפילוג אחיד בתחום $[0,1]$.

תהליך V_n אינו חסר קורלציה לכן משתמשים בפונקציה ערבוו $g(\cdot)$ הגורמת לכך שתהליך היציאה \hat{x} יהיה חסר קורלציה. כמו כן נדרש מהפונקציה $g(\cdot)$ שאם בכניסתה מופיע מ.א. מפולג אחיד דגם היציאה יהיה גם כן מ.א. מפולג אחיד. העברת מ.א. מפילוג אחיד דרך $F_x^{-1}(\cdot)$ מביאה לכך שביציאה יתקבל מ.א. מפולג הגורם b נקבע באופן אמפירי לקבלת התוצאות הטובות ביותר עבור תהליך נתון. ביציאה התקבל \hat{x}_n , תהליך בעל פילוג שולי קרוב ל- F_x וחסר קורלציה. יש לשים לב ש- F_x אינו ממש F_x בגלל ש- V_n איננו מפולג אחיד בתחום $[0,1]$, אלא רק מחקר לפילוג זה כאשר K גדול מספיק. התוצאות המחבלות כאשר X גאוסי מובאות בסעיף 3.3.4 תוך השוואה לשיטות איכלוס אחרות.

ב-[16] מתוארות גם דרכים ליצירת תהליכים שאינם בהכרח חסרי קורלציה.

3.3.3 אלגוריתם איטרטיבי לאיכלוס TRELIS קבוע בזמן [17]:

בסעיף 3.3.2 הוצג משפט המבטיח קיומו של TRELIS קבוע בזמן, כך שביצועי המערכת יהיו קרובים כרצוננו לפונקצית קצב העיוות.

כזכור, בעית איכלוס TRELIS קבוע בזמן זהה לבעית איכלוס טבלה בגודל $n \times q^k$ המשמשת בתור מפענח. בסעיף זה יתואר אלגוריתם איטרטיבי לאיכלוס הטבלה תוך שימוש בסידרת לימוד מתוך המקור. האלגוריתם דומה מאד לאלגוריתם L.B.G [24] למציאת מילון אופטימלי ל-V.Q וכמוהו מבטיח לכל היותר התכנסות למינימום מקומי.

האלגוריתם משתמש בסידרת לימוד ארוכה מתוך המקור. עבור סידרת לימוד זו מוצאים את המפענח ובו משתמשים לקידוד המקור.

בכל איטרציה של האלגוריתם שני שלבים עיקריים:

א. עבור טבלת מפענח נתונה, יש לחלק את סידרת הלימוד ל- q^k קבוצות, המותאמות כל אחת לוקטור באורך n (מתוך q^k וקטורים) אשר בטבלה. כל קבוצה מכילה את כל הוקטורים מסידרת הלימוד המשוחזרים, לאחר קידוד באמצעות ה-TRELIS לפי עיוות מינימלי, לוקטור המתאים בטבלה.

ב. יצירת טבלה חדשה עבור החלוקה שהתקבלה ב-א'. הטבלה מתקבלת ע"י כך, שלכל קבוצה מוצאים מהו הוקטור המיוצג שיביא למינימום עיוות ומחליפים את הוקטור הישן מהטבלה, המתאים לקבוצה, בוקטור החדש שהתקבל.

באיטרציה הבאה תשמש הטבלה שהתקבלה ב-ב' לחלוקת סידרת הלימוד לקבוצות. ניתן להוכיח כי ממוצע העיוות המתקבל מקידוד סידרת הלימוד ומחושב לאחר שלב א' באיטרציה מסוימת, הוא לא גדול מממוצע העיוות שהתקבל באיטרציה הקודמת. בדרך כלל ממוצע העיוות קטן.

האלגוריתם מופסק כאשר ממוצע העיוות לא קטן או ההפרש בין ממוצע העיוות האיטרציה הקודמת לממוצע העיוות באיטרציה הנוכחית קטן מסף מסויים שנקבע בתחילה. ניתן להראות [25] שהאלגוריתם יגיע לנקודת שבת (מצב בו העיוות לא קטן יותר מאיטרציה לאיטרציה) לאחר מספר סופי של איטרציות כאשר סידרת הלימוד סופית.

ההבדל בין אלגוריתם זה לבין אלגוריתם L.B.G לאיכלוס VQ, הוא בכך שב-VQ מחלקים את סידרת הלימוד לקבוצות כך שכל קבוצה מכילה את הוקטורים הקרובים ביותר לוקטור מסויים בטבלה ואילו באלגוריתם זה החלוקה לקבוצות מתבצעת ע"י קידוד סידרת הלימוד באמצעות TRELIS שאחריה בודקים אילו וקטורים באורך n קודדו לוקטור מסויים בטבלה (שאינו בהכרח הוקטור הקרוב אליו ביותר).

כאשר מדד העיוות הוא שגיאה ריבועית, בתהליך בניית הטבלה החדשה (שלב ב') הוקטור המייצג קבוצה מסוימת, יהיה מרכז הכובד שלה, ז"א, ממוצע הוקטורים בקבוצה.

הטבלה המתקבלת בסיום ביצוע האלגוריתם תלויה בטבלה ההתחלתית. לכן יש חשיבות רבה לאופן בחירת הטבלה ההתחלתית. קיימות לכך אפשרויות שונות, ביניהן:

א. איכלוס הטבלה ב- q^k הוקטורים הראשונים בסידרת הלימוד.

ב. שיטת ההרחבה - לפי שיטה זו נניח כי ידועה טבלה טובה לסידרת הלימוד עבור TRELLIS בעל S.R באורך $K-1$. נשכפל את הטבלה q פעמים כך שנקבל טבלה חדשה בגודל המתאים q^k . הפעלת הטבלה על סידרת הלימוד לא תשנה את הביצועים לעומת חיפוש ב-TRELLIS בעל S.R באורך $K-1$. כך שהפעלת האלגוריתם תוך שימוש בטבלה המורחבת לא יכולה לקלקל את הביצועים לעומת S.R קצר יותר. לסיכום, מציאת הטבלה ההתחלתית לפי שיטה זו מחייבת מציאת הטבלה הטובה ביותר ל-S.R באורך 1 אותו מרחיבים ל-S.R באורך 2 ועבורו מוצאים את הטבלה הטובה ביותר. כך הלאה, עד שמוצאים את הטבלה הטובה ביותר עבור S.R באורך K .

החסרון באלגוריתם זה לאיכלוס ה-TRELLIS, הוא שבכדי להגיע למקודד טוב יש להשתמש בסידרת לימוד ארוכה מאד. ואם בנוסף ל-TRELLIS יש S.R ארוך סיבוכיות האלגוריתם גדולה מאד.

היתרון הבולט באלגוריתם הוא שאין צורך לדעת מראש את התכונות הסטטיסטיות של המקור.

ב-[17] נבדקה מערכת הקידוד המתקבלת מהפעלת האלגוריתם על מקור גאוסי i.i.d ומקור גאוסי-מרקובי מסדר-ראשון. התוצאות משולבות בהמשך.

3.3.4 איכלוס TRELLIS באמצעות מספר מוגבל של ערכים:

אחד הגורמים לסיבוכיות הגדולה של ה-TRELLIS, הוא כמות הזכרון הנדרשת לצורך איכסונו. הבעיה חמורה במיוחד במקרה בו ה-TRELLIS משחנה בזמן. כאשר המקור בעל אמפליטודה רציפה, הפילוג המגשים גם כן בעל אמפליטודה רציפה. לכן יש לתח מספר רב של סיביות לכל מילה בענף. נניח כעת כי מספר המילים השונות המאכלסות את ה-TRELLIS יהיה מוגבל ל- \bar{M} . במקרה זה יש ליצור טבלה בעלת \bar{M} כניסות וכל תא בטבלה מכיל אחד מחוץ \bar{M} הערכים, בדיוק הרצוי. ענפי ה-TRELLIS יאוכלסו באינדקס לטבלה ולצורך זאת נדרש לתח לכל מילה בענף $\log_2 \bar{M}$ סיביות בלבד.

נצפה לכך שהגבלת גודל א"ב היציאה, תגרום להגדלת ממוצעי העיוות שנקבל בקידוד. ב-[11] מוכיחים כי גם כאשר \tilde{M} קטן למשל, 4 ו-8 עבור מקורות גאוסי או לפלס חסרי זכרון ומידת העיוות היא שגיאה ריבועית, החוספת בעיוות תהיה קטנה מאד. לצורך זאת מגדירים פונקציית קצב עיוות חדשה, $Res(D)$, עבור מקור חסר זכרון, בעל אמפליטודה רציפה ופילוג $P(X)$. אמפליטודת המקור מחולקת ל- \tilde{L} אינטרוואלים $[a_{j-1}, a_j]$, $j=1, 2, \dots, \tilde{L}$, $(a_0=-\infty, a_{\tilde{L}}=\infty)$. ערכי היציאה השונים האפשריים הם $v_1, v_2, \dots, v_{\tilde{M}}$. נגביל את הפילוג המוחנה, $q(v_k|X)$, להיות קבוע באינטרוול, ז"א:

$$q(v_k|X) = q_{k/j} \quad \begin{array}{l} \text{עבור} \\ X \in [a_{j-1}, a_j] \\ k = 1, \dots, \tilde{M} \\ j = 1, \dots, \tilde{L} \end{array}$$

האינפורמציה ההדדית בין המקור לסידרת היציאה תהיה:

$$I_{\Sigma\tilde{M}}(q, v, a) = \sum_{j=1}^{\tilde{L}} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \sum_{k=1}^{\tilde{M}} P(X) \cdot q(v_k|X) \cdot \quad (3.10)$$

$$\cdot \log \frac{q(v_k|X)}{Q_k} dX = \sum_{j=1}^{\tilde{L}} \sum_{k=1}^{\tilde{M}} P_j \cdot q_{k/j} \cdot \log \frac{q_{k/j}}{Q_k}$$

$$P_j \triangleq \int_{a_{j-1}}^{a_j} P(X) dX \quad \text{כאשר}$$

$$Q_k \triangleq \sum_{j=1}^{\tilde{L}} P_j \cdot q_{k/j}$$

חוחלת העיוות בין הכניסה ליציאה תהיה:

$$D_{\Sigma\tilde{M}}(q, v, a) = \sum_{j=1}^{\tilde{L}} \int_{a_{j-1}}^{a_j} \sum_{k=1}^{\tilde{M}} P(X) \cdot q(v_k|X) \cdot d(X, v_k) dX \quad (3.11)$$

$$= \sum_{j=1}^{\tilde{L}} \sum_{k=1}^{\tilde{M}} P_j \cdot q_{k/j} \cdot dz_{\tilde{M}}(j, k)$$

כאשר:

$$dz_{\tilde{M}}(j, k) \triangleq \int_{a_{j-1}}^{a_j} P(X) \cdot d(X, v_k) dX / P_j \quad (3.12)$$

$I_{\mathcal{M}}(D)$ ו- $D_{\mathcal{M}}$ חלויים בבחירת האינטרוואלים, a , ערכי היציאה, v , ופילוג המעבר, q . נגדיר את $\Gamma_{\mathcal{M}}$ כאוסף האפשרויות לבחירת a, v, q עבורם תוחלת העיוות קטנה מ- D .

$$\Gamma(D) \triangleq \{q, v, a : D_{\mathcal{M}}(q, v, a) \leq D\}$$

ופונקציה קצב העיוות החדשה $R_{\mathcal{M}}(D)$ מוגדרת כ:

$$R_{\mathcal{M}}(D) \triangleq \inf_{\Gamma_{\mathcal{M}}} I_{\mathcal{M}}(q, v, a)$$

ברור כי מתקיים $R(D) \geq R_{\mathcal{M}}(D)$. חשיבות הגדרת $R_{\mathcal{M}}(D)$ היא בכך שניתן להוכיח קיום קוד TRELIS (המוגדר באקראי) בעל מספר רמות יציאה \bar{M} (ומספר אינטרוואלי כניסה \bar{L}) וקצב $R > R_{\mathcal{M}}(D)$, כך שאם נחפש לפי מידת העיוות $d_{\mathcal{M}}$ המתקבלת מ- $d(X, Y)$ לפי (3.12), נקבל שתוחלת העיוות בין כניסה ליציאה תהיה קרובה כרצוננו ל- D .

למשפט יש חשיבות מעשית שכן ניתן להראות שעבור פילוגים כגון גאוס ולפלס, כאשר \bar{L} ו- \bar{M} קטנים יחסית $R_{\mathcal{M}}(D)$ קרוב מאד ל- $R(D)$ (בתחום $D < D_{\mathcal{M}}$ שהוא העיוות המינימלי האפשרי בגלל הגבלת מספר רמות היציאה ל- \bar{M}). דוגמאות לערכי $R_{\mathcal{M}}(D)$ יובאו בהמשך.

ב-[11] מוצג אלגוריתם למציאת $R_{\mathcal{M}}(D)$ עבור מקור נתון. האלגוריתם מבצע מינימציה על פני אינטרוואלים שווים בלבד, ז"א:

$$a_j - a_{j-1} = \alpha \quad j = 2, \dots, \bar{L}-1$$

$$a_0 = -\infty, \quad a_{\bar{L}} = \infty$$

ביציאת האלגוריתם מחקבלים הפונקציה $R_{\mathcal{M}}(D)$, גודל האינטרוואל α , רמות היציאה v וכן $Q_{\mathcal{M}}$.

טבלה 3.1 [19], מכילה דוגמאות לחסם על העיוות המתקבל בקצב $R=1$, שגיאה ריבועית למקורות גאוסים ולפלס בעלי תוחלת אפס ו- $\sigma^2 = 1$.

	ג א ו ס י	ל פ ל ס
$D(1)$	0.25	0.217
$D_{64,4}(1)$	0.2528	0.2540
$D_{64,8}(1)$	0.2507	0.2199

($R_{\mathcal{M}}(D)$ היא הפונקציה ההפוכה ל- $D_{\mathcal{M}}(R)$)

טבלה 3.1: חסמים לעיוות בא"ב יציאה סופי
TABLE 3.1: DISTORTION BOUNDS USING CONSTRAINED SIZE REPRODUCTION ALPHABETS

מהתוצאות בטבלה 3.1 ניתן לראות כי כאשר המקור גאוסי כבר ב- $\bar{M}=4$ ו- $\bar{L}=64$ החסם קרוב מאד לפונקציית קצב העיוות. לעומת זאת עבור מקור מפולג לפלס ו- $\bar{M}=4$ החסם רחוק ב- 0.68dB מפונקציית קצב העיוות אך ב- $\bar{M}=8$ המרחק הוא 0.057dB בלבד.

ב-[20] מובאות דוגמאות לקידוד מקור גאוסי באמצעות TRELLIS כאשר האיכלוס הוא ב-4 רמות יציאה בלבד. מוצגות שתי דרכים לאיכלוס TRELLIS. הראשונה מותאמת לאיכלוס TRELLIS משתנה בזמן. מתוך משפט הצפינה המוזכר בסעיף זה מתקבל כי ניתן למצוא קוד המוגרל באקראי מתוך הפילוג, Q_k ($k=1, \dots, \bar{M}$) אשר מתקבל מתוך האלגוריתם למציאת $RE_{\bar{M}}(D)$. הדרך השניה מותאמת לאיכלוס TRELLIS קבוע בזמן, לפיה יוצרים את ה-DECODER כך שכל הערכים המאכלסים את הענפים ב-LEVEL מסויים יהיו בלתי תלויים זה בזה וכן שפילוג היציאה יהיה Q_k . החיפוש ב-TRELLIS התבצע באמצעות אלגוריתם GALLAGER והתוצאות המתקבלות כפונקציה של מספר הענפים הממוצע בהם מתבצע חיפוש, מתוארות בפירוט ב-[20].

ב-[19] מוגדרות שתי פונקציות קצב עיוות נוספות $RE_{\bar{M}}(D/V)$ ו- $RE_{\bar{M}}(D/V, Q)$. המיוחד את שתיהן שבנוסף לכך שמגבילים את מספר רמות היציאה \bar{M} , קובעים את הערכים $v_1, \dots, v_{\bar{M}}$ להיות ערכי הקונטינזר האופטימלי (MAX), ב- \bar{M} רמות יציאה. כמו כן קובעים את תחומי החלוקה של המקור לפי רמות ההחלטה של הקונטינזר היוניפורמי ב- \bar{L} רמות.

$$RE_{\bar{M}}(D/V) \triangleq \inf_{\Gamma(D, v_0, a_0)} I_{\bar{M}}(q, v_0, a_0) \quad \text{נקבל כי:}$$

$$\Gamma(D, v_0, a_0) = \left\{ q: d_{\bar{M}}(q, v, a) \leq D/v = v_0, a = a_0 \right\}$$

המינימציה המתבצעת על פני כל הפילוגים המותנים $q(v_k/x)$ כך שהאינטרוואלים קבועים מראש ומסומנים ב- a_0 וערכי היציאה גם כן קבועים מראש ומסומנים ב- v_0 .

המוטיבציה לאיכלוס ה-TRELLIS בערכי הקונטינזר האופטימלי נובעת מכך שרוצים לחסוך את שלב חיפוש \bar{M} הרמות האופטימליות וחישוב ההסתברות של כל רמה Q_k . הבעיה בפונקציה היא $RE_{\bar{M}}(D/V)$ שאומנם קיים קוד שרמות היציאה שלו הם רמות הקונטינזר האופטימלי ומתקרב בביצועיו ל- $RE_{\bar{M}}(D/V)$ אך כדי למצוא אותו יש לחשב את ערכי Q_k שאינם בהכרח הסתברויות הקונטינזר האופטימלי. לצורך זאת מגדירים את $RE_{\bar{M}}(D/V, Q)$ בנוסף להגבלות הקודמות מוסיפים הגבלה נוספת והיא שפילוג רמות היציאה יהיה זהה לפילוג רמות הייצוג של הקונטינזר האופטימלי, Q_0 .
ז"א:

$$RE_{\bar{M}}(D/V, Q) \triangleq \inf_{\Gamma(D, v_0, a_0, Q_0)} I_{\bar{M}}(q, v_0, a_0)$$

$$\Gamma(D, v_0, a_0, Q_0) = \left\{ q: d_{\bar{M}}(q, v, a) \leq D/v = v_0, a = a_0, Q = Q_0 \right\}$$

המינימציה מתבצעת על פני הפילוגים המותנים, המביאים לכך שפילוג רמות היציאה יהיה Q_0 .

בטבלה 3.2 נמצאות דוגמאות לחסמים על העיוות, המתקבל כאשר נאכלס את ה-TRELLIS לפי רמות היציאה של הקונטייזר האופטימלי ונבצע חיפוש לפי מדד העיוות $d(x,y)$ המתקבל מ- (3.12).

	ג א ו ס י		ל פ ל ס	
D(1)	0.25		0.217	
\tilde{L}, \tilde{M}	<u>64,4</u>	<u>64,8</u>	<u>64,4</u>	<u>64,8</u>
$D_{EM}(1/V)$	0.2544	0.2518	0.2618	0.2261
$D_{EM}(1/V, Q)$	0.2636	0.2615	0.2704	0.2457

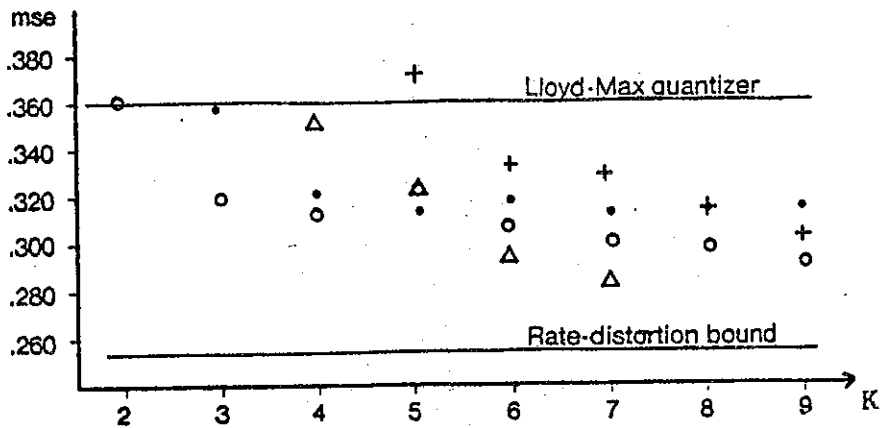
טבלה 3.2: החסמים לעיוות המתקבלים בשימוש רמות הקונטייזר האופטימלי

TABLE 3.2: DISTORTION BOUNDS USING OPTIMAL QUANTIZER LEVELS

ניתן לראות שעבור מקור גאוסי, המרחק מהחסם התחתון עבור $\tilde{L}=64$ ו- $\tilde{M}=8$, באיכלוס לפי רמות הקונטייזר האופטימלי ופילוגיו, הוא 0.19dB בעוד איכלוס זה למקור לפלס מביא למרחק של 0.53dB . למרות העובדה, שעבור פילוג לפלס החסם התחתון גדול יחסית ניתנה מוטיבציה לאיכלוס ה-TRELLIS בצורה זו משום שברור שהגדלת מספר רמות היציאה תקטין את החסם וכן מהסיבה שבאופן מעשי לא נפריד את המקור ל- \tilde{L} קטעים, אלא נחפש ישירות לפי מדד העיוות המקורי, $d(x,y)$, ונצפה לכך שממוצע העיוות יהיה קטן יותר.

לסיכום סעיף זה נשווה את התוצאות המתקבלות מקידוד מקור גאוסי סטציונרי חסר זכרון, באמצעות TRELLIS המאוכלס בכל אחת מהשיטות שתוארו. לתוצאות המתקבלות בקידוד מקור סטציונרי שאינו חסר זכרון, נתייחס בפרק 5.

בציור 3.5 מתוארות התוצאות המתקבלות מקידוד ב-TRELLIS של מקור גאוסי i.i.d בעל תוחלת 0 ו- $\sigma^2=1$ באמצעות אלגוריתם VITERBI. ניתן לראות כי תוצאות איכלוס TRELLIS קבוע בזמן באמצעות תהליך "זיוף" או מתוך סידרת לימוד, טובות יותר מהקונטייזר של MAX כבר ב-K קטנים, כשמשמעות הדבר סיבוכיות קטנה יחסית במימוש. זאת מהסיבה שמספר מילות הקוד קטן וכן בגלל שה-TRELLIS קבוע בזמן. יחד עם זאת ניתן לשים לב לעובדה שביצועי המערכות האלו כמעט ולא משתפרים מעבר ל-K=5.



- o - אלגוריתם איטרטיבי למציאת המפענה [17].
- - FAKE-PROCESS [16].
- Δ - איכלוס אקראי [13].
- + - איכלוס אקראי בא"ב סופי-4 [11].

ציור 3.5: ביצועי קוד TRELLIS כפונקציה של אורך K, S.R-ה
FIGURE 3.5: mse OBTAINED FOR DIFFERENT S.R SIZES

האיכלוס האקראי במספר רמות אין-סופי לא טוב עבור S.R קצר ויתרוננו בולט ב-S.R באורך 6 ומעלה. ביצועי האיכלוס האקראי כאשר אב היציאה בגודל 4 מופיעים גם כן. יש לשים לב שלמרות שכמות הזכרון הנדרשת לאיכלוס TRELLIS משתנה בזמן גדולה מאד, ניתן להתגבר על בעיית הזכרון ע"י כך שניצור טבלה גדולה המכילה דגמים בח"ס מתוך הפילוג המגשים. נשתמש בטבלה זאת לאיכלוס ה-TRELLIS באופן סידרתי בצורה ציקלית. הטבלה ידועה למפענה ולכן אין צורך לשמור יותר מזאת. התוצאות המוצגות בציור 3.5 לגבי האיכלוס האקראי באב יציאה בלתי מוגבל התקבלו ב-[13] כאשר גודל הטבלה הינו 900. העובדה, שכמות הזכרון הופכת להיות קטנה באמצעות הטבלה וכן העובדה שב-[13] הראו שעבור אותה סיבוכיות חישוב קידוד באמצעות אלגוריתם M ב-TRELLIS בעל S.R באורך K מביא לביצועים טובים יותר מאשר קידוד באמצעות אלגוריתם של VITERBI ב-TRELLIS בעל S.R קטן יותר $K' (K > K')$, $(M = K')$ הביאה לכך שבמערכת קידוד התמונות המתוארת בהמשך השתמשנו באיכלוס אקראי ובאלגוריתם M.

בסעיף 3.3.4 הוסברו המניעים לבחירת איכלוס אקראי ל-TRELLIS. בסעיף זה נצדיק שימוש באיכלוס אקראי ל-VQ ע"פ איכלוס אקראי ל-VQ. שימוש ב-VQ למטרות קידוד פשוט יותר מאשר TRELLIS במובן זה שהחיפוש בטבלה פשוט יותר וכך גם כמות הזכרון הנדרשת במקודד. בדומה למשפט הצפינה ל-TRELLIS המחואר בסעיף 3.3.1 קיים ב-[12] גם משפט צפינה ל-VQ המבטיח שקיים קוד המוגרל באקראי כך שניתן להתקרב קרוב כרצוננו לפונקצית קצב העיוות. החסם המוצג במשפט מתקרב לפונקצית קצב העיוות אקספוננציאלית לפי גודל הוקטור לקידוד, n' . מסיבות אלו היינו מעדיפים להשתמש ב-VQ, כמובן, בתנאי שהביצועים יהיו טובים יותר עבור אותה סיבוכיות. טבלה 3.3 מכילה השוואה בין ה-TRELLIS לבין ה-VQ.

V.Q	TRELLIS	
$R = \frac{\log_2 N'}{n'}$	$R = \frac{\log_2 q}{n}$	קצב
$N' \cdot n' = n' \cdot 2^{n'R}$	$n \cdot L \cdot q^K = n \cdot L \cdot 2^{nRK}$	מספר מילוח הקוד
$N' = 2^{\frac{n'R}{2}}$	$\frac{K}{q} = \frac{nRK}{2}$	כמות כפלים לאות מקור (בחיפוש מלא)

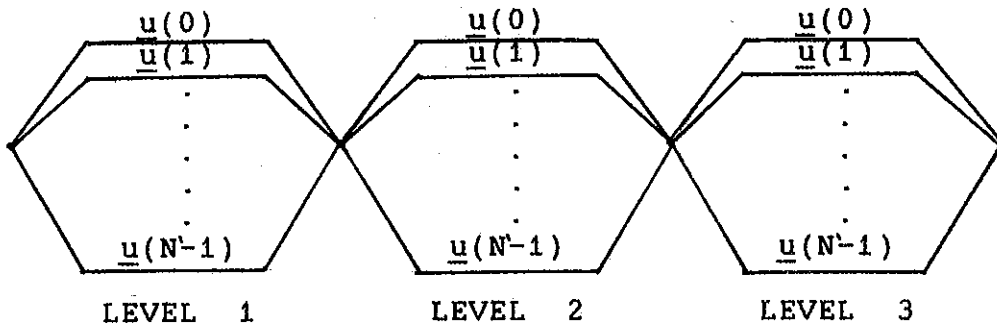
טבלה 3.3: סיבוכיות VQ ו-TRELLIS
TABLE 3.3: COMPLEXITY FOR VQ & TRELLIS

הפרמטרים של ה-TRELLIS הם כמוסבר בתחילת הפרק והפרמטרים של VQ הם: N' - מספר הוקטורים בטבלה ו- n' - גודל הוקטורים. מהטבלה ניתן לראות שכמות הזכרון הנדרשת לאיחסון TRELLIS בעל עומק L , לינארית לפי L אך אקספוננציאלית לפי אורך ה- $S.R$, K . לעומת זאת, מילוח ה-VQ גדל אקספוננציאלית לפי גודל הוקטור, n' . מספר החישובים לאות מקור ב-TRELLIS גדל אקספוננציאלית לפי K ומספר החישובים ב-VQ גדל אקספוננציאלית לפי n' .

לכאורה ה-TRELLIS יעיל יותר, שכן הזכרון גדל לינארית עם אורך הוקטור לקידוד nL לעומת ה-VQ, בו הגידול הוא אקספוננציאלי עם גידול הוקטור n' . אך יש לשים לב שמשפט הצפינה ל-TRELLIS מבטיח שההתקרבות לפונקצית קצב העיוות היא אקספוננציאלית לפי K גודל ה- $S.R$ ולא לפי עומק ה-TRELLIS. מחקבל שהסיבוכיות בשתי שיטות הקידוד, TRELLIS ו-VQ, גדלה אקספוננציאלית עם הפרמטר המביא להתקרבות הביצועים באופן לפחות אקספוננציאלי לפונקצית קצב העיוות.

החסמים המוצגים במשפטים לא בהכרח הדוקים ולכן לא ניתן להסיק מהם מהי שיטת הקידוד העדיפה, באיכלוס אקראי. לצורך הכרעה בשאלה זו נציג את ה-VQ כמקרה פרטי של TRELLIS.

נניח כי נתון מילוח VQ בגודל N' וגודל הוקטור הוא n' . מילוח זה ניתן להציג באמצעות TRELLIS קבוע בזמן שבו $K=1$, $q=N'$ ו- $n = n' - L$. כלשהו. בחירה זו מתוארת בציור 3.6.



ציור 3.6: מימוש VQ באמצעות TRELLIS עם $K=1$
 FIGURE 3.6: VQ REALIZATION USING TRELLIS WITH $K=1$

הוקטורים, $u(1)$, $0 \leq i \leq N-1$, הם וקטורים באורך n המאכלסים את המילון. נניח כעת כי מבצעים חיפוש מלא ב-TRELLIS באמצעות אלגוריתם VITERBI, בכל LEVEL נבחר את הענף המביא לכך שהעיוות הכולל יהיה הקטן ביותר. למעשה, במקרה זה אין צורך להגיע לדרגה האחרונה בכדי לבצע הכרעה בנוגע למסלול שכן ברור שהמסלול עובר דרך מצב 0 שהוא המצב היחיד. לכן בכל דרגה ניתן לבצע החלטה על אחד הענפים בתור חלק מהמסלול ולשלוח לערוץ את אינדקס הענף. תהליך זה למעשה זהה לתהליך הקידוד ב-VQ.

נזכור כי רצינו לבדוק האם הקידוד באמצעות TRELLIS עדיף על קידוד באמצעות VQ. לאחר שה-VQ הוצג כמקרה פרטי של TRELLIS ניתן להטב את השאלה לשאלה אחרת והיא: בהינתן קצב רצוי R וכמות חישובים מסוימת לאות מקור B , כיצד יש לבחור את פרמטרי ה-TRELLIS, K, n, q , מחוץ אוסף האפשרויות המקיימות את R ו- B .

טבלה 3.4 מכילה בחירות שונות של פרמטרי TRELLIS עבור $R=1$ ו- $B=64, 128, 256$. החוצאות המוצגות הן שגיאה ריבועית עבור מקור גאומי חסר זכרון בעל $\sigma^2=1$ וערך מוחלט השגיאה $(d(X, Y) = |X, Y|)$ עבור מקור לפלס חסר זכרון בעל $\sigma^2=1$.

B	K	q	n	גאוסי (mse)	לפליס (abse)
64	1	64	6	0.399	0.459
64	2	8	3	0.3559	0.436
64	3	4	2	0.353	0.432
64	6	2	1	0.347	0.429
128	1	128	7	0.377	0.447
128	7	2	1	0.3233	0.420
256	1	256	8	0.36	0.438
256	2	16	4	0.32	0.412
256	4	4	2	0.314	0.407
256	8	2	1	0.311	0.406

טבלה 3.4: העיוות המתקבל כפונקציה של פרמטרי ה-TRELLIS
 TABLE 3.4: DISTORTIONS OBTAINED FOR DIFFERENT TRELLIS
 PARAMETERS

בכל הבדיקות גודל הוקטור שקודד היה 256. מתוך הטבלה ניתן להגיע למסקנה הבאה: עבור איכלוס אקראי של ה-TRELLIS, תחת האילוץ שהוא כמות חישובים קבועה, B, יש לבחור את n ו-q להיות הקטנים ביותר המקיימים את R (K יבחר בהתאמה כך שסה"כ החישובים יהיו B), לקבלת עיוות ממוצע הקטן ביותר.

קבלנו ש-VQ (המקרה בו K=1) הוא הבחירה הגרועה ביותר מבין כל האפשרויות, תחת האילוצים שנקבעו. לכן באמצעות בחירה נכונה של פרמטרי ה-TRELLIS ניתן להגיע לביצועים טובים יותר (עיוות ממוצע קטן יותר) באותה כמות חישובים לאותו מקור.

יש לשים לב שהמסקנה שקיבלנו נכונה עבור איכלוס אקראי, שהוא האיכלוס בו נשתמש במערכת המוצעת.

פרק 4. קידוד תמונות באמצעות מערך מסננים ו-TRELLIS

התוצאות שהושגו בקידוד תמונות תוך שימוש במערכי מסננים דו-מימדיים ומתוארות בפרק 2, נותנות מוטיבציה לקודד לפי גישה זו תוך שיפור המקודדים.

מערך המסננים שנבחר לשימוש במערכת המתוארת בפרק זה הוא 2D-QMF. יתרונותיו של מערך מסננים זה צוינו בפרק 1. המסננים מהם מורכב מערך המסננים הם מסננים ספרביליים.

מטרת השימוש במסננים ספרביליים היא הקטנת כמות החישובים. קיים אבטיפוס אחד לשני הכיוונים, "ז"א, $h(n, m) = h(n) \cdot h(m)$. נבחר להיות מסנן בעל מספר מקדמים זוגי. הסיבה לכך היא שב-[1] קיימים מסננים מוכנים שתוכננו בהתאם לשיטה 2 בסעיף 1.2. עדיף היה להשתמש במסנן בעל מספר מקדמים אי-זוגי משום שע"י כך היתה נמנעת ההזזה המתקבלת בין התמונה המופרדת לזו המשוחזרת, אך לא קיימים בספרות מסננים מוכנים. כמו כן ניתן לבצע הזזה חזרה ובכך להתגבר על החסרון שבשימוש במסננים באורך זוגי. מבין המסננים ב-[1] נבחרו לשימוש המסננים שבאמצעותם מתקבל הקירוב הטוב ביותר למערכת יחידה. בתהליך הסינון יש לקבוע את ערכי הדגמים מחוץ לתמונה. בחרנו לבצע לתמונה הרחבה מחזורית משום שע"י הרחבה זו נמנע הצורך לקודד "מסגרת" נוספת מסביב לכל תת-תמונה. המידע על ה"מסגרת" היה נדרש לתהליך השיחזור.

שיפור המקודדים יכול להתבצע באמצעות קידוד וקטורי. נבחר לאכלס את המקודד הוקטורי באיכלוס אקראי אשר יתרונו בכך שאין צורך בשלב מקדים לקידוד, שהוא איכלוס מתוך סידרת לימוד. נשתמש במקודד מסוג TRELLIS אשר יתרונו באיכלוס אקראי על פני VQ הובהר בפרק 3.

בבחירה של מערך מסננים המפריד את התמונה למספר רב של תחומי תדר ניתן לצפות שהספקטרום במרבית התחומים יהיה בקרוב שטוח. פירוש הדבר שניתן להתייחס לתמונות המיצגות את תחומי התדר הללו כאילו התקבלו ממקור חסר קורלציה. אם בנוסף התמונה המקורית התקבלה ממקור גאוסי אזי ניתן להתייחס לתחומי-תדר בעלי ספקטרום בקרוב שטוח כאילו נובעים ממקור חסר זכרון. בפרק הקודם הוסבר שכאשר התהליך סטציונרי וחסר זכרון ניתן להגיע לביצועים קרובים לפונקצית קצב העיוות ע"י כך שנאכלס את ה-TRELLIS בפילוג היציאה המגשים.

היעילות של שימוש במקודד TRELLIS המאוכלס באקראי על פני מקודדים סקלריים רבה במיוחד בפסי התדר בהם הקורלציה נמוכה וכן בתחומי התדר בהם קצב הקידוד נמוך וביצועי הקונטינר הסקלרי רחוקים יותר מפונקצית קצב העיוות של אותם תחומי תדר.

כל אחד ממקודדי ה-TRELLIS מותאם לתחום התדר אותו הוא מקודד. משמעות הדבר, שקצב ה-TRELLIS, מבנהו ואיכלוסו שונים. סעיף 4.1 מתאר את הקצאת הסיביות בין תחומי התדר תחת אילוף לשגיאה ריבועית קטנה ככל האפשר. כמו כן מתוארים דרכים לאיכלוס ה-TRELLIS באמצעות שני פילוגים שונים שהם: גאוסי ולפלט. בסעיף זה מתבצע השוואת תוצאות הקידוד כאשר ההפרדה לתחומים מתבצעת באמצעות מסננים שונים ומבני עצים שונים.

בסעיף 4.2 מתוארות שתי דרכים לביצוע אדפטציה של איכלוס ה-TRELLIS והקצאת הסיביות בתוך תחומי התדר. האחת תחת אילוף קצב קבוע לכל איזור בתמונה והשניה תחת אילוף עיוות קבוע בכל איזור בתמונה.

4.1 קביעת מקודדי ה-TRELLIS בתחומי החדר השונים:

בכדי לקבוע את מקודד ה-TRELLIS המותאם לתחום חדר מסויים יש למצוא את הקצאת הסיביות האופטימלית ואח האיכלוס המתאים לתחום החדר. בסעיף זה נתייחס לבעיות אלו ונציג את התוצאות שהתקבלו בקידוד התמונה "LADY".

4.1.1 הקצאת סיביות דינמית:

הקצאת סיביות אופטימלית פירושה קביעת קצב הקידוד לפי קסל, בתמונה המייצגת את תחום החדר ה- i , r_i , כך $1 \leq i \leq \bar{K}$ (מספר תחומי החדר השונים), כך שהעיות הממוצע יהיה מינימלי תחת האילוץ שקצב הקידוד הממוצע לתמונה כולה הוא R . נניח כי העיות המתקבל בתחום החדר ה- i לאחר הקצאת r_i^* סיביות לתחום זה הוא D_i . במקרה בו מדד העיות הוא שגיאה ריבועית והמסננים מפרידים היטב בין תחומי החדר מתקבל כי D_T , שהוא ממוצע העיות בין התמונה המקורית לבין התמונה המשוחזרת יהיה:

$$D_T = \sum_i D_i$$

לצורך מציאת הקצאת הסיביות האופטימלית נניח את ההנחות הבאות:

- א. התמונה המקודדת מתקבלת ממקור גאוסי.
- ב. הצפיפות הספקטרלית בכל אחד מתחומי החדר קבועה בקרוב.
- ג. ההפרדה לתחומי חדר מתבצעת בעץ מלא, ז"א, בדרגה אחת יתקבלו 4 תחומי חדר, ב-2 דרגות - 16 תחומי חדר וב-3 דרגות - 64 תחומי חדר.

בהנחות אלו החסם התחתון אליו ניתן להגיע באיכלוס אקראי של כל תחום חדר הוא:

$$r_i^* = \max \left(\frac{1}{2} \log \frac{\sigma_i^2}{\theta_i}, 0 \right)$$

$$D_i^* = \min (\sigma_i^2, \theta_i)$$

σ_i^2 הוא וריאנס תחום החדר. כאשר נקצה לתח תמונה ה- i r_i^* סיביות, העיות המינימלי אליו נוכל להתקרב הוא D_i^* .

האילוץ הוא:

$$R = \frac{1}{\bar{K}} \sum_{i=1}^{\bar{K}} r_i^* = \frac{1}{\bar{K}} \sum_{i=1}^{\bar{K}} \max \left(\frac{1}{2} \log \frac{\sigma_i^2}{\theta_i}, 0 \right) \quad (4.1)$$

ברצוננו לקבל תחת אילוף זה מינימום ל- D_T . נוכל להניח כי $D_1^* \cong D_1$ משום שנשתמש במקורד וקטורי שמתקרב בניצוועו לחסם התחתון.

$$D_T = \sum_{i=1}^{\bar{K}} D_i \cong \sum_{i=1}^{\bar{K}} D_i^* = \sum_{i=1}^{\bar{K}} \min(\sigma_i^2, \theta_i) \quad (4.2)$$

פתרון בעיית המינימיזציה מביאה לכך ש- θ_i קבוע לכל תחומי החדר. פירוש הדבר שבכל תחומי החדר בהם הקצב $r_1^* > 0$, העיוות הממוצע יהיה $\theta_i = \theta$ ובפסי החדר בהם $r_1^* = 0$ העיוות הממוצע יהיה קטן יותר. בכדי למצוא את ההקצאה האופטימלית יש למצוא את θ המקיים את (4.3).

$$R = \frac{1}{\bar{K}} \sum_{i=1}^{\bar{K}} \max\left(\frac{1}{2} \log \frac{\sigma_i^2}{\theta}, 0\right) = \quad (4.3)$$

$$\frac{1}{\bar{K}} \cdot \sum_{i: \sigma_i^2 > \theta} \frac{1}{2} \log \frac{\sigma_i^2}{\theta}$$

מציאת θ המקיים את (4.3) משמעותה מציאת ההקצאה האופטימלית שכן נקבל:

$$r_1^* = \max\left(\frac{1}{2} \log \frac{\sigma_i^2}{\theta}, 0\right) \quad \forall i \quad 1 \leq i \leq \bar{K}$$

העיוות הממוצע שנקבל יהיה:

$$D_T = \sum_{i=1}^{\bar{K}} \min(\sigma_i^2, \theta) \quad (4.4)$$

PEARLMAN & MAZOR הציעו דרך איטרטיבית למציאת θ , עד כדי שגיאה קטנה ברצוננו. בעבודה זו מוצע פתרון של (4.3) לקביעת θ במדויק. מציאת θ מחובצת באופן הבא:

הוריאנטים של תחומי החדר סודרו בסדר יורד, ז"א:

$$\hat{\sigma}^2(1) \geq \hat{\sigma}^2(2) \geq \dots \geq \hat{\sigma}^2(\bar{K})$$

כאשר $\hat{\sigma}(\cdot)$ הוא המערך המכיל את הוריאנטים הממוינים.

נניח כי: $\hat{\sigma}^2(j) \leq \theta \leq \hat{\sigma}^2(j+1)$ אזי מתוך (4.3) מתקבל:

$$R = \frac{1}{\bar{K}} \cdot \sum_{i=1}^j \frac{1}{2} \log \frac{\hat{\sigma}^2(i)}{\theta}$$

ולכן θ מקיים:

$$\theta = \left(\prod_{i=1}^j \hat{\sigma}^2(i) \right)^{\frac{1}{j}} \cdot 2^{\frac{2R\bar{K}}{j}} \quad (4.5)$$

אם אכן מתקיים $\hat{\sigma}^2(j) \leq \theta \leq \hat{\sigma}^2(j+1)$ אזי θ שחושב ב-(4.5) הוא זה שמקיים את (4.3). אחרת יש לחפש אותו שוב, תחת ההנחה שהוא נמצא בתחום אחר. ניתן לחפש באופן סידרתי בתחומים עוקבים עד שמוצאים θ המתאים להנחה.

מפתרון בעיית הקצאת הסיביות האופטימלית מתקבל כי r_1^* תמיד חיובי. כאשר נבחר להשתמש ב-TRELLIS בעל מספר ענפים המתפצל מכל צומח q , הקצבים האפשריים הם:

$$r = \frac{\log_2 q}{n} \quad n = 1, 2, \dots$$

ז"א, הקצב המקסימלי האפשרי הוא $\log_2 q$. עבור בחירה מסוימת של q , n_1 נבחר להיות השלם המקסימלי כך שיתקיים:

$$r_1^* \leq \frac{\log_2 q}{n_1} = r_1$$

r_1 - הקצב שניתן לתחום ה- i .

לכן מתקבל כי הקצב הכולל בדרך כלל גדול מהאילוץ שהוכתב.

עד כה תארנו תהליך הקצאת סיביות במקרה בו עץ ההפרדה לתחומים היה מלא. במקרה בו ההפרדה לתחומים לא מלאה בכל דרגה ומתקבל עץ לא סימטרי, התמונות המיוצגות את תחומי החדר לא שוות בגודלן ולכן יש לשנות את (4.1) כך שבמוצע הקצבים, יבוא לידי ביטוי גודל התחום. בצורה זו נקבל את (4.6):

$$R = \left(\sum_{j=1}^{\bar{K}} g_j \right)^{-1} \sum_{i=1}^{\bar{K}} g_i \cdot \max \left(\frac{1}{2} \log \frac{\sigma_i^2}{\theta_i}, 0 \right) \quad (4.6)$$

כאשר g_i הוא היחס בין מספר הפיקסלים בתמונה המיוצגת את החדר ה- i לבין מספר הפיקסלים בתמונה הקטנה ביותר (המתקבלת בדרגה הגבוהה ביותר).

סה"כ העיוות, D_T , נשאר בהתאם למשוואה (4.2).
 בתהליך המינימיזציה של D_T תחת האילוץ ב-(4.6)
 מחקבל כי: $\theta_1 = g_1 \theta$ ובכדי למצוא את θ וע"י כך
 גם את r_1 נציב ב-(4.6) ונקבל את (4.7):

$$R = \left(\frac{1}{\sum_{j=1}^{\bar{K}} g_j} \right) \cdot \sum_{i=1}^{\bar{K}} g_i \cdot \max \left(\frac{1}{2} \log \frac{\sigma_1^2}{g_i \cdot \theta}, 0 \right) \quad (4.7)$$

ניתן להתייחס לרשום ב-(4.7) כאילו במקום התחום ה- i
 קיימים g_i תחומים בגודל התמונה הקטנה ביותר ולכל
 אחד מהם ווריאנס σ_1^2/g_i וסה"כ מספר התחומים
 הוא:

$$\sum_{j=1}^{\bar{K}} g_j$$

התייחסות זו מאפשרת שימוש ב-(4.5) והתהליך שהוסבר
 קודם למציאת θ . לאחר מציאת θ יתקבל:

$$r_i = \max \left(\frac{1}{2} \log \frac{\sigma_1^2}{g_i \cdot \theta}, 0 \right) \quad i = 1, \dots, \bar{K}$$

4.1.2 איכלוס ה-TRELLIS:

בהנחה שכל אחת מתח התמונות המייצגות את תחומי החדר
 היא בקרוב חסרת קורלציה יש לאכלס את ה-TRELLIS
 המקודד את התחום ה- i , מתוך הפילוג
 $N(m_1, \sigma_1^2 - \theta)$, שהוא פילוג היציאה המגשים
 m_1 ו- σ_1^2 הם הממוצע והוריאנס של התחום
 ה- i .

המפענח מקבל את $\{m_1\}_{i=1}^{\bar{K}}$, $\{\sigma_1^2\}_{i=1}^{\bar{K}}$ בתור
 מידע צד. q ו- L קבועים מראש וידועים למקודד
 ולמפענח ולכן ניתן לקבוע מתוך $\{\sigma_1^2\}$ את θ
 ו- r_1 ולפיכך את מספר המילים, n_1 , בכל ענף בתחום
 ה- i ואת המילים המאכלסות כל ענף. המקודד והמפענח
 מכילים רשימה ארוכה מספיק של מ"א גאוסים בח"ס
 המפולגים $N(0,1)$ ולצורך איכלוס ה-TRELLIS משתמשים
 בהם בצורה רציפה תוך הפיכתם למ"א מפולגים
 $N(m_1, \sigma_1^2 - \theta)$ באמצעות טרנספורמציה לינארית.
 באופן מעשי בכדי לחסוך בחישובים ניתן למצוא את
 המסלול האופטימלי בעץ מנורמל. לצורך זאת יש לנרמל
 כל דגם בפס ה- i באמצעות טרנספורמציה לינארית, כך
 שיהיה בעל ממוצע אפס ווריאנס $\sigma_1^2/(\sigma_1^2 - \theta)$.
 לאחר השחזור יש לבצע טרנספורמציה הפוכה, ז"א, כל דגם
 משוחזר, יש להכפיל ב: $\sigma_1^2 - \theta$ ולהוסיף את m_1 .
 החסכון בחישובים הוא בכך שאם הנירמולים מבצעים על
 האות המקודד ולא על כל המילים המאכלסות את
 ה-TRELLIS.

4.1.3 תוצאות קידוד תמונות:

בטבלה 4.1 מרוכזות התוצאות של קידוד תמונה גאוסית, $x(n,m)$, שהתקבלה באופן הבא:

$$x(n,m) = \mu_1 x(n,m-1) + \mu_2 x(n-1,m) - \mu_1 \mu_2 x(n-1,m-1) + u(n,m)$$

$u(n,m)$ - חסר זכרון ומפולג $N(0, (1-\mu_1^2)(1-\mu_2^2))$

התוצאות המושוות הם בקידוד התמונה בצורות הבאות:

א. קידוד באמצעות TRELLIS של התמונה המקורית ללא הפרדה לתחומי תדר. ה-TRELLIS מאוכלס באקראי מתוך פילוג גאוסית בעל ממוצע אפס וואריאנס 0.75 שהוא הפילוג המגשים למקור גאוסית חסר זכרון בעל וריאנס 1 בקצב b/p 0.1 פרמטרי ה-TRELLIS הם: $q = 32$, $n = 5$, $L = 64$, $K = 3$. החיפוש מתבצע באמצעות אלגוריתם M כאשר $M = 30$.

ב. קידוד באמצעות TRELLIS של תחומי התדר שהתקבלו כתוצאה מהפרדה ל-4 תחומים (דרגה אחת) באמצעות מסננים באורך 32. q , K ו-M נשארים קבועים בכל התחומים אך n והאיכלוס משתנים בהתאם להקצאת הסיביות.

ג. קידוד באמצעות TRELLIS של תחומי התדר שהתקבלו ב-2 דרגות (16 תמונות). ההפרדה לתחומי התדר באמצעות מסנן באורך 32 בשתי הדרגות. מבנה ה-TRELLIS ואיכלוסו - כמו בסעיף ב'.

ד. הקידוד כמו בסעיף ג', אך מספר תחומי התדר הוא 64 (3 דרגות) ואורך המסננים הוא: בדרגה הראשונה 32, בשניה 16 ובשלישית 8.

עבור כל אחד מהמקרים א' - ד' נבדקו תוצאות הקידוד במקרה בו: $\mu_1 = \mu_2 = 0.8$.

התוצאות מסוכמות בטבלה 4.1. הערכים בתוך הטבלה הם שגיאה ריבועית ממוצעת (mse).

mse	
0.3289	1. קידוד התמונה המקורית
0.1039	2. הפרדה ל-4 תחומי תדר
0.0567	3. הפרדה ל-16 תחומי תדר
0.0557	4. הפרדה ל-64 תחומי תדר
0.0324	. החסם התיאורטי המתקבל מפונקציית קצב העיוות

טבלה 4.1: תוצאות קידוד תמונה גאוסית

TABLE 4.1: DISTORTION (mse) OBTAINED IN CODING GAUSSIAN IMAGE

מטבלה 4.1 ניתן לראות שהפרדה לתחומי תדר וקידוד כל אחד מתחומי התדר בנפרד באמצעות TRELLIS משפרת את הביצועים. ככל שמספר תחומי התדר רב יותר השגיאה הריבועית קטנה. השיפור המשמעותי הוא במעבר מ-4 ל-16 תחומי תדר. הגדלת מספר תחומי התדר ל-64 משפרת את ביצועי המקודד רק במעט בגלל שהצפיפות הספקטרלית של מרבית תחומי התדר (בדרגה השנייה) בקרוב שטוחה ולכן הפרדה נוספת אינה מועילה.

תמונה 4.1^א מכילה את התמונה המקורית "LADY". תמונה 4.1^ב מכילה את 4 תחומי התדר המתקבלים מהפרדה באמצעות 2D-QMF בדרגה אחת תוך שימוש במסנן ספריבילי באורך 32. תמונה 4.1^ג מתקבלת מהפרדת תחום התדרים הנמוך בדרגה ה-I ל-4 תחומים באמצעות מערך מסננים באורך 32. ניתן לראות שמרבית האינפורמציה נמצאת בתחום התדרים הנמוכים. יחס אחר לרעש בין התמונה המקורית לזו המשוחזרת מ-16 תחומי התדר ללא קידוד הינו 51dB ולא ניתן להבדיל ביניהם.



4.1^א
תמונה המקורית
ORIGINAL IMAGE



4.1^ב
4 תחומי התדר מהדרגה ה-I
4 BANDS OF FIRST STAGE



4.1^ג
4 תחומי התדר הנמוכים מהדרגה השנייה
4 LOW BANDS OF SECOND STAGE

תמונה 4.1 - 4.1

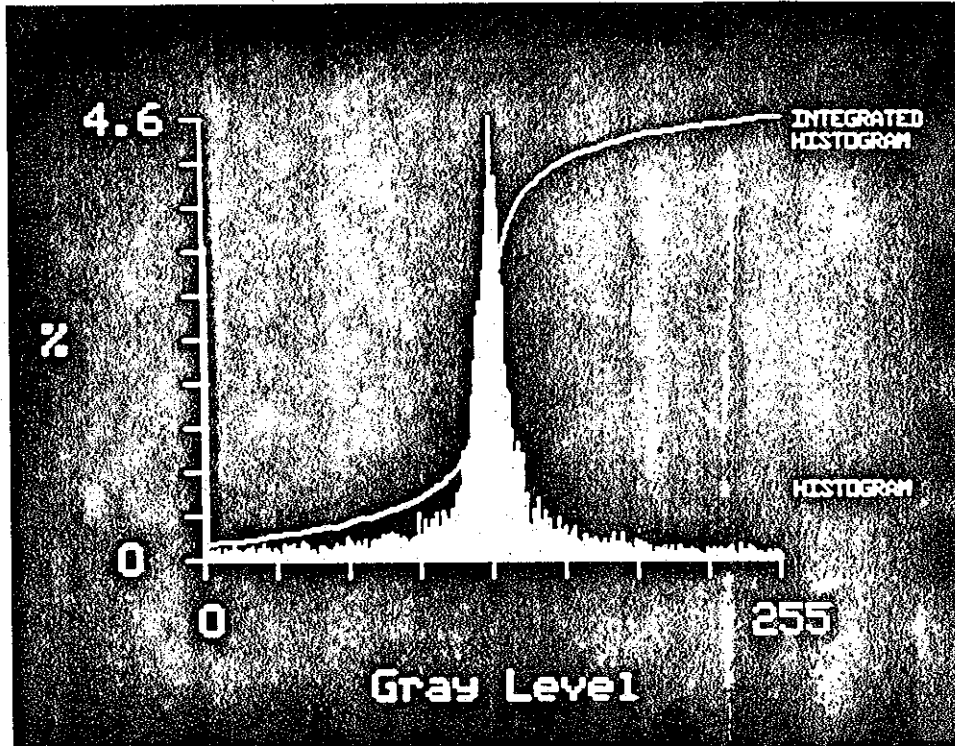
תמונה 4.2 מתקבלת משיחזור "LADY" לאחר קידוד באמצעות TRELLIS. התמונה "LADY" מופרדת ל-16 תחומי חדר המקבלים באמצעות 2 דרגות כאשר אורך המסננים בכל דרגה הוא 32. הקצאת הסיביות היא כמחזור בתחילת הסעיף ופרמטרי ה-TRELLIS הם: $q = 32$, $L = 256$, $K = 3$. החיפוש מבצע באמצעות אלגוריתם M כאשר $M = 30$. איכלוס ה-TRELLIS הוא באמצעות פילוג גאוס. לצורך חיסכון בזכרון האיכלוס הוא קומפלמנטרי ז"א, אם נאכלס ענף במילה $V = X + m_1$ הענף הנא היוצא מאותו מצב יאוכלס ב- $V = -X + m_1$. מ-[10] מתקבל שהעיוות הממוצע המתקבל באיכלוס זה כמעט זהה לאיכלוס לא קומפלנטרי כאשר היתרון הוא שהזכרון הנדרש קטן פי 2. התמונה המייצגת את תחום החדר הנמוך ביותר מקודדת בנפרד באמצעות DPCM שכן מקדם הקורלציה שנמדד בה גבוה (0.9 לאורך שורות) ובהקצאת הסיביות מתקבל שקצב הפס הוא $0.5b/p$. סדר החזאי ב-DPCM הוא 1 (חיזוי על סמך הפיקסל הסמוך בשורה הנוכחית). הקונטיזר במקודד הוא קונטיזר של \max לפילוג לפלס (כפי שמוצע ב-[5]), קצב הקידוד $0.96b/p$. יחס אות לרעש (SNR) המתקבל הוא $30dB$.



תמונה 4.2: שיחזור מקידוד באמצעות TRELLIS (16 תחומי חדר)

PICTURE 4.2: RECONSTRUCTED IMAGE FROM TRELLIS CODING (16 BANDS)

בכדי לשפר את הקידוד נעשה נסיון להתאים את איכלוס ה-TRELLIS לפילוג תחום החדר שאינו בהכרח גאוס. הסטוגרמות של תחומי החדר השונים (מלבד פס החדר המכיל את החדרים הנמוכים ביותר בתמונה), מראות שפילוג כל אחד מתחומים אלו הוא בקרוב אקספוננציאלי-דו-צדדי (פילוג לפלס). דוגמא להסטוגרמה של תחום החדר המתקבל מיציאת הדרגה השניה כאשר בדרגה הראשונה סונן באמצעות $H_{21}(w_1, w_2)$ ובדרגה השניה סונן באמצעות $H_{11}(w_1, w_2)$, נמצאת בתמונה 4.3. אם היה נחון ביטוי סגור לפונקציית קצב העיוות לפילוג לפלס ומידת עיוות שגיאה ריבועית ממוצעת, ניתן היה לבצע תהליך הקצאת סיביות המותאם לפילוג לפלס. הנעיה היא שלא קיים ביטוי סגור לפונקציית קצב העיוות. כמו כן לא נמצא ביטוי סגור לפילוג המגשים, הנדרש לצורך איכלוס ה-TRELLIS.



תמונה 4.3: הסטוגרמה אופיינית לתחומי החדר
 PICTURE 4.3: TYPICAL HISTOGRAM OF SUBBANDS

בנסיון להתגבר על בעיה זו נבדקו שתי אפשרויות לאיכלוס ה-TRELLIS. האפשרות הראשונה היא לבצע הקצאת סיביות לפי הוריאנטים כאילו פילוג פסי החדר הוא גאוסי ולאחר מכן איכלוס ה-TRELLIS בפילוג לפלס בעל וריאנס σ_1^2 וממוצע m_1 .

האפשרות השניה היא להשתמש בביטוי הסגור לפונקציית קצב העיוות לפילוג לפלס ומידת עיוות שאיננה שגיאה ריבועית אלא השגיאה בערך מוחלט ($d(X,Y) = |X-Y|$). עבור מידת עיוות זו הביטוי לפונקציית קצב העיוות נחון ב-(4.8) [26].

$$R(\theta) = \max \left(\log \frac{\sigma}{\sqrt{2}\theta}, 0 \right) \quad (4.8)$$

$$D = \min \left(\theta, \frac{\sigma}{\sqrt{2}} \right)$$

לא ניתן להשתמש בפונקציית קצב עיוות זו לצורך הקצאת סיביות שכן עבור מדד עיוות זה לא מחקיים:

$$D_T = \sum_1 D_1$$

נשתמש בהקצאת סיביות לפילוג גאוסי ונקבל r_1 סיביות לתחום ה-1. מחוץ r_1 נמצא θ ב-(4.8) ומחוד ידיעת θ ניתן להשתמש בפילוג מגשים לפלס ומידת עיוות שהיא השגיאה בערך מוחלט, לאיכלוס ה-TRELLIS. פילוג היציאה המגשים נחון ב-(4.9).

$$Q(y) = \frac{2\theta^2}{\sigma^2} \delta(y) + \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \left(1 - \frac{2\theta^2}{\sigma^2}\right) e^{-\frac{\sqrt{2}|y|}{\sigma}} \quad (4.9)$$

מאחר וברצוננו למצוא מינימום לשגיאה הריבועית למרות שאיכלסנו את ה-TRELLIS בפילוג המותאם לשגיאה שהיא ערך מוחלט, החיפוש של המסלול בעל העיוות הקטן ביותר ב-TRELLIS יהיה לפי מדד שגיאה ריבועית.

ניתן להראות שאם נשתמש לצורך הקצאת סיביות בפוקציה קצב העיוות לפילוג לפלס הנתונה ב-(4.8) ונדרש מינימום ל- ED_1 , תחת מידת עיוות שהיא השגיאה בערך מוחלט (למרות שהסכום אינו העיוות בין התמונה המקורית למשוחררת) נקבל בדיוק אותה הקצאת סיביות כמו במקרה הגאומטרי.

שתי אפשרויות אלו לאיכלוס ה-TRELLIS נבדקו על התמונה "LADY". התמונה קודדה בקצב $0.98b/p$ כאשר מערך המסננים, בעל 2 דרגות מלאות. המסנן בדרגה הראשונה באורך 32 ובדרגה השניה בעל 16 מקדמים. מבנה ה-TRELLIS והחיפוש בו זהים לתהליך הקידוד באיכלוס גאומטרי שחוצאותיו בתמונה 4.2 כאשר נאכלס את ה-TRELLIS בפילוג לפלס לפי אפשרות 1 התקבל בקצב $0.98b/p$ $SNR = 30.62dB$ ובקידוד לפי אפשרות 2 כאשר האיכלוס הוא מגשים לפלס התקבל כי $SNR = 30.78dB$. ההבדל בין שתי אפשרויות אלו לא גדול ולא ניתן למצוא הבדלים הנראים לעין בין שתי התמונות המשוחררות.

חיפוש תחת מידת עיוות שהיא השגיאה בערך מוחלט ולא תחת מידת עיוות שגיאה ריבועית ממוצעת הביא לתמונה משוחררת בעלת איכות סובייקטיבית נמוכה יותר ($SNR = 30.14dB$) לכן בהמשך יבוצע חיפוש לפי mse .

התוצאות הטובות ביותר שהתקבלו עד כה היו תוך שימוש באיכלוס מגשים לפלס. עבור איכלוס זה, נבדוק את השפעת אורכי המסננים ומספר הדרגות על תוצאות הקידוד. בטבלה 4.2 מסוכמות תוצאות הקידוד.

מבני העץ הכלולים בטבלה הם:

א. עץ מלא - כאשר ב-2 דרגות ההפרדה היא ל-16 תחומי תדר וב-3 דרגות ל-64 תחומי תדר.

ב. עץ לא מלא - בדרגה השניה מופרד רק תחום התדרים הנמוך. מתקבלים 7 תחומי תדר - ציור 4.1 (א).

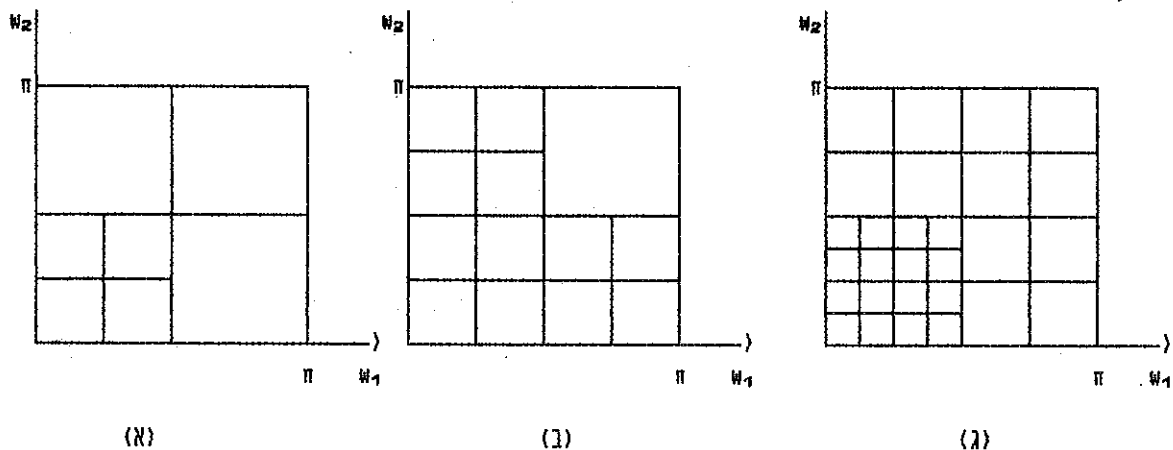
ג. עץ לא מלא - כל תחומי התדר, מלבד תחום התדרים הגבוהים, שהתקבלו בדרגה הראשונה מופרדים בדרגה השניה. מתקבלים 13 תחומי תדר - ציור 4.1 (ב).

ד. עץ לא מלא - 4 תחומי התדר הנמוכים, המתקבלים בעץ מלא ב-2 דרגות, מופרדים לדרגה שלישית. סה"כ 28 תחומי תדר - ציור 4.1 (ג).

SNR [dB]	קצב (bits/pixel)	אורכי מסננים			מבנה עץ	מספר דרגות	
		דרגה 3	דרגה 2	דרגה 1			
30.45	0.99	-	8	8	א	2	1
30.6	0.98	-	8	16	א	2	2
30.78	0.98	-	16	32	א	2	3
30.93	0.99	-	32	32	א	2	4
30.94	1.0	-	32	64	א	2	5
30.82	1.0	8	8	8	א	3	6
31.11	1.0	8	8	16	א	3	7
31.13	0.97	8	16	32	א	3	8
31.2	0.97	8	32	32	א	3	9
31.22	0.97	16	32	64	א	3	10
30.43	0.97	-	16	32	ב	2	11
30.5	0.97	-	32	32	ב	2	12
30.76	0.98	-	16	32	ג	2	13
30.89	0.98	-	32	32	ג	2	14
30.79	0.99	8	8	16	ד	3	15
30.91	0.98	8	16	32	ד	3	16

טבלה 4.2: תוצאות (SNR) המתקבלות כפונקציה של מבנה מערכי המסננים

TABLE 4.2: SNR [dB] OBTAINED FOR DIFFERENT FILTER BANK STRUCTURES



ציור 4.1 - 4.1 FIGURE 4.1

בתהליך הקידוד כאשר מספר הדרגות הוא 2, התמונה המייצגת את תחום התדרים הנמוך קודדה באמצעות DPCM, בקצב $5b/p$. הסטוגרמת פס התדר איננה דומה כלל ללפס. מקודד ה-DPCM זהה למקודד בו השתמשנו לתחום התדר הנמוך כאשר איכלוס ה-TRELLIS היה גאוסי.

כאשר מספר הדרגות הוא 3, 4 תחומי התדר המתקבלים מהפרדת תחום התדר הנמוך בדרגה השניה גם כן מקבלים $5b/p$ כ"א ולכן מקודדים גם כן באמצעות DPCM.

הפרדה טובה יותר של תחומי התדר באמצעות מסננים ארוכים יותר, באותו מבנה עץ, מביאה לשיפור ה-SNR כפי שניתן לראות מתוך הטבלה. ניתן להבחין בשינויים גם באיכות הסובייקטיבית אך ההבדלים הנראים לעין לא גדולים. כמו כן יש לשים לב שהגדלת המסנן בדרגה הראשונה מ-32 ל-64 לא הועילה, יחד עם זאת גדלה כמות החישובים ולכן אין טעם להעלות את אורך המסנן מעבר ל-32.

השיפור המשמעותי בעיקר באיכות הסובייקטיבית מתקבל כתוצאה מהמעבר משימוש ב-2 דרגות (עץ מלא) ל-3 דרגות (עץ מלא). התמונות המשוחררות לאחר הפרדה ב-3 דרגות נקיות וברורות יותר. לדוגמא: עדיף להשתמש באפשרות 8 על פני אפשרות 4 הן מבחינת כמות החישובים והן מבחינת איכות התמונה המשוחררת, בתמונה 4.4 א' התמונה המשוחררת לפי 4 וב-4.4 ב' התמונה המשוחררת לפי 8. לצורך השוואה מצורפת ב: 4.4. התמונה המשוחררת מקידוד כל תחומי התדר באמצעות DPCM (16 תחומי תדר).



4.4 א': תוצאות אפשרות 4
בטבלה 4.2
RESULT OF POSSIBILITY 4
IN TABLE 4.2



4.4 ב': תוצאות אפשרות 8
בטבלה 4.2
RESULT OF POSSIBILITY 8
IN TABLE 4.2



4.4 ג': קידוד תחומי התדר באמצעות DPCM (2 דרגות)
SUBBANDS CODED USING DPCM QUANT. (2 STAGES)

בטבלה מצורפות תוצאות קידוד באמצעות עצים לא מלאים. מטרת בדיקה זו היא לקבוע באיזו מידה ירדו הביצועים כתוצאה מכך שלא נפריד לתחומי תדר את התחומים בהם הוריאנס נמוך וע"י כך נחסוך בכמות החישובים.

האיכות הסובייקטיבית של מבנה עץ ב' קטנה מזו המתקבלת בעצים מלאים כאשר ההפרדה מתבצעת באמצעות מסננים באותו אורך. אך שימוש במבנה עץ ג' במקום א' בשתי דרגות, או שימוש במבנה עץ ד' במקום עץ מלא ב-3 דרגות, לא משנה כמעט בכלל את האיכות הסובייקטיבית.

בחישוב הקצב כלול:

א. המידע על המסלול הטוב ביותר ב-TRELLIS.

ב. מידע על נקודת ההתחלה של המסלול. יש לשלוח נקודת התחלה שכן התחלנו את ה-TRELLIS מ-M מצבים ולא ממצב אחד בלבד. ב-[10] הראו שלגבי מקור גאוסי עדיף להוסיף מידע צד על המצב ההתחלתי של המסלול שנבחר ובכך לקבל שכמות המסלולים שנסרקו גדול יותר והביצועים עבור אותו קצב (כולל מידע צד) טובים יותר.

ג. בכדי שהמענה ידע את מבנה ה-TRELLIS עליו לדעת את הוריאנסים והמוצעים של כל תחומי התדר. כל וריאנס וכל ממוצע קודדו באמצעות 8 סיביות. כאשר הוריאנס יכול לקבל ערך שלם בתחום [0:255] הוריאנס היחיד שחורג מהתחום הנ"ל הוא זה של פס התדר הנמוך והוא מקודד בתחום [0:4092] ברזולציה 4 ואילו הממוצע מקבל ערכים בתחום [25.4, -25.6] ברזולציה של 0.2.

ד. בפסי התדר המקודדים באמצעות DPCM יש לשלוח גם את מקדם הקורלציה המקבל ערכים בתחום [-1, 1] ברזולוציה 1/128 (סה"כ 8 סיביות).

עבור אותו מבנה עץ ו-TRELLIS נבחנה השפעת מידת החיפוש באמצעות אלגוריתם M. במבנה עץ מלא בשתי דרגות כאשר בדרגה הראשונה מסנן באורך 32 ובשניה 16. עבור M=30 התקבל כי SNR = 30.78dB, עבור M=16 התקבל SNR = 30.58dB ועבור M=8 SNR = 30.25dB. מכאן הקטנת כמות החישובים בחיפוש ב-TRELLIS פי 4 הביאה לכך שהתוצאות טובות בפחות בכ-0.5dB.

בפרק 3 הוסבר שעבור אותו קצב וכמות חישובים רצוי לבחור את n ו-q הקטנים ביותר המקיימים:

$$R = \frac{\log_2 q}{n}$$

במערכת שתוארה נבחר q באופן קבוע להיות 32 בכדי לאפשר קצב קידוד של $b/p = 5$. נעשה נסיון להתאים את q בכל תחום תדר לקצב שקיבל אותו תחום בהקצאת הסיביות. בנסיון זה הופרדה התמונה "LADY" ל-16 תחומי תדר. מתוך 10 תחומי התדר בהם $r_1 > 0$, 4 קודדו באמצעות $q=32$, $K=3$ ו- $M=30$ ו 6 קודדו באמצעות $q=2$, $K=11$ ו- $M=60$. ה-SNR שהתקבל היה זהה לגמרי לזה שהתקבל כאשר כל הפסים שקודדו באמצעות TRELIS קודדו באמצעות $q=32$ ו- $M=30$ אך כמות החישובים שנדרשה לשם כך קטנה בהרבה. מכאן שרצוי לעבוד ב- q הקטן ביותר האפשרי בכל תחום תדר. קיימת בעיה ביישום מערכת קביעת ה- q המתאים לכל תחום תדר הנובעת מכך שיייתכן מצב בו הקצב הנקבע בהקצאת הסיביות מתאים בדיוק ל- q מסויים, למשל: $R=5/7=0.714$ המתאים ל: $q=32$ ו- $n=7$. בכדי להשתמש ב: $q=8$ למשל יש לחרוג לקצב $R=3/4=0.75$ ובכדי להשתמש ב: $q=4$ יש לחרוג לקצב $R=2/3=0.6666$. הבעיה היא מהי החריגה המקסימלית האפשרית מההקצאה האופטימלית כך שעדיין כדאי יהיה להקטין את q . בכדי לענות לשאלה זו יש לבדוק באופן אמפירי מספר רב מאד של מצבים אפשריים. בגלל הקושי בפתרון הבעיה בחרנו בעבודה זו לקבוע q יחיד לכל תחומי התדר, ובכדי לאפשר קצב של עד $b/p = 5$ נקבע ש: $q=32$.

4. אדפטציה של איכלוס ה-TRELIS והקצאת הסיביות בהתאם לאיזורים בתמונה:

העובדה כי התמונה איננה סטציונרית ובאיזורים מסויימים יתכן מצב בו מרבית האנרגיה מרוכזת בתדרים גבוהים ובאיזור אחר האנרגיה מרוכזת בתדרים נמוכים, מביאה לכך שניתן לשפר את איכות הקידוד ע"י כך שנתאים את הקצאת הסיביות ואת איכלוס ה-TRELIS לוריאנט המקומי של פסי התדר. בסעיף זה נתאר שתי גישות לאדפטציה מסוג זה.

4.2.1 אדפטציה תחת אילוף קצב קבוע לכל האיזורים בתמונה:

בהקצאת הסיביות שתוארה בסעיף 4.1 התקבל כי איכלוס ה-TRELIS ומספר הסיביות נשאר קבוע על פני כל תחום התדר. בסעיף זה מתוארת גישה לפיה כל איזור בתמונה המקורית יקבל בסה"כ אותה כמות סיביות, אך בכל איזור חלוקת הסיביות בין תחומי התדר תשתנה בהתאם לוריאנטים המקומיים של תחומי התדר, וגם איכלוס הענפים מתבצע בהתאם לוריאנט המקומי של תחום התדר. נצפה לשיפור בביצועים, כשהמחיר לכך הוא חוספת במידע צד שנשלח למפענח. במקום לשלוח וריאנט וממוצע עבור כל תחום תדר יש לשלוח וריאנט וממוצע של כל איזור בכל תחום תדר.

באופן מעשי במקרה שמערך המסננים הוא במבנה עץ מלא חולקו כל תחומי התדר לאיזורים בגודל 256 דגמים. החלוקה מתקבלת ע"י סריקת תת-התמונה המתאימה לתחום התדר לאורך שורות. לכל איזור מתבצע שיערוך הוריאנט והממוצע. הקצאת הסיביות מתבצע לפי הוריאנטים של כל תחומי התדר המתאימים לאיזור מסויים, באופן שתואר בסעיף 4.1, תחת האילוף של קצב קידוד הנתון לתמונה כולה. כל איזור בפס התדר בגודל 256 דגמים מקודד באמצעות עץ TRELIS נפרד המאוכלס בהתאם לקצב שקיבל האיזור.

כאשר מערך המסננים הוא במבנה עץ לא מלא, נשמר העיקרון שהוא קצב קבוע לכל איזור בתמונה המקודדת. לכן מספר הדגמים המייצגים אותו איזור שמייצגים 256 דגמים בדרגה הגבוהה ביותר, יהיה $256 \times g_1$ (הוא כזכור היחס בין מספר הדגמים בתחום החדר בדרגה הגבוהה ביותר לבין מספר הדגמים בתחום ה- i). לדוגמא: במקרה ש- g_1 הוא 4 יקודד האיזור בתחום ה- i באמצעות עץ TRELLIS אחד בו משתמשים 4 פעמים, כאשר כל פעם מקודד בלוק בגודל 256 דגמים. הקצאת הסיביות מתבצעת באופן זהה לזה המתואר בסעיף 4.1 עבור מערך מסננים שאינו במבנה עץ מלא.

תוצאות הקידוד שהתקבלו הם:

א. במבנה עץ מלא 2 דרגות ואורכי מסננים 32 בדרגה הראשונה ו-16 בדרגה השנייה, כך שהקצב הוא $R=0.99$: $SNR = 31.14dB$.

ב. במבנה עץ מלא ב-3 דרגות ואורכי מסננים 8, 16, 32 בקצב $R=0.95$ התקבל $SNR = 31.34 dB$.

במקרה זה גם ב-2 דרגות וגם ב-3 דרגות רק ה-L.P מקודד באמצעות DPCM. פרמטרי ה-TRELLIS הם: $q=32$ ו- $K=3$, בכל פעם מקודד וקטור בגודל $M=30$.

בשני המקרים לא ניכר שיפור גדול ב-SNR לעומת אותו מבנה עץ ואותה כמות חישובים כאשר לא מבצעים אדפטציה לפי איזורים אך ניכר שיפור משמעותי באיכות הסובייקטיבית.

4.2.2 אדפטציה חחת אילוץ עיוות קבוע בכל איזור:

קיימים בתמונות איזורים שבהם כמות המידע קטן מאד, למשל איזורי רקע. בכדי לייצג איזורים אלו נדרשת כמות מועטה של סיביות. בתהליך האדפטציה שתואר בסעיף 4.2.1 איזורים אלו קבלו כמות סיביות זהה לאיזורים בהם נדרשת כמות סיביות רבה יותר לקבלת אותו עיוות. כתוצאה מכך ישנם בתמונה המשוחזרת איזורים בהם העיוות הממוצע קטן מאד ואיזורים בהם העיוות גדול יותר וההבדלים בין התמונה המקורית למשוחזרת בולטים יותר. בכדי להתגבר על בעיה זו מוצעת השיטה הבאה להקצאת סיביות בתמונה.

לפי שיטה זו נפריד כל אחת מתת התמונות לאיזורים באותה צורה שבה הופרדו התמונות לאיזורים בסעיף הקודם. נשערך את הוריאנס של כל איזור j , בפס ה- i , σ_{ij}^2 . נניח כי כל איזור בכל תת תמונה הוא בקרוב גאוסי וחסר קורלציה. נבצע הקצאת סיביות כמתואר בסעיף 4.1 כאשר לצורך חישוב r_{ij} ו- θ_{ij} נשתמש באוסף כל הוריאנסים שחושבו $\{\sigma_{ij}^2\}$. המינימיזציה מתבצעת על מוצע השגיאה הריבועית בין התמונה המקורית למשוחזרת והאילוץ הוא שהקצב הממוצע בתמונה כולה יהיה R . יחכן שכתוצאה מההקצאה איזורים מסויימים יקבלו פחות סיביות אך מתקבל ש- θ_{ij} קבוע לכל פסי החדר, בהם $r_{ij} > 0$ ולכן גם ממוצע העיוות יהיה בקרוב קבוע בכלם. באיזורים בהם $r_{ij} = 0$ ממוצע העיוות יהיה נמוך יותר.

ניתן להעריך את השיפור הצפוי מבחינת שגיאה ריבועית בשיטת אדפטציה זו לעומת השיטה שתוארה בסעיף 4.2.1. נניח כי כל חת תמונה חולקה ל-M איזורים וכן קיימים N פסי חדר שהתקבלו מהפרדה באמצעות עץ מלא. כמו כן נניח כי $r_{1j} > 0$ לכל $j, 1 \leq j \leq M, 1 \leq i \leq N$.

הקצב הממוצע על פני התמונה מוגבל ל-R, ז"א:

$$R = \frac{1}{MN} \sum_{i,j} r_{1j} = \frac{1}{MN} \sum_j \sum_i \frac{1}{2} \log \frac{\sigma_{1j}^2}{\theta_{1j}}$$

לפי שיטה ראשונה בכל איזור קצב קבוע, ז"א:

$$R_j = \frac{1}{N} \sum_i r_{1j} = \text{const} = R$$

ולכן בבעיה המינימיזציה לעיוות נקבל כי θ_{1j} קבוע לכל תחומי החדר באיזור מסויים ויסומן ב- $\hat{\theta}_j$. והעיוות הממוצע לפי שיטת אדפטציה זו, $D_{T,1}$, יהיה:

$$D_{T,1} = N \frac{1}{M} \sum_j \hat{\theta}_j$$

$$\hat{\theta}_j = \frac{N}{(\pi \sum_{i=1}^N \sigma_{1j}^2)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-2R}{2} \quad \text{כאשר}$$

לפי השיטה השניה לא קיימת מגבלת הקצב הקבוע לאיזורים שונים בתמונה ולכן בבעיה המינימיזציה על העיוות מתקבל ש- θ_{1j} קבוע לכל התמונה ויסומן ב- $\hat{\theta}$. ממוצע העיוות המתקבל לפי שיטת אדפטציה זו $D_{T,2}$ יהיה:

$$D_{T,2} = N \cdot \hat{\theta}$$

$$\hat{\theta} = \frac{1}{NM} \frac{-2R}{2} \cdot \left(\pi \sum_{i,j} \sigma_{1j}^2 \right)^{1/2}$$

השיפור בשיטת אדפטציה זו לעומת הראשונה יהיה:

$$D_{r.2} = \frac{1}{M \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{1j}^2 \right)} = \frac{1}{M \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{1j}^2 \right)} \quad (4.10)$$

$$D_{r.1} = \frac{1}{NM \left(\prod_{j=1}^M \left(\prod_{i=1}^N \sigma_{1j}^2 \right) \right)} = \frac{1}{NM \left(\prod_{j=1}^M \left(\prod_{i=1}^N \sigma_{1j}^2 \right) \right)}$$

גורם השיפור גדול או שווה ל-1 שכן הוא היחס בין ממוצע חשבוני לממוצע גיאומטרי של $\{\sigma_j^2\}$ כאשר:

$$\bar{\sigma}_j^2 \triangleq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{1j}^2 \quad (4.11)$$

תוצאות קידוד "LADY" לפי שיטת אדפטציה זו כאשר פרמטרי ה-TRELLIS ומידת החיפוש M נשארו זהים לאילו שבקידוד באמצעות שיטת האדפטציה הקודמת הם:

א. מערך מסננים ב-2 דרגות, אורכי מסננים 16, 32, 16 (עץ מלא) $R = 1.0b/p$ $SNR = 31.83dB$

ב. מערך מסננים ב-3 דרגות, אורכי מסננים 8, 16, 32, 16 (עץ מלא) $R = 1.0b/p$ $SNR = 31.48dB$

כאשר היה שימוש ב-2 דרגות השיפור בשיטת אדפטציה זו הוא 0.7dB. לעומת זאת בשימוש ב-3 דרגות השיפור לא משמעותי ולמעשה התקבלו תוצאות טובות פחות. ניתן להסביר את העובדה שב-2 דרגות השיפור רב יותר מתוך (4.10). כאשר התמונה מופרדת ל-16 תחומי תדר בלבד מספר האיזורים השונים בכל תח תמונה הוא 16 (תח התמונה בגודל 64 x 64 ולכן 16 איזורים בגודל 256 דגמים). לעומת זאת כאשר התמונה מופרדת ל-64 תחומי תדר כל תחום תדר מחולק ל-4 איזורים בלבד. הסיכוי ש- $\bar{\sigma}_j^2$ יהיו שונים זה מזה וע"י כך השיפור בשיטת אדפטציה זו יהיה גדול יותר, גדול כאשר נחלק את התמונות המייצגות תחומי תדר לאיזורים רבים יותר. לכן צפוי היה שהשיפור יהיה גדול יותר ב-2 דרגות. תמונה 4.5 מכילה את תוצאות הקידוד שתוארו בשתי שיטת האדפטציה.



שיטה I - 2 דרגות
ADAPTATION I, 2 STAGES



שיטה I - 3 דרגות
ADAPTATION I, 3 STAGES



שיטה II - 2 דרגות
ADAPTATION II, 2 STAGES



שיטה II - 3 דרגות
ADAPTATION II, 3 STAGES

תמונה 4.5 - 4.5 PICTURE 4.5

מבחינה סובייקטיבית התמונות שקודדו בשתי שיטות האדפטציה, ב-3 דרגות הן התמונות הטובות יותר, למרות שלתמונה המשוחזרת ב-2 דרגות הפרדה ובשיטת האדפטציה השנייה SNR הגבוהה ביותר. בקצב קידוד של $1b/p$, בתמונה זו, קשה לקבוע איזו משיטות האדפטציה טובה יותר מבחינה סובייקטיבית.

פרק 5. הוספת חיזוי במקודדים

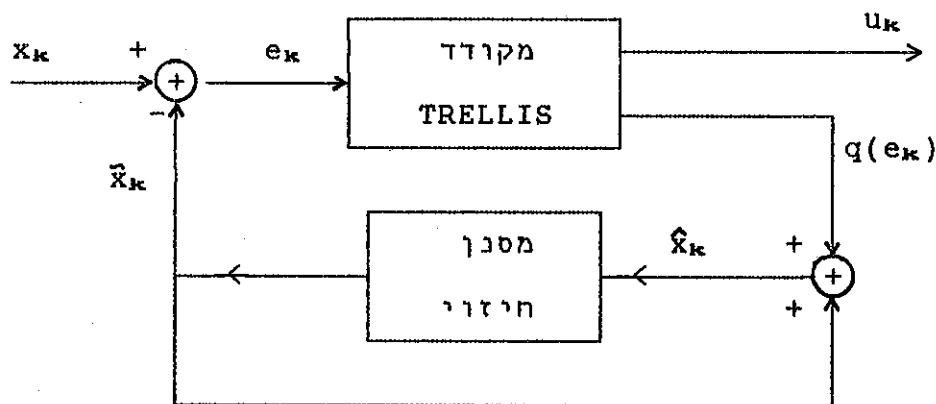
במערכת שחוארה בפרק 4, מקודדי ה-TRELLIS נבנו תוך שימוש בהנחה, שלכל אחת מתת-התמונות המייצגות את תחומי החדר השונים ניתן להתייחס כאל מקור חסר קורלציה. הנחה זו איננה נכונה בתחומי החדר בהם הצפיפות הספקטרלית איננה קבועה. במקרה בו ההנחה אינה מחיימת יש להתאים את המקודד למקור. אפשרות אחת היא לאכלס את ה-TRELLIS מתוך סדרת לימוד. חרונה של שיטה זו הוא כזכור התהליך הארוך של איכלוס ה-TRELLIS.

בסעיף 5.1 מתוארת גישה אחרת, לפיה נוסף חזאי למקודד. מבנה המקודד זהה ל-DPCM, פרט לכך שהקונטינר הסקלרי מוחלף במקודד וקטורי מסוג TRELLIS.

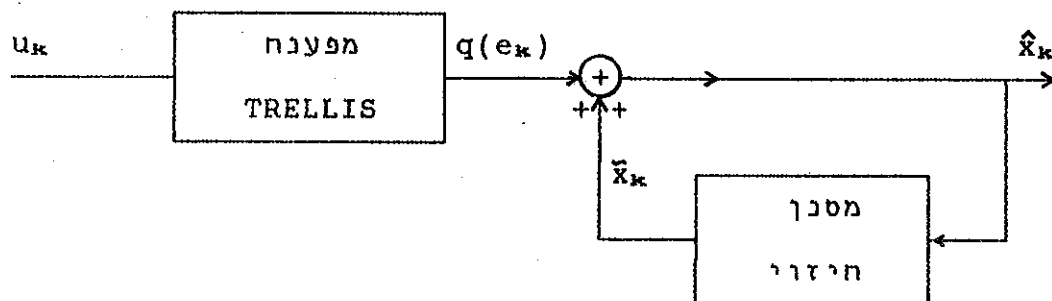
כפי שיוסבר בהמשך חיפוש באמצעות אלגוריתם VITERBI ב-TRELLIS הנמצא בסכימה המתוארת בסעיף 5.1, איננו חיפוש מלא. בסעיף 5.2 מוצעת סכימת חיפוש (תת-אופטימלית) המותאמת לחיפוש באמצעות אלגוריתם M. כמו כן נתאר תוצאות קידוד התמונות בשיטה זו.

5.1 שילוב החזאי וה-TRELLIS:

ב-[27] מוצעת מערכת המשלבת חזאי ומקודד מסוג TRELLIS. המערכת מכילה מקודד ומפענח מסוג DPCM כאשר במקום הקונטינר הסקלרי והמפענח המתאים שוב מקודד ומפענח מסוג TRELLIS, כמתואר בצירוף 5.1.



ENCODER - מקודד



DECODER - מפענח

ציור 5.1 - 5.1

מסנן החיזוי המופיע במערכת הוא לינארי קבוע בזמן ובעל אפסים בלבד. כאשר המסנן מסדר L מתקיים:

$$\hat{x}_k = \sum_{i=1}^L a_i \cdot \hat{x}_{k-i}$$

מאחר והמקודד וקטורי לא ניתן לקבל ביציאת המקודד אות u_k מיד לאחר שהופיע הדגם e_k ומאוחה סיבה לא ניתן לקבל את $q(e_k)$. בכדי להסביר את תהליך הקידוד נשים לב כי גם במערכת זו כמו בסכימת DPCM רגילה כאשר מחבצע קידוד תחת מינימום עיוות לסדרה e_k למעשה מחבצע קידוד הנותן מינימום עיוות בין כניסה ליציאה.

$$d(x_k, \hat{x}_k) = f(x_k - \hat{x}_k) =$$

$$f(e_k + \hat{x}_k - q(e_k) - \hat{x}_k) = f(e_k - q(e_k))$$

לכן במקום לחפש מסלול ב-TRELLIS שייתן מינימום לעיוות הוקטור מהסדרה $\{e_k\}$ נחפש מסלול ב-TRELLIS שייתן מינימום לעיוות בין סדרת הכניסה $\{x_k\}$ לסדרת היציאה $\{\hat{x}_k\}$. החיפוש ב-TRELLIS יתבצע באמצעות אלגוריתם VITERBI. נניח כי כל ענף מאוכלס במילת קוד אחת ($n = 1$). ענפי ה-TRELLIS מאוכלסים במילות קוד המותאמות לסדרת השארית $\{e_k\}$. תהליך החיפוש הוא רקורסיבי. נניח כי ידוע המסלול הטוב ביותר עד כל אחד המצבים בדרגה k. בכדי למצוא את המסלול הטוב ביותר עד למצב j בדרגה k+1 יש להוסיף לעיוות עד דרגה k את תרומת העיוות המתקבל מהענף המקשר את המצב בדרגה k עם הענף j בדרגה k+1. תרומה זו היא העיוות בין דגם הכניסה x_{k+1} לדגם היציאה \hat{x}_{k+1} שיתקבל אם תיבחר מילת הקוד אשר על הענף. לשם חישוב עיוות זה יש לחשב את \hat{x}_{k+1} . מחושב על סמך מילת הקוד על הענף שנשמנה ב- e^* וכן מידיעת L דגמי היציאה שיתקבלו מבחירת המסלול הטוב ביותר שהוביל לענף.

$$\hat{x}_{k+1} = \sum_{i=1}^L a_i \cdot \hat{x}_{k+1-i} + e^*$$

ולכן תרומת הענף לעיוות הכולל במסלול עד צומת j בדרגה k+1 תהיה:

$$d(x_{k+1}, \sum_{i=1}^L a_i \cdot \hat{x}_{k+1-i} + e^*)$$

ההחלטה על המסלול הטוב ביותר עד צומת j בדרגה k+1 מתקבלת על סמך העיוות הקטן ביותר עד לצומת בדרגה זו, והמסלול הנבחר בסוף הינו זה שעבורו התקבל העיוות הקטן ביותר. ניתן להכליל בקלות את תהליך החיפוש למקרה בו $n \neq 1$, ע"י התאמת העיוות הנחרם ע"י כל ענף לוקטור באורך n.

לכאורה החיפוש שבוצע באמצעות אלגוריתם VITERBI הוא אופטימלי. אך יש לשים לב שבמקרה זה לא התבצע חיפוש מלא ב-TRELLIS, שכן להחלטה שבצענו על המסלול הטוב ביותר עד למצב n בדרגה k השפעה על תרומת הענף היוצא ממצב n לעיוות בדרגה הבאה. לכן יתכן מצב בו דווקא המסלול שהביא לעיוות הקטן ביותר עד צומת n בדרגה k יגרום לכך שתרומת הענפים היוצאים מהצומת לעיוות תהיה גדולה. מכאן שלא ניתן לבצע החלטה כל דרגה אלא יש להניח לכל האפשרויות להתקיים עד הסוף מבלי לבצע החלטות. פירוש הדבר שיש לבצע חיפוש במבנה עץ ולא TRELLIS. כל החלטה אחרת שנבצע תהיה תת-אופטימלית. ניתן לראות שסדרת היציאה מתקבלת באמצעות מסנן רקורסיבי ולכן לא ניתנת לתיאור באמצעות מכונת מצבים סופית, כמו ה-S.R. ולכן לא ניתן ליצגה באמצעות TRELLIS. לסיכום, לא ניתן לבצע ב-TRELLIS שבחוג הסגור חיפוש מלא מבלי לפרוש אותו למבנה עץ. ניתן לבצע ב-TRELLIS חיפוש באמצעות VITERBI או חיפוש אחר כמו זה שיוצע בסעיף הבא אך חיפושים אלו יהיו תת-אופטימליים ותהיה הצדקה להשתמש בהם במקרים בהם התוצאות שיחזקו יהיו טובות יותר מאשר ללא חזאי.

ב-[27] מוצגות תוצאות הקידוד של מקור אוטוגרסיבי מסדר ראשון באמצעות מערכת החזאי עם ה-TRELLIS, כאשר ה-TRELLIS מאוכלס מתוך סדרת לימוד. התוצאות מושוות לתוצאות קידוד אוחזי מקור באמצעות TRELLIS ללא חזאי המאוכלס גם כן מתוך סדרת לימוד.

לדוגמא: כאשר התהליך הוא גאוסי בעל וריאנס $\sigma^2=1$ ומקדם הקורלציה $\mu=0.9$, בקצב $q=2 \text{ lb/p}$ וחיפוש באמצעות אלגוריתם VITERBI השניאה הריבועית המתקבלת כפונקציה של אורך ה-S.R. מופיעה בטבלה 5.1.

K	ללא חיזוי (mse)	עם חיזוי (mse)
3	0.138	0.076
6	0.078	0.063
8	0.064	0.055

החסם התיאורטי הוא 0.047

טבלה 5.1: תוצאות קידוד באמצעות TRELLIS עם חזאי וללא חזאי עבור אורכי S.R שונים

TABLE 5.1: RESULTS OBTAINED USING TRELLIS WITH/WITHOUT PREDICTOR FOR DIFFERENT S.R LENGTHS

למרות שהחיפוש ב-TRELLIS עם חזאי איננו אופטימלי התוצאות המתקבלות מדגימות את היחרון שקיים בשימוש בחזאי, התוצאות שהוצגו הן עבור המקרה בו ה-TRELLIS מאוכלס באמצעות סדרת לימוד. אך כזכור ברצוננו להמנע משלב האיכלוס הנדרש בשיטה זו. בסעיף הבא נתייחס למבנה שחואר בסעיף זה אלא שאיכלוס ה-TRELLIS יהיה איכלוס אקראי והחיפוש באמצעות אלגוריתם M.

בסעיף זה תואר המערכת הכוללת המבוססת על המקודד שתואר בסעיף 5.1. במקרה זה ה-TRELLIS לא מאוכלס באמצעות סדרת לימוד אלא באקראי מתוך הפילוג המותאם לאות השארית, e_k . כמו כן בדומה למערכת שתוארה בפרק 4 החיפוש ב-TRELLIS יבוצע באמצעות אלגוריתם M.

חיפוש באמצעות אלגוריתם M ב-TRELLIS הנמצא בחוג סגור עם החזאי יכול לגרום לבעיה הבאה: בכל דרגה מחפשים את M המצבים אשר המסלולים אליהם הם בעלי העיוותים הקטנים ביותר. יתכן ששני מסלולים טובים מובילים לאותו מצב, אך רק הטוב ביניהם יבחר. כאשר יש חזאי בחוג הסגור ההחלטה בדרגה מסויימת משפיעה על הדרגות הבאות ולכן יתכן שדווקא המסלול הפחות טוב מבין השניים שנכנסו לאותו מצב, יתפתח למסלול הטוב ביותר. בכדי להתגבר על בעיה זו נציע את השינוי הבא באלגוריתם: במקום לחפש את M המצבים השונים הטובים ביותר, המתקבלים מ: $M \cdot q$ המסלולים הנבדקים בכל דרגה, נחפש את M המסלולים הטובים ביותר, מבלי להתחשב במצבים אליהם נכנסים מסלולים אילו. אם 2 מבין M המסלולים נכנסו לאותו מצב, נמשיך כל אחד מהם בנפרד. אלגוריתם זה גם כן תת-אופטימלי אך יתרונו בכך שהוא נותן לכל M המסלולים הטובים ביותר בדרגה מסויימת להתפתח לדרגה האחרונה.

שינוי נוסף במערכת זו לעומת המערכת המתוארת בפרק 4 הוא בהקצאת הסיביות. בפרק הקודם הקצאת הסיביות בוצעה על סמך הוריאנטים של תחומי התדר השונים, $\{\sigma_1^2\}$. במערכת המתוארת כאן הקצאת הסיביות בוצעה באותה דרך, אך על סמך הוריאנטים המשוערכים של אות השארית, $\{\sigma_{e1}^2\}$. החזאי במערכת הוא מסדר ראשון ולכן ממידת מקדם הקורלציה, μ_1 , ניתן לקבל את σ_{e1}^2 ע"י (5.1):

$$\sigma_{e1}^2 = \sigma_1^2 \cdot (1 - \mu_1^2) \quad (5.1)$$

נפעיל את המערכת על תמונה גאוסית $y(i, j)$ המתקבלת מתמונה גאוסית חסרת זכרון $u(i, j)$ בצורה הבאה:

$$y(i, j) = \mu_1 y(i-1, j) + \mu_2 y(i, j-1) - \mu_1 \mu_2 y(i-1, j-1) + u(i, j)$$

עבור המקרה בו וריאנט התמונה מקיים: $\sigma^2=1$ וכן $\mu_1 = \mu_2 = 0.8$ בקצב $R=1b/p$, כאשר פרמטרי ה-TRELLIS הם: $nL=256$, $q=32$, $K=3$ ו- $M=30$, התקבלה טבלה 5.2, המכילה את השגיאה הריבועית הממוצעת בין התמונה המקורית ומשוחזרת כאשר ההפרדה בוצעה באמצעות מערכי מסננים שונים:

(א) הפרדה היא ל-4 תחומי תדר בלבד (דרגה 1). המסננים באורך 32.

(ב) הפרדה ל-16 תחומי תדר (2 דרגות), מסננים באורך 32 בשתי הדרגות.

(ג) הפרדה ל-64 תחומי תדר (3 דרגות), מסננים באורך 32 בדרגה הראשונה, 16 בדרגה השניה ו-8 בדרגה השלישית.

ללא חזאי mse	עם חזאי mse	מבנה מערך המסננים
0.1039	0.06687	(א) 4 תחומי תדר
0.0567	0.05184	(ב) " " 16
0.0557	0.05052	(ג) " " 64

החסם התיאורטי הוא: 0.0324

טבלה 5.2: תוצאות קידוד תמונה גאוסית עם חזאי וללא חזאי עבור מבני מערכי מסננים שונים.

TABLE 5.2: RESULTS OBTAINED IN CODING GAUSSIAN IMAGE WITH/WITHOUT PREDICTOR FOR DIFFERENT FILTER BANK STRUCTURES

בכל אחד ממבני מערך המסננים הוספת החיזוי למערכת הביאה לשיפור הביצועים. השיפור גדול במיוחד כאשר ההפרדה לתחומי תדר בוצעה באמצעות דרגה אחת בלבד, זאת מהסיבה שמספר התחומים נמוך, רוחב כל תחום תדר גדול, הקורלציה בכל תחום יחסית גדולה. לכן הוספת החזאי מביאה לשיפור משמעותי.

החזאי במערכת שהופעלה הוא מסדר ראשון והוא נקבע על סמך קורלציה לאורך שורות בלבד למרות שקיימת קורלציה גם לאורך עמודות. הסיבה לכך היא שחיזוי סמך שורה קודמת וגם עמודה קודמת מחייב לזכור את סדרת השיחזור, $\{x_{k-1}, \dots, x_{k-n}\}$ שהיתה מתקבלת עבור כל אחד מ-M המסלולים הנבחרים, (N גודל השורה בתת-תמונה). לכן חזאי על סמך שורה ועמודה, מגדיל מאד את גודל הזכרון הנדרש למימוש ה-TRELLIS. הקטנה נוספת של הקורלציה בשני הכיוונים שורות ועמודות מושגת ע"י הפרדה למספר רב תחומי תדר, וניתן לראות שהביצועים אכן משתפרים כאשר מספר תחומי התדר גדל.

קידוד התמונה "LADY" באמצעות מערכת זו, כאשר ה-TRELLIS מאוכלס תחת ההנחה שלסדרה e_k פילוג לפלס, הביאה לתוצאות הבאות:

א. בקצב $R=1b/p$, הפרדה ל-16 תחומי תדר באמצעות מסננים באורך 32 בשתי הדרגות, פרמטרי TRELLIS: $n_1=L=256$, $q=32$, $M=30$ (תחום התדרים הנמוך ביותר קודד באמצעות DPCM) החקבל $SNR=31.25$.

ב. בקצב $R=1b/p$, הפרדה ל-64 תחומי תדר באמצעות מסננים באורך: 32 בשתי הדרגות הראשונות ו-8 בדרגה האחרונה (4 תחומי התדר הנמוכים קודדו באמצעות DPCM) החקבל $SNR=31.38$.

הקצב כולל את אינפורמצית הצד, שבמערכת זו מכילה גם את מקדמי הקורלציה, μ , המיוצגים באמצעות 8 סיביות.

תמונה 5.1 מכילה תוצאות אלו. ניכר שיפור סוביקטיבי באיכות התמונות על פני תוצאות הקידוד ללא חיזוי (התוצאות האוביקטיביות השתפרו מעט).



א. 2 דרגות - 2 STAGES



ב. 3 דרגות - 3 STAGES

תמונה 5.1: שיחזור מקידוד באמצעות חזאי + TRELLIS
 PICTURE 5.1: RECONSTRUCTED IMAGE FROM TRELLIS &
 PREDICTIVE CODING

פרט לאיזור הכתף התמונה המשוחזרת מ-3 דרגות טובה יותר בכך שהיא נקיה וברורה יותר.

נבצע במערכת שחוארה עד כה אדפטציה של הקצאת הסיביות ואיכלוס ה-TRELLIS לפי השיטה שחוארה בפרק 4 המביאה לעיוות קבוע בכל האיזורים. לכל איזור, n , בכל תת תמונה, i , מחשבים את $\sigma_{i,n}^2$. שימוש במקדם הקורלציה המקומי $\rho_{i,n}$, לצורך חישוב וריאנס ההפרש המקומי לא הביא לשיפור בתוצאות על פני שימוש ב- $\rho_{i,n}$ לכל האיזורים בתת תמונה, i , יחד עם זאת גדלה אינפורמציה הצד הדרושה לכך לא בוצעה אדפטציה של החזאי באיזורים השונים בתוך תת התמונה.

תמונה 5.2 מכילה תוצאות קידוד "LADY" באדפטציה עם חיזוי. כאשר ההפרדה בוצעה באמצעות 2 דרגות, ופרמטרי ה-TRELLIS כמו בתמונה 5.1.



SNR=32.3dB R=1b/p

תמונה 5.2: אדפטציה + חיזוי
 PICTURE 5.2: ADAPTATION & PREDICTION

הפרדה ל-3 דרגות וקידוד תוך שימוש בחזאי + אדפטציה לפי שיטה II (אותם פרמטרי TRELLIS) הביא ל-SNR=31.8dB ואיכות סוביקטיבית נמוכה יותר.

תמונה 5.3 היא השיחזור מקידוד "LADY" בקצב $0.65b/p$ תוך שימוש במערכת עם החזאי. הפרדה היא ל-16 תחומי תדר (מסננים באורך 32) ופרמטרי ה-TRELLIS הם: $n_1L=256$, $q=16$, $M=30$. החקבל $SNR=29.3dB$. בתמונה המשוחררת עיקר העיוות הוא "מריחה" שבאה לביטוי בתוי הפנים.

בנסיון לשפר את האיכות הסובייקטיבית של התמונה המשוחררת מקידוד שונה מדד העיוות ממינימום לשגיאה ריבועית ממוצעת למינימום שגיאה ריבועית משוקללת. המטרה היא לאפשר עיוות קטן בתחום התדרים אליהם העין רגישה מאוד וזאת במחיר עיוות גדול יותר בתחום התדרים אליהם העין רגישה פחות. פונקציית התמסורת המקרבת את רגישות העין מדגישה תחום תדרי ביניים. הפונקציה עצמה ([29]) ואופן הקצאת הסיביות בהתאם לה מחוארים בנספח ב'.

כתוצאה מקידוד בקצב $0.65b/p$ תחת מדד עיוות זה, כאשר פרמטרי ה-TRELLIS הם כמו בתמונה 5.3, התמונה המשוחררת מתאפיינת בתווי פנים ברורים יותר. יחד עם זאת נוצרו עיוותים באיזורים אחרים כגון איזור הכתף שנראה נקי בתמונה 5.3. מכאן שניתן לבחור במדד עיוות זה או במינימום שגיאה ריבועית ממוצעת בהתאם לדרישות המיוחדות מהתמונה המשוחררת. בהמשך נתייחס לשגיאה ריבועית ממוצעת בלבד.

תמונה 5.4 היא שיחזור "LADY" לאחר קידוד בקצב $R=0.65b/p$ תוך שימוש במערכת עם החזאי והאדפטציה:

א. בהפרדה ל-2 דרגות תוך שימוש במסננים באורך 32.

ב. הפרדה ל-3 דרגות תוך שימוש במסננים באורך 32, 16, 8 בדרגות I, II, III בהתאמה.

פרמטרי ה-TRELLIS הם: $n_1L=256$, $q=32$, $M=30$. ב-2 דרגות החקבל $SNR=29.8dB$ וב-3 דרגות: $SNR=29.9dB$. האיכות הסובייקטיבית של תמונה 5.3 היא הטובה ביותר, ואילו תמונה 5.4 ברורה יותר באיזור הפנים.



$$R = 0.65b/p$$

תמונה 5.3: חזאי + TRELLIS
PICTURE 5.3: PREDICTIVE & TRELLIS



א. 2 דרגות - 2 STAGES



ב. 3 דרגות - 3 STAGES

$$R = 0.65b/p$$

תמונה 5.4: אדפטציה + חיזוי
 PICTURE 5.4: ADAPTATION + PREDICTION

לסיכום: הוספת החיזוי במקודדים הביאה לשיפור בתוצאות בכל המבנים שהוצעו: ללא אדפטציה ובחוספת אדפטציה. המערכת שהביאה לתוצאות הטובות מבחינה אובייקטיבית (SNR) וסובייקטיבית היא המערכת המכילה חיזוי + אדפטציה בקצב $R=1b/p$.

בקצב $R=0.65b/p$ התוצאות האובייקטיביות נמוכות ב-2-3dB והמערכת בעלת SNR הטוב ביותר היא המערכת המכילה חיזוי + אדפטציה. התוצאה האובייקטיבית הטובה ביותר היא דווקא במערכת ללא אדפטציה. התוצאות שהתקבלו מעידות על אפשרות שימוש במערכת המוצעת בקצבים נמוכים תוך קבלת תוצאות סובייקטיביות טובות.

פרק 6. שיקולים במימוש המערכת

פרק זה עוסק באפשרויות מימוש האלגוריתמים שתוארו בפרקים 4 ו-5 במערכות הפועלות בזמן אמיתי.

בתהליך בדיקת האלגוריתמים לא התייחסנו לכמות החישובים והזכרון הנדרש לצורך יישום המערכת. בפרק זה ידונו אפשרויות המימוש של כל אחד ממרכיבי המערכת. בסעיף 6.1 נחאר מימושים אפשריים למערך מסנני 2D-QMF המבוססים על רכיבי סינון (CONVOLVERS) הקיימים בשוק. בסעיף 6.2 נתייחס לאפשרויות הקטנת גודל הזכרון וכמות החישובים הנדרשים למימוש ה-TRELLIS תוך שמירה על ביצועי המערכת. כמו כן מתוארת ארכיטקטורה למימוש מקבילי של אלגוריתם M לחיפוש ב-TRELLIS.

6.1 אפשרויות מימוש מערך 2D-QMF בזמן אמיתי:

פעולת הקונבולוציה הנדרשת לצורך מימוש מערך המסננים דורשת מספר רב של פעולות כפל וחיבור. המעבדים לעיבוד אותו (DSP) הקיימים לא מאפשרים מימוש מערך מסננים לתמונות בזמן אמיתי, אך קיימים רכיבי סינון המאפשרים זאת. אפשרויות המימוש שיוצגו יתבססו על שניים מרכיבי חברת צורן: DFP-ZR33481 ו-DFP-ZR33881. הראשון מאפשר סינון באמצעות מסנן באורך 4 בקצב 20MHZ ואילו השני מאפשר סינון באמצעות מסנן באורך 8 בקצב 20MHZ. בשני הרכיבים קיימת אפשרות של חיבור מספר רכיבים בקסקדה לקבלת מסננים ארוכים יותר (עד 1032 TAPS).

כזכור המסננים שבשימוש מערך ה-2D-QMF הם ספרבילים. לכן את פעולת הסינון הדו-מימדית ניתן להפריד לסינון חד מימדי לאורך שורות ולאחריו על התוצאה, סינון חד מימדי לאורך עמודות, כמתואר בציור 1.10. הסינון החד מימדי ימומש בצורה יעילה באמצעות מבנה הפוליפאזה המתואר בציור 1.7.

בהמשך סעיף זה נבדוק מהם המבנים המתאימים למימוש דרגה בסיסית וכן מערך כולל כולל את כל המרכיבים בדרגה הבסיסית, זאת עבור תמונות בגודל 512×512 . המערכות המתוארות מיועדות לפעול בזמן אמיתי ומשמעות הדבר שמשך עיבוד תמונה באנליזה או סינטזה לא יהיה יותר מ-33msec (30 תמונות בשנ'). בתיאור המערכת ההנחה היא כי קיים בכניסת האנליזה/סינטזה זכרון בגודל שתי תמונות המאפשר עיבוד תמונה אחת תוך צבירת התמונה הבאה בזכרון השני.

תיאור דרגות בסיסיות עבור תמונה בגודל 512×512 :

דוגמא: מסננים בעלי 32 מקדמים

אורך מסנני הפוליפאזה הוא 16 לפיכך נדרשים 2 רכיבים מסוג ZR33881 המחוברים בקסקדה למימוש מסנן באורך 16. הזמן הדרוש לסיום ביצוע סינון פוליפאזה יחיד לאורך שורות הוא:

$$\frac{1}{20 \cdot 10^6} \times \frac{\text{מספר הזוגיים/אי זוגיים} \times \text{מספר השורות}}{\text{מספר הדגמים בלבד}}$$

$$= \frac{1}{20 \cdot 10^6} \times \frac{2 \ 5 \ 6}{5 \ 1 \ 2} = 6.56 \text{ msec}$$

אולם לצורך סינון השורות קיימים 2 פוליפאזות $P_0(m)$ ו- $P_1(m)$ לכן סה"כ הזמן הדרוש לסינון לאורך שורות הוא $13.12msec$. בזמן חישוב הסינון באמצעות $P_1(m)$ ניתן לבצע בזכרון היציאה מהדרגה חיבורים וחיסורים הנדרשים לקבלת היציאות $X_0(m)$, $X_1(m)$ (ציור 1.7). בסינון לאורך עמודות נדרש זמן זהה $13.12msec$ והוא נובע מכך שיש להפעיל את $P_0(m)$ ואת $P_1(m)$ כ"א פעמים על תח תמונות בגודל 512×256 . ומכאן שבשימוש ב-DFP-2 מסוג ZR33881 נדרשים $26.24msec$. מדרגת הסינטזה נדרש אותו זמן חישוב.

ניתן להשתמש ב-4 רכיבים מסוג זה, כל 2 רכיבים מבצעים פעולת אחד ממסנני הפוליפאזה וע"י העיבוד המקבילי מתקבל שהזמן הדרוש לביצוע הדרגה הבסיסית הוא $13.12msec$.

באותו אופן ניתן ליצור דרגות בסיסיות עבור מסננים בעלי 16 מקדמים ומסננים בעלי 8 מקדמים, כאשר ההבדל העיקרי הוא שלצורך מימוש מסנן פוליפאזה באורך 8 נדרש רכיב ZR33881 יחיד ולצורך מימוש מסנן פוליפאזה באורך 4 נדרש רכיב ZR33481 יחיד. טבלה 6.1 מכילה סיכום אפשרויות מימוש דרגות בסיסיות.

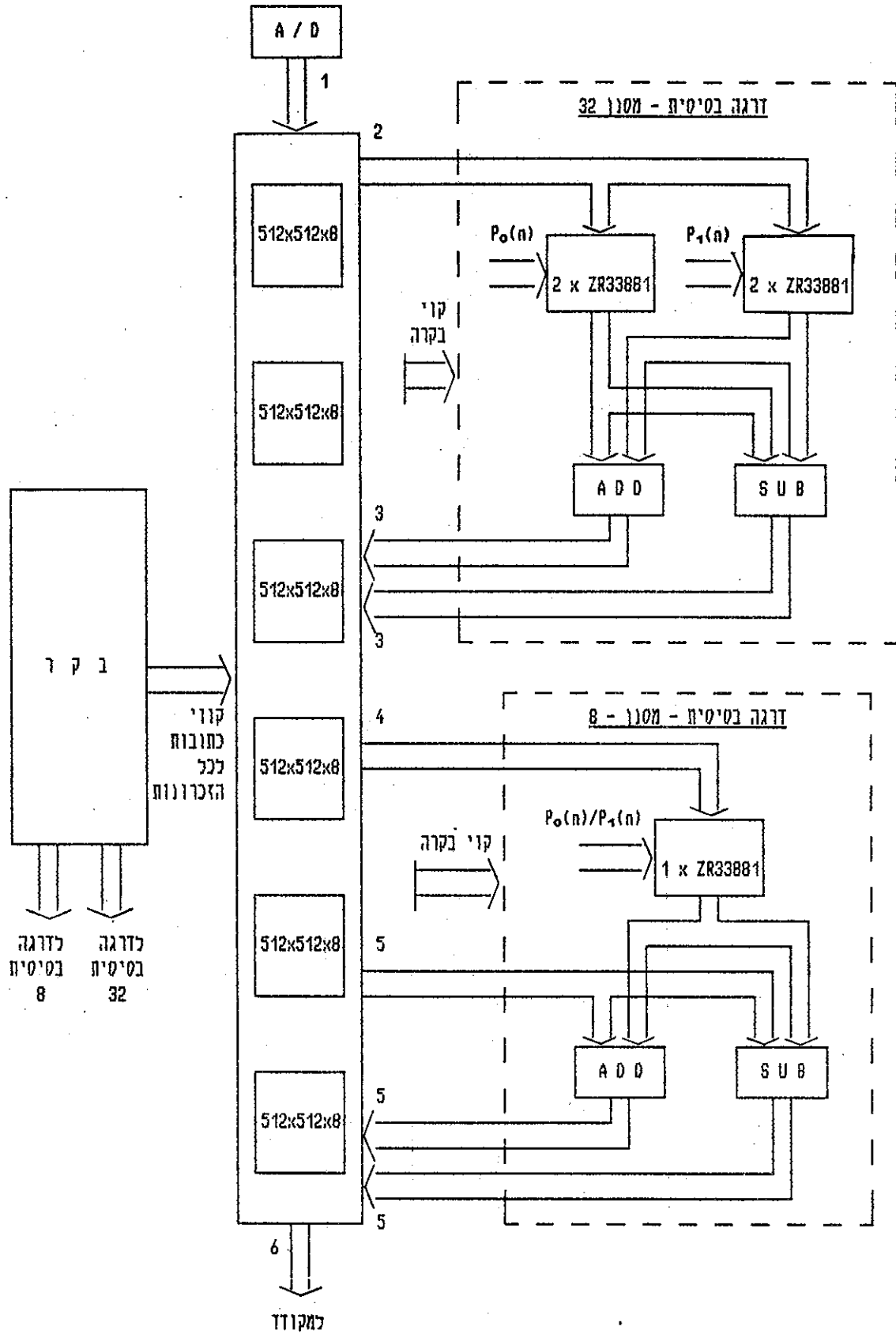
זמן עיבוד (msec)	רכיבי קונבולוציה	זמן עיבוד (msec)	רכיבי קונבולוציה	אורך המסנן
13.12	ZR33881 x 4	26.24	ZR33881 x 2	32
13.12	ZR33881 x 2	26.24	ZR33881 x 1	16
13.12	ZR33481 x 2	26.24	ZR33481 x 1	8

טבלה 6.1: זמן עיבוד דרגה בסיסית 2D' QMF כחלות באורך המסנן
TABLE 6.1: PROCESSING TIME OF 1-STAGE 2D' QMF FOR DIFFERENT FILTER LENGTHS

תיאור מערך מסננים:

בכדי ליצור מערך מסננים המורכב ממספר דרגות יש להתחשב בעובדה שהפעלת 2 דרגות בסיסיות בקסקדה מחייבת קיום זכרון בגודל 2 תמונות בין הדרגות. זכרון זה נועד לאפשר עבודה במקביל של 2 הדרגות ע"י כך שלזכרון אחד נכתבת תוצאות הדרגה הראשונה בעוד הדרגה השנייה מעבדת התוצאות הנמצאות בזכרון השני. חוספת זכרון זו גדולה ולכן עדיף להשתמש בדרגות בסיסיות מהירות בהן ניתן להשתמש מספר פעמים. לדוגמא: בכדי ליצור מערך מסננים שבו בשתי הדרגות מסננים באורך 32, ניתן להשתמש לצורך דרגה בסיסית באפשרות המכילה 4 רכיבים, להפעיל דרגה זו פעמים וע"י כך לקבל מערך המבצע הפרדה ל-16 תחומי תדר של תמונה 512×512 תוך $26.24msec$.

לקבלת מערך מסננים המכיל 3 דרגות בדרגה I וה-II מסננים באורך 32 וב-III מסנן באורך 8 נשתמש במערך המסננים ל-2 דרגות אשר אליו מחוברת, באמצעות חוצץ כפול, דרגה בסיסית המותאמת למסנן באורך 8 ומכילה $ZR33481 \times 1$. דיאגרמה למערך מסנני אנליזה של מבנה זה מתוארת בציור 6.1. מבנה זה מאפשר קבלת תמונה מופרדת ל-64 תחומי תדר אחת ל- $26.24msec$. בציור 6.1 מופיעים מספרים לצד קוי DATA. המספרים מציינים לאיזו יחידת זכרון, מתוך 6 הקיימות מופנים הנתונים. הבקר קובע את מיספור יחידות הזכרון שמשתנה מזמן לזמן. למשל בדרגה בסיסית בגודל 32, מיספור יחידות זכרון 2, 3 צריך להתחלף לאחר סינון לאורך שורות לפני הסינון לאורך עמודות שכן הנתונים לסינון לאורך עמודות הן תוצאות הסינון לאורך שורות.



ציור 6.1: מימוש מערך 2D-QMF 3 דרגות אורכי מסננים 32, 32, 8
 FIGURE 6.1: IMPLEMENTATION OF 2D-QMF, 3 STAGES, FILTER LENGTHS 32, 32, 8

הבעיה העיקרית באפשרויות אלו למימוש מערכי מסננים היא שבשני הרכיבים ZR33481 ו-ZR33881 מקדמי המסננים והנתונים מיוצגים באמצעות 8 סיביות כ"א. מגבלת דיוק זו חמורה בדרגות הגבוהות כאשר תת התמונות המתקבלות מדרגות קודמות מיוצגות באמצעות מספר רב יותר של סיביות ומכאן שתחסר אינפורמציה חשובה, אם יבוצע שימוש ב-8 סיביות בלבד. ניתן להתגבר באופן חלקי על בעיה זו ע"י ייצוג הנתונים (מלבד בדרגה הראשונה של האנליזה) ומקדמי מסנן באמצעות מילה בת 16 סיביות, ניתן לבצע קונבולוציה בין סדרות בעלות אורך מילה 16 באמצעות 4 פעולות קונבולוציה בין סדרות בעלות אורך מילה 8 סיביות. תוצאות 4 פעולות הקונבולוציה משולבות לתוצאה הרצויה ע"י סיכומים והזזות. לפיכך בכדי לשמור על הפרדת התמונה לתחומי תדר או שיחזור בזמן אמיתי יש להשתמש בפי 4 רכיבים מהמספר המצויין בכל אחת מהאפשרויות שהוצגו קודם.

שיקולים במימוש ה-TRELLIS:

6.2

פרמטרי ה-TRELLIS שבשימוש המערכת הביאו לכך ש-TRELLIS איננו מעשי הן מבחינת כמות הזכרון בהן בחינת כמות החישובים. לדוגמא: כאשר $q=32$, $K=3$, $L=256$ ו- $M=30$ מספר המילים מסוג REAL הנדרשות לאיכלוס TRELLIS משתנה בזמן הוא:

$$L \cdot q^K = 8.4 \cdot 10^6$$

מספר הכפלים הנדרש לאות מקור במקודד הוא: $M \cdot q = 960$. כמו כן נדרשים $2M \cdot q$ פעולות חיבור וכן פעולת מיון המוציאה M מספרים הקטנים ביותר שאינם נכנסים לאותו מצב מתוך $M \cdot q$ הענפים.

לצורך הקטנת גודל הזכרון הנדרש מבלי לשנות את פרמטרי ה-TRELLIS מוצעים הפתרונות הבאים:

א. שימוש בזכרון ציקלי:

במקום לשמור בזכרון $L \cdot q^K$ מילים מסוג REAL המוגדרות באקראי מתוך הפילוג המגשים נשמר בזכרון קבוצה קטנה יותר של מילים, נניח 2560 (2.5K) מילים. בזכרון זה נשתמש בצורה ציקלית לצורך איכלוס ה-TRELLIS. ההנחה היא כי אם הזכרון בו משתמשים בצורה ציקלית גדול מספיק מחקבל קוד אקראי מספיק כך שביצועי המערכת לא יפגעו כמעט. בקידוד "LADY" (ללא חיזוי וללא אדפטציה) לאחר הפרדה לתחומי תדר באמצעות 2 דרגות החקבל שה-SNR ירד ב-0.1dB בלבד. ירידה זו קטנה מאד במיוחד לאור העובדה שהזכרון הנדרש הוא 2560 מילים מסוג REAL בלבד.

ב. איכלוס ה-TRELLIS מתוך א"ב יציאה סופי:

איכלוס ה-TRELLIS באקראי מתוך מספר מוגבל של ערכי יציאה (יסומן ב: \bar{M}), מאפשר הקטנת גודל מילת זכרון ע"י כך שבמקום לשמור את הערך של מילת הקוד נשמר בזכרון אינדקס לטבלה בגודל \bar{M} המכילה את מילות הקוד האפשריות. לצורך זאת נדרשים $\log_2 \bar{M}$ סיביות בלבד במקום הזכרון הנדרש למילת קוד מסוג REAL.

בסעיף 3.3.4 התקבל כי שימוש במספר מוגבל של ערכי יציאה, שהם ערכי הקונטינר האופטימלי לפילוג הכניסה המוגרלים מתוך פילוג רמות הקונטינר, לא מפחית בהרבה את ביצועי המערכת. במערכת המוצעת הגבלת א"ב היציאה ל-32 מילות קוד בלבד, שהן רמות הקונטינר של \max לפילוג לפלס, ואיכלוס ה-TRELLIS מתוך זכרון ציקלי בגודל 2.5K שהתקבל ע"י הגרלה באקראי מתוך פילוג רמות הייצוג של קונטינר \max לפילוג לפלס, הביא להפחתה של 0.17dB בלבד לעומת שימוש בא"ב יציאה בלתי מוגבל.

לסיכום, משילוב שתי אפשרויות אלו להקטנת הזכרון מתקבל כי במחיר הפחתה קטנה בביצועי המערכת הזכרון הנדרש לאיכלוס ה-TRELLIS הוקטן מ: $8.4 \cdot 10^6 \times 32$ סיביות ל: $2560 \times M$ סיביות וזהו זכרון הניתן למימוש.

שימוש בא"ב יציאה סופי מביא גם להפחתה במספר הכפלים והחיבורים לאות מקור מאחר וקיימים לכל היותר M מילות קוד שונות ניתן לחשב את ערכי השגיאה הריבועית בין הדגם המקודד לבין M מילות הקוד השונות. בצורה זו במקום $M \cdot q$ כפלים נקבל M כפלים בלבד ובמקום $2M \cdot q$ חיבורים ידרשו $Mq + M$ חיבורים בלבד. עבור $M=32$ ו- $q=32$ $M=30$ כמות הכפלים הנדרשת היא 32 במקום 960, ומספר החיבורים הוא: 992 במקום 1920. יש לשים לב שהפחתה זו ניתן להשיג רק בחיפוש ב-TRELLIS ללא חיזוי. במקרה בו ה-TRELLIS מהווה חלק מהמקודד עם החזאי קיים אומנם מספר סופי של מילות קוד המאכלסות את הענפים ומותאמות לאות השארית e_k אלא שהאות המשוחזר תלוי לא רק במילת הקוד אלא גם במצב ממנו יצא הענף ולכן מספר הפעולות הנדרשות ישאר כפי שהיה קודם, אם כי הזכרון הנדרש קטן גם במקרה בו יש חיזוי במערכת.

עד כה נבדקה האפשרות להפחתת כמות החישובים והתקבל כי כאשר אין חיזוי ניתן אומנם להפחית את מספר הפעולות הנדרשות לאות מקור. בכל מקרה, נשאר הבעיה של פעולות המיון הנדרשות לקבלת M המצבים או הענפים בעלי העינות הקטן ביותר. בבעיה זו ניתן לטפל ע"י מימוש האלגוריתם ב-VLSI תוך ניצול ארכיטקטורה לפיה יתבצע עיבוד מקבילי באמצעות מספר יחידות חישוב. ב-[28] מוצעת ארכיטקטורה למימוש אלגוריתם M המשתמשת ב- M יחידות חישוב. M יחידות החישוב זהות ופועלות במקביל. לפי ארכיטקטורה זו האלגוריתם ממומש במספר שלבים אשר מתבצעים באופן טורי. ציור 6.2 מכיל את 4 השלבים:

א. שלב חישוב העינות:

בכניסה לשלב זה מופיעים M המצבים מהם יתפצלו הענפים השונים $\{a_1, \dots, a_m\}$. ביציאת השלב מתקבלת הסדרה $\{b_{ij}\}$ כאשר: $1 \leq i \leq M$, $1 \leq j \leq q$. כל אחד מהערכים b_{ij} מתייחס לענף אחד מתוך $M \cdot q$ הענפים שהתפצלו מ- M המצבים. b_{ij} הוא וקטור דו-מימדי בו הרכיב הראשון הוא המצב אליו נכנס הענף והרכיב השני הוא העינות הכולל עד לענף שחושב בשלב זה.

ב. שלב מיון המצבים:

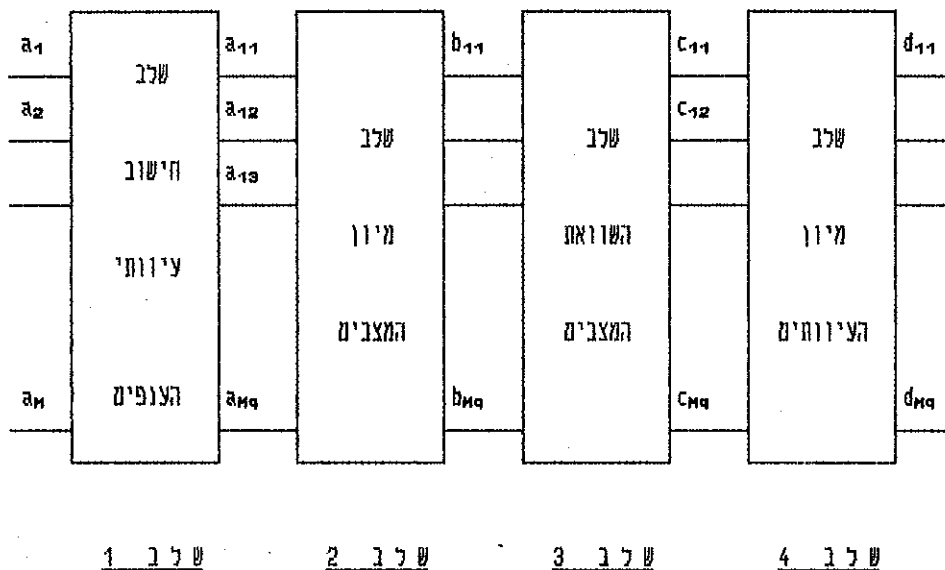
הכניסה לשלב זה היא הסדרה $\{b_{ij}\}$ ואילו ביציאתה מתקבלת הסדרה $\{c_{ij}\}$ שמכילה את אברי הסדרה $\{b_{ij}\}$ ממויינים לפי הרכיב הראשון - המצב אליו נכנס הענף.

ג. שלב השוואת המצבים:

תפקידם של שלבים א' ו-ב' הוא מניעת מצב בו בתהליך בחירת M הענפים הטובים ייווצר מצב בו מספר ענפים נכנסים לאותו מצב. לכן, בשלב ג' לאחר מיון המצבים אם 2 ענפים עוקבים נכנסים לאותו מצב, בודקים למי מהם עיוות גדול יותר ולענף זה קובעים עיוות "אינסופי". יציאת השלב היא הסדרה $\{d_{ij}\}$.

ד. שלב מיון העיוותים:

בשלב זה ממיינת הסדרה $\{d_{ij}\}$ לפי הרכיב השני - רכיב העיוות ומתקבלת הסדרה $\{e_{ij}\}$ ש- M האיברים הראשונים בה הם האיברים הרצויים.



ציור 6.2: שלבי ביצוע אלגוריתם M
 FIGURE 6.2: STAGES OF M ALGORITHM

כל אחד מהשלבים המתוארים מבוצע באמצעות אותה מכונה המכילה M יחידות חישוב שלכל אחת q כניסות ו- q יציאות. כמו כן מכילה המכונה רשת פנימית אשר לה Mq כניסות שהם יציאות יחידות החישוב. הרשת מאפשרת קבלת סדרת יציאה המכילה את איברי סדרת הכניסה לרשת, כשהם מסודרים לפי דרישות בקר הרשת. הרשת משמשת בתהליך המיון.

במקרה בו אין חיזוי במערכת שלב א' יכול להתבצע במהירות בזכות האפשרות להכין טבלה בגודל \tilde{M} החוסכת כפלים וחיבורים רבים.

במקרה בו יש חיזוי במערכת שלב א' דורש מספר רב יותר של פעולות לכל יחידת חישוב אולם שלבים ב' ו-ג' מיותרים מהסיבה שכאשר יש חיזוי בתהליך החיפוש לא מחפשים את M המצבים הטובים אלא את M הענפים הטובים ולכן לצורך ביצוע האלגוריתם נדרשים 2 שלבים בלבד.

בטבלה 6.2 מסוכמים מספר הפעולות וגודל הזכרון הנדרשים למימוש ה-TRELLIS כחלות בפרמטרים: M, q, n ו- \tilde{M} גודל א"ב היציאה.

$\bar{M} \times 32$	(1) טבלת א"ב היציאה	*גודל זכרון לאיכלוס ה-TRELLIS (בסיביות)
$\log_2 \bar{M} \times 2560$	(2) טבלת אינדקסים בגודל 2560 לטבלת המילים	
*פעולות (לאות מקור)		
(1) <u>TRELLIS ללא חזאי</u>		
לא מתבצע באופן מקבילי	(1) לחישוב שגיאה ריבועית \bar{M}	<u>כפלים</u>
לא מתבצע באופן מקבילי	(1) לחישוב שגיאה ריבועית \bar{M}	<u>חיבורים</u>
(q פעולות ליחידת חישוב)	(2) לחישוב שגיאה מצטברת qM	
		<u>פעולות מיון</u>
(1) פעולת מיון המצבים 2 פעולות מיון ל: $q \cdot M$ איברים באמצעות M יחידות חישוב, אחת ל-n דגמי מקור.		
(2) <u>TRELLIS עם חזאי</u>		
	(1) לחישוב שגיאה ריבועית $2q \cdot M$ (2q פעולות ליחידת חישוב)	<u>כפלים</u>
	(1) לחישוב שגיאה ריבועית ושגיאה מצטברת $3 \cdot q \cdot M$ (3q פעולות ליחידת חישוב)	<u>חיבורים</u>
		<u>פעולות מיון</u>
(1) פעולת מיון ל: $q \cdot M$ איברים, באמצעות M יחידות חישוב, אחת ל: n דגמי מקור.		

טבלה 6.2: הסיבוכיות הנדרשת למימוש TRELLIS עם/ללא חזאי
ואלגוריתם M

TABLE 6.2: COMPLEXITY FOR TRELLIS WITH/WITHOUT PREDICTOR
AND M ALGORITHM

לסיכום אפשרויות מימוש המערכת ניתן לראות שמערך המסננים
ניתן למימוש באמצעות רכיבים הקיימים בשוק ואילו הקידוד
באמצעות TRELLIS מעשי מבחינת גודל הזכרון הדרוש ומספר
הפעולות הנדרשות מכל אחת מיחידות החישוב הפועלות במקביל.

פרק 7. סיכום ומסקנות

המערכת המוצעת מורכבת ממערך 2D-QMF ומקודד TRELIS עם חזאי הביאה לתוצאות טובות בקצב 1 b/p . בהפרדה ל-16 תחומי תדר התקבל $\text{SNR}=32.3\text{dB}$. בקצב 0.65b/p התקבל $\text{SNR}=29.8\text{dB}$ ומבחינה סובייקטיבית התמונה המשוחררת טובה אך מורגשת תופעת LPF. בהשוואה למערכת בה מתבצעת הפרדה לתחומי תדר באמצעות 2D-QMF אך הקונטיזרים הם מסוג DPCM ה- SNR במערכת המוצעת גדול ב-1 dB בלבד. יחד עם זאת האיכות הסובייקטיבית טובה בהרבה ולא קיים הרעש הגרגרי המופיע במערכת עם ה-DPCM. מכאן שהוספת המקודד הוקטורי מסוג TRELIS אשר מאוכלס באקראי מהווה גורם שיפור מבחינה אובייקטיבית וסובייקטיבית.

ה-TRELIS הביא לשיפור במערכת למרות שלא תמיד הופעל באמצעות הפרמטרים מהם ניתן להפיק את התוצאות הטובות ביותר בהתאם למסקנות פרק 3, ז"א q ו- t הקטנים ביותר המתאימים לקצב תחום התדר המקודד. q נבחר להיות אחיד בכל תחומי התדר, וע"י כך התקבלה מערכת פשוטה יותר מבחינת המבנים הקיימים בה. במערכת בה ניתן להתאים את q לכל תחום תדר ניתן להגיע לתוצאות טובות יותר משתי סיבות - האחת ניתן למנוע חריגה גדולה מההקצאה האופטימלית חריגה זו היא בלתי נמנעת כאשר q קבוע בכל תחומי התדר - מבין האפשרויות לבחירת q שאינן גורמות לחריגה גדולה מהקצב שהתקבל בהקצאת הסיביות ניתן לבחור את הקטן ביותר ובכך לשפר את תוצאות הקידוד באותה סיבוכיות חישוב.

אחת הבעיות בקביעת מקודדי ה-TRELIS היתה שאלת איכלוסו. בעבודה זו נבדקו שני פילוגים: גאוסי ולפלס כאשר מתוך הסטוגרמת תחומי התדר נראה שהפילוג קרוב יותר ללפלס, ואכן התקבלו תוצאות טובות יותר כאשר ה-TRELIS אוכלס לפי פילוג זה. בכדי לשפר את המקודדים ע"י איכלוס מתאים יותר ניתן לבחון את האפשרויות הבאות:

א. פילוג תח התמונות שהתקבלו אכן דומה לפילוג לפלס אך יתכן שהוא קרוב יותר לפילוג מוכר אחר, כגון: גאמא או קושי. ניתן להגדיר קריטריון קרבה בין הפילוגים ולהחליט על המתאים ביותר להסטוגרמת תחום תדר מסויים או להתאים לכל תחומי התדר את הפילוג הקרוב ביותר.

ב. במקום לקבוע פילוג תח התמונה מראש, ניתן למצוא קונטיזר MAX למספר רמות קטן מתוך הסטוגרמת תחום התדר. ה-TRELIS יאוכלס באקראי מתוך פילוג רמות היציאה שהתקבלו. בדומה לאיכלוס ה-TRELIS בא"ב יציאה קטן שהותאם לפילוג לפלס. במקרה בו איכלוס הרמות מבוצע לפי הסטוגרמה יש לשלוח בתור אינפורמציה צד את רמות הייצוג והסתברות רמות הייצוג אך כמות האינפורמציה לא גדולה מאחר וא"ב היציאה יכול להיות קטן יחסית בלי לפגוע בביצוע המקודד.

ג. איכלוס ה-TRELIS מתוך סדרת לימוד יכול להביא לשיפור בתוצאות במיוחד כאשר בוחרים לעבוד במבני TRELIS קטנים בהם כמות סיבוכיות החישוב קטנה יותר.

המערכת המוצעת בעבודה זו מתאימה לקידוד תמונות מסוגים שונים שלא בהכרח שייכות לקבוצה אופיינית ידועה מראש. אפשרויות 1 ו-2 יכולות להביא לשיפור מערכת מסוג זה. אפשרות 3 מתאימה למקרה בו ידוע מראש לאיזו קבוצה אופיינית של תמונות שייכת התמונה המקודדת. מכאן שאם קיים ידע מוקדם ניתן להגיע לתוצאות טובות יותר בסיבוכיות חישוב קטנה יותר.

נספח א': הקצאת סיביות אופטימלית בקונטיזציה סקלרית [21]

בתהליך קידוד בפסי תדר נפרדים ניתן להקצות לכל אחד מתחומי התדר קצב שונה. התחום ה- k , יקודד בקצב r_k .

נשאלת השאלה כיצד יש להקצות את הסיביות, כך שהשגיאה הריבועית הממוצעת תהיה מינימלית תחת האילוץ שקצב הקידוד הממוצע הוא R .

בהנחה שכל תחומי התדר שווים ברוחבם מתקיים:

$$R = \frac{1}{\bar{K}} \sum_{k=1}^{\bar{K}} r_k$$

השגיאה הריבועית הממוצעת בתחום ה- k , $\sigma_{r_k}^2$, המתקבלת כאשר מבוצעת קונטיזציה סקלרית אופטימלית נתונה בקירוב ע"י הביטוי הבא:

$$\sigma_{r_k}^2 = \xi^2 \frac{-2r_k}{2} \sigma_k^2$$

כאשר ξ קבוע התלוי בפילוג האות המקודד, ואילו σ_k^2 הוא וריאנס תחום התדר המקודד כאשר הקידוד מתבצע באמצעות PCM ובמקרה בו הקידוד הוא מסוג DPCM זהו וריאנס אות השארית במקודד.

בהנחה שמבוצעת הפרדה טובה בין תחומי התדר השגיאה הריבועית הכוללת המתקבלת, D_T , היא:

$$D_T = \sum_{k=1}^{\bar{K}} \sigma_{r_k}^2$$

הקצאת הסיביות האופטימלית מובנה מציאת הסדרה $\{r_k\}$ אשר תביא למינימום את D_T , תחת אילוץ קצב ממוצע R . באמצעות כופלי לגרנז' מתקבל הפתרון:

$$r_k = R + \frac{1}{2} \log_2 \left[\sigma_k^2 / \left(\frac{\bar{K}}{\pi} \sum_{j=1}^{\bar{K}} \sigma_j^2 \right)^{1/k} \right]$$

נספח ב': הקצאת הסיביות המתאימה למדד העיוות - שגיאה ריבועית משוקללת.

המודל לתגובת החדר המקורבת של העין כפי שנחונה ב-[29] היא:

$$A(f_r) = 2.6[0.0192 + 0.114f_r] \text{EXP}(-0.114f_r) \quad (B.1) \quad 1.1$$

$$f_r = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \quad \text{כאשר}$$

f_x, f_y התדרים בכיוון אנכי ואופקי בהתאמה.

f_r ביחידות CYCLES/DEGREE.

המשקל המתאים לתחום החדר ה- i נקבע על סמך תגובת החדר של העין במרכז תחום החדר, W_i . בהקצאת הסיביות נבצע מינימום לעיוות D_T .

$$D_T = \sum_{i=1}^{\bar{K}} W_i \cdot \min(\sigma_i^2, \theta_i)$$

$$R_T = \sum_{i=1}^{\bar{K}} \max\left(0, \frac{1}{2} \log \frac{\sigma_i^2}{\theta_i}\right) \quad \text{תחת אילוץ הקצב}$$

בפתרון בעיה המינימיזציה נקבל כי: $\theta_i \cdot W_i = \text{const} = \theta$

והקצב המתאים לכל תחום חדר הוא:

$$r_i = \max\left(0, \frac{1}{2} \log \frac{\sigma_i^2 \cdot W_i}{\theta}\right)$$

קבלנו שהשגיאה הריבועית הממוצעת תהיה גדולה יותר בתחומי החדר בהם רגישות העין קטנה יותר וכמות הסיביות שיקבלו תחומי חדר אלו תהיה קטנה יותר לעומת הקצאת הסיביות לפי מדד העיוות: מינימום לשגיאה ריבועית ממוצעת.

מ ק ר ר ר ת

- [1] E.C. CROCHIERE & L.R. RABINER, "MULTIRATE DIGITAL SIGNAL PROCESSING".
- [2] G. WACKERSREUTHER, "DESIGN OF FILTERS FOR IDEAL QMF", AEU, BAND 39 [1985], HEFT 2.
- [3] J.D. JOHNSTON, "A FILTER FAMILY DESIGNED FOR USE IN QUADRATURE MIRROR FILTER BANKS", ICASSP PP.291-294 APRIL, 1980.
- [4] V.K. JAIN & R.E. CROCHIERE, "A NOVEL APPROACH TO THE DESIGN OF ANALYSIS/SYNTHESIS FILTER BANKS", ICASSP PP.228-231, APRIL 1983.
- [5] J.W. WOODS & S.P. O'NEIL, "SUBBAND CODING OF IMAGES", IEEE TRANS ON ASSP, VOL ASSP-34, NO. 5 OCTOBER 1986.
- [6] M. VETTERLI, "MULTI-DIMENSIONAL SUB-BAND CODING: SOME THEORY AND ALGORITHMS", SIGNAL PROCESSING VOL 6, PP.97-112 APR. 1984.
- [7] P.J. BURT & E.H. ADELSON, "THE LAPLACIAN PYRAMID AS A COMPACT IMAGE CODE", IEEE TRAN. ON COMMUNICATIONS, VOL. COM-31, NO 4, APRIL 1983.
- [8] B.L. HINMAN & J.G. BERNSTEIN, D.H. STAELIN, "SHORT-SPACE FOURIER TRANSFORM IMAGE PROCESSING", ICASSP, 4.8.1-4.8.4, 1984.
- [9] G. WACKERSREUTHER, "ON TWO-DIMENSIONAL POLYPHASE FILTER-BANKS", IEEE TRARS, ON ASSP, VOL-ASSP 34 NO. 1 FEBRUARY 1986.
- [10] R. ASCHMANN, "ON ENCODING ALGORITHMS & CHANNAL ERRORS IN TRELLIS CODES", R.P.I, TROY, NY, MAY 1982.
- [11] W. A. FINAMORE & W. A. PEARLMAN, "OPTIMAL ENCODING OF DISCRETE-TIME CONTINUES-AMPLITUDE MEMORYLESS SOURCES WITH FINITE OUTPUT ALPHABETS", IEEE TRANS, ON INFORMATION THEORY, VOL IT-26, NO. 2, MARCH 1980.
- [12] A.J. VITERBI & J.K. OMURA, "TRELLIS ENCODING OF MEMORYLESS DISCRETE-TIME SOURCES WITH A FIDELITY CRITERION", IEEE TRANS. ON INFORM. THEORY, VOL IT-20 NO. 3, MAY 1974.
- [13] S.G. WILSON & O.W. LYTLE, "TRELLIS ENCODING OF CONTINUOUS-AMPLITUDE MEMORYLESS SOURCES", IEEE TRANS. ON INFORM. THEORY, MAY 1977.
- [14] B. MAZOR & W.A. PEARLMAN, "A TRELLIS CODE CONSTRUCTION AND CODING THEORY FOR STATIONARY GAUSSIAN SOURCES", IEEE TRANS, ON INFORM THEORY, VOL IT-29, NO. 6, NOVEMBER 1983.
- [15] R.M. GRAY, "TIME-INVARIANT TRELLIS ENCODING OF ERGODIC DISCRETE-TIME SOURCES WITH A FIDELITY CRITERION", IEEE TRAN. ON INFORM. THEORY, VOL IT-23, NO. 1, JANUARY 1977.

- [16] Y. LINDE & R.M. GRAY, "A FAKE PROCESS APPROACH TO DATA COMPRESSION", IEEE TRANS. ON COMMUN., VOL COM-26, NO. 6, JUNE.
- [17] L.C. STEWART & R.M. GRAY & Y. LINDE, "THE DESIGN OF TRELLIS WAVEFORM CODERS", IEEE TRANS. ON COMMUN., VOL COM-30, NO. 4, APRIL 1982.
- [18] Y. LINDE, "THE DESIGN OF TREE AND TRELLIS DATA COMPRESSION SYSTEMS", PH. D. THESIS, DEPT. OF ELEC. ENG. STANFORD UNIV. STANFORD, CA, 1977.
- [19] W.A. PEARLMAN & A. CHEKIMA, "SOURCE CODING BOUNDS USING QUANTIZER REPRODUCTION LEVELS", IEEE TRANS. ON INFORM. THEORY, VOL IT-30, NO. 3, MAY 1984.
- [20] W.A. PEARLMAN, "SLIDING-BLOCK AND RANDOM SOURCE CODING WITH CONSTRAINED SIZE REPRODUCTION ALPHABETS", IEEE TRANS. ON COMMUN., VOL COM-30, NO. 8, AUGUST 1982.
- [21] N.S. JAYANT & P. NOLL, "DIGITAL CODING OF WAVEFORMS", PRENTICE-HALL, 1984.
- [22] G.D. FORNEY, "THE VITERBI ALGORITHM", PROCEEDINGS OF IEEE, VOL 61, NO. 3. MARCH 1973.
- [23] R.G. GALLAGER, "TREE ENCODING FOR SYMMETRIC SOURCES WITH A DISTORTION MEASURE", IEEE TRANS. ON INFORM. THEORY, VOL IT-20, JAN. 1974.
- [24] Y. LINDE & A. BUZO & R.M. GRAY, "AN ALGORITHM FOR VECTOR QUANTIZER DESIGN", IEEE TRANS. ON COMMUN, VOL COM-28, NO. 1 PP 84-95, JANUARY 1980.
- [25] L.C. STEWART, "TRELLIS DATA COMPRESSION", PH. D. DISSERTATION, INFORM. SYST. LAB., STANFORD UNIV, STANFORD, CA, JUNE 1981.
- [26] T. BERGER, "RATE-DISTORTION THEORY, A MATHEMATICAL BASIS FOR DATA COMPRESSION", ENGLEWOOD CLIFFS, NJ: PRENTICE-HALL, 1971
- [27] E. AYANOGLU & R.M. GRAY, "THE DESIGN OF PREDICTIVE TRELLIS WAVEFORM CODERS USING THE GENERALIZED LLOYD ALGORITHM", IEEE TRAN. ON COMMU., VOL. COM-34, NO 11, NOV. 1986.
- [28] S. MOHAN & A. K. SOOD, "A MULTIPROCESSOR ARCHITECTURE FOR THE (M,L) - ALGORITHM SUITABLE FOR VLSI IMPLEMENTATION", IEEE TRAN. ON COMM, VOL COM-34 NO. 12, DECEMBER 1986.
- [29] J.L. MANNOS & D.J. SAKRISON, "THE EFFECTS OF A VISUAL FIDELITY CRITERION ON ENCODING OF IMAGES", IEEE TRAN. ON INFORM. THEORY, VOL IT-20, NO. 4, JULY 1974

SUBBAND CODING OF IMAGES USING
TRELLIS CODER

RESEARCH THESIS

SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS
FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE

IN

ELECTRICAL ENGINEERING

BY

EFRAT ROTEM

SUBMITTED TO THE SENATE OF THE TECHNION
ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY

AV 5747

HAIFA

AUGUST 1987

THIS RESEARCH WAS CARRIED OUT IN THE SIGNAL PROCESSING
LABORATORY OF THE FACULTY OF ELECTRICAL ENGINEERING
UNDER THE SUPERVISION OF PROF. DAVID MALAH

I WISH TO EXPRESS MY SINCERE GRATITUDE TO PROF. DAVID MALAH
FOR HIS DEDICATED SUPERVISION THROUGHOUT THIS WORK

THIS RESEARCH WAS SUPPORTED BY THE MINISTRY OF
INDUSTRY AND COMMERCE

I AM ALSO GRATEFUL TO THE SIGNAL PROCESSING
LABORATORY STAFF: MR. YORAM OR-CHEN, MRS. ZIVA AVNI
AND MR. NIMROD PELEG, WHOSE HELP AND SUPPORT CONTRIBUTED
DURING THE LONG HOURS OF WORK IN THE LABORATORY

ABSTRACT

IN THIS WORK A METHOD FOR THE CODING OF IMAGES AT LOW BIT RATES (1 BIT/PIXEL AND LESS) IS PROPOSED. THE CODER CONSISTS OF TWO MAJOR PARTS: A TWO DIMENSIONAL QMF (2D'-QMF) FILTER BANK AND A TRELLIS VECTOR CODER WHICH IS APPLIED TO EACH OF THE FREQUENCY SUB-BANDS. THE FILTER BANK SEPARATES THE PICTURE INTO SUB-PICTURES, EACH OF WHICH REPRESENTS A DIFFERENT FREQUENCY BAND. ASSUMING THAT A PICTURE CAN BE TREATED AS A RANDOM PROCESS WITH A SLOWLY VARIANT SPECTRAL DENSITY AND THE FREQUENCY BANDS ARE NARROW, THAN THE SUB-PICTURES, FOLLOWING DECIMATION, ARE APPROXIMATELY UNCORRELATED SOURCES. THE ADVANTAGE OF THE 2D'-QMF FILTER BANK IS THAT WITH NO CODING THE ANALYSIS-SYNTHESIS SYSTEM IS APPROXIMATELY A UNITY SYSTEM AND THERE EXISTS A FULL CANCELLATION OF THE ALIASING WHICH RESULTS FROM THE DECIMATION OF THE SUB-PICTURE.

EACH OF THE FREQUENCY SUB-BANDS IS CODED USING A TRELLIS VECTOR CODER. THE FACT THAT EACH BAND REPRESENTS A NEARLY MEMORYLESS SOURCE ENABLES TO POPULATE THE TRELLIS USING A RANDOM POPULATION METHOD. IN THIS WORK, THE POPULATION OF THE TRELLIS MATCHES TO TWO TYPES OF SOURCES ARE EXAMINED: GAUSSIAN AND LAPLACE SOURCES. THE SEARCH OF THE VECTOR IN THE TRELLIS WHICH IS MOST COMPATIBLE WITH THE SOURCE VECTOR IS DONE USING THE M-ALGORITHM. THE M-ALGORITHM IS A SUB OPTIMAL SEARCH WHICH IS A RESULT OF A SIMPLIFICATION OF THE VITERBI ALGORITHM. IN THIS WORK THE PROBLEM OF SELECTING THE APPROPRIATE PARAMETERS OF THE TRELLIS IN ORDER TO OBTAIN THE BEST RESULTS IS INVESTIGATED. THE FACT THAT A PICTURE IS NOT, IN GENERAL, A STATIONARY SOURCE FORCES US TO ADAPT THE TRELLIS POPULATION TO THE SOURCE CHARACTERISTIC AND TO VARY THE BIT ALLOCATION ACCORDING TO THE VARIANCE OF THE DIFFERENT AREAS IN THE PICTURE.

THIS ADAPTATION SIGNIFICANTLY IMPROVES THE SYSTEM'S PERFORMANCE. SOME OF THE SUB-BANDS, AT THE OUTPUT OF THE ANALYSIS FILTER BANK, ARE NOT UNCORRELATED AS ASSUMED. IN THESE BANDS IT IS RECOMMENDED TO USE A CODER WHICH IS SIMILAR IN STRUCTURE TO ADPCM CODER ONLY THAT THE QUANTIZER IS SUBSTITUTED BY A TRELLIS CODER. MOREOVER A MODIFICATION TO THE M-ALGORITHM IS PROPOSED. THIS MODIFICATION IS SUITABLE FOR THE CASE IN WHICH A PREDICTION LOOP IS INCLUDED IN THE SYSTEM. THE RESULTS OBTAINED IN THIS CASE ARE BETTER THAN WITH NO PREDICTION IN THE CODER.

IN A SYSTEM WITHOUT PREDICTION BUT WITH ADAPTATION THE BEST SUBJECTIVE RESULTS AT 1 b/p WERE OBTAINED WHEN THE SEPARATION WAS TO 64 BANDS (3 STAGES). THE SNR VALUE IN THIS CASE IS 31.5 dB. IN A SIMILAR SYSTEM IN WHICH THE TRELLIS IS SUBSTITUTED BY A SCALAR QUANTIZER (DPCM) THE OBJECTIVE RESULTS WERE THE SAME BUT SUBJECTIVELY THE RECONSTRUCTED PICTURE IS WORSE AND A GRANULAR TYPE OF NOISE IS OBSERVED.

IN THE SYSTEM WITH A PREDICTOR THE BEST RESULTS WERE WHEN THE SEPARATION WAS TO 16 BANDS (2 STAGES). AT 1 b/p THE SNR VALUE IS 32.3 dB AND AT 0.65 b/p THE SNR IS 29.8 dB.

ALTHOUGH THE NUMBER OF CALCULATION NEEDED IN PERFORMING THE ALGORITHM IS LARGE IT CAN BE IMPLEMENTED IN REAL TIME SYSTEMS. THIS IS DUE TO THE FACT THAT FILTER-BANKS CAN BE REALIZED USING FAST CONVOLVERS AND THE TRELIS CODER CAN BE REALIZED IN VLSI USING PARALLEL ARCHITECTURE TECHNIQUES FOR PERFORMING THE M-ALGORITHM.

CONTENTS

	<u>PAGE</u>
ABSTRACT	1
SYMBOL LIST	2
INTRODUCTION	4
CHAPTER 1: FILTER BANKS	6
1.1 UNIFORM FILTER BANKS	6
1.2 QUADRATURE MIRROR FILTER (QMF) BANKS	10
1.3 THE EXTENSION OF QMF BANKS FOR 2D-SIGNALS	19
1.4 THE LAPLACIAN PYRAMID	23
CHAPTER 2: SUBBAND CODING OF IMAGES	25
2.1 CODING USING 2D UNIFORM FILTER BANK	25
2.2 CODING USING THE LAPLACIAN PYRAMID	26
2.3 CODING USING 2D-QMF AND DPCM	27
CHAPTER 3: TRELLIS CODERS	29
3.1 TRELLIS STRUCTURE	30
3.2 ENCODING ALGORITHMS	32
3.3 TRELLIS CODE CONSTRUCTION	36
3.3.1 RANDOM CODE	36
3.3.2 FAKE PROCESS	39
3.3.3 AN ITERATIVE ALGORITHM FOR FINDING A TIME INVARIANT TRELLIS CODE	41
3.3.4 TRELLIS CODES USING A CONSTRAINED SIZE REPRODUCTION ALPHABET	42
3.4 A COMPARISON BETWEEN VQ AND TRELLIS CODERS	48

	<u>PAGE</u>
CHAPTER 4: IMAGE CODING USING FILTER BANK AND TRELLIS . . .	51
4.1 THE DESIGN OF TRELLIS CODERS IN THE SUBBANDS	52
4.1.1 DYNAMIC BIT ALLOCATION	52
4.1.2 CODE CONSTRUCTION	55
4.1.3 RESULTS OF IMAGE CODING	56
4.2 ADAPTATION OF THE TRELLIS CODES AND BIT ALLOCATION ACCORDING TO LOCAL PROPERTIES OF THE IMAGE	64
4.2.1 ADAPTATION UNDER THE CONSTRAINT OF FIXED RATE IN ALL THE IMAGE PARTS	64
4.2.2 ADAPTATION UNDER THE CONSTRAINT OF FIXED DISTORTION IN ALL THE IMAGE PARTS	65
CHAPTER 5: ADDING PREDICTION TO THE CODERS	69
5.1 PREDICTIVE TRELLIS	69
5.2 IMAGE CODING USING PREDICTIVE TRELLIS	72
CHAPTER 6: CONSIDERATIONS IN IMPLEMENTING THE SYSTEM	77
6.1 VARIOUS IMPLEMENTATIONS OF 2D-QMF IN REAL TIME	77
6.2 CONSIDERATIONS IN IMPLEMENTING THE TRELLIS	80
CHAPTER 7: SUMMARY AND CONCLUSIONS	84
APPENDIX A: OPTIMAL BIT ALLOCATION IN SCALAR QUANTIZATION	85
APPENDIX B: OPTIMAL BIT ALLOCATION UNDER THE WEIGTHED-MSE DISTORTION MEASURE	86
REFERENCES	87