



הטכניון – מכון טכנולוגי לישראל  
Technion – Israel Institute of Technology

**ספריות הטכניון**  
*The Technion Libraries*

**בית הספר ללימודי מוסמכים ע"ש ארווין וג'ואן ג'ייקובס**  
*Irwin and Joan Jacobs Graduate School*

©

**All rights reserved**

*This work, in whole or in part, may not be copied (in any media), printed, translated, stored in a retrieval system, transmitted via the internet or other electronic means, except for "fair use" of brief quotations for academic instruction, criticism, or research purposes only.  
Commercial use of this material is completely prohibited.*

©

**כל הזכויות שמורות**

*אין להעתיק (במדיה כלשהי), להדפיס, לתרגם, לאחסן במאגר מידע, להפיץ באינטרנט, חיבור זה או כל חלק ממנו, למעט "שימוש הוגן" בקטעים קצרים מן החיבור למטרות לימוד, הוראה, ביקורת או מחקר. שימוש מסחרי בחומר הכלול בחיבור זה אסור בהחלט.*

תכן מערכי מסכנים אחידים אופטימליים  
לקדוד דבור בפסי תדר

חבור על מחקר  
לשם מלוי חלקי של הדרישות לקבלת תואר  
מגי סטר למדעים  
בהנדסת חשמל

2063007

מ א ת



אהרון סט

46.968

000001010893

19.289

טכניון  
פקולטה להנדסת חשמל  
פקולטה למדעי מחשב  
ספרייה מס. ....

המחקר נערך בהנחיית פרופסור דוד מלאך בפקולטה להנדסת חשמל.

אני מודה לקרן גוטווירט על התמיכה בהשתלמותי.

תודתי העמוקה נתונה לפרופ. דוד מלאך על הצעת הנושא למחקר ועל הכוונתו הפעילה והמסורה בכל שלבי המחקר. כן ברצוני להודות לד"ר אמיר דמבו על הערותיו המועילות, למר יורם אור-חן ולגב' זיוה אבני על עזרתם ותמיכתם, ולצוות המעבדה לעבוד אותות.

תוכן העניינים

\*\*\*\*\*

עמוד

1	ת ק צ י ר . . . . .
3	רשימת קצורים . . . . .
4	פרק 1 - מבוא . . . . .
7	פרק 2 - מערכי מסננים - סקירת התאוריה . . . . .
7	2.1 הקדמה . . . . .
8	2.2 מערך מסננים אחיד וממושו . . . . .
13	2.3 תכונות מערך המסננים האחיד . . . . .
20	2.4 QMF במבנה הקלאסי . . . . .
22	2.5 מערכי QMF בעלי תמסורת יחידה . . . . .
26	פרק 3 - קדוד אותות בפסי תדר . . . . .
26	3.1 הקדמה . . . . .
27	3.2 כימות סקלרי . . . . .
29	3.3 קדוד סקלרי בפסי תדר . . . . .
33	3.4 כימות וקטורי . . . . .
38	3.5 שלוב קדוד וקטורי במערכי מסננים . . . . .
40	פרק 4 - תכן מערכות אנליזה וסנטזה לפי קריטריון שגיאה סטטיסטי . . . . .
40	4.1 הקדמה . . . . .
41	4.2 מודל מערכת הקדוד . . . . .
45	4.3 קריטריון השגיאה הסטטיסטי . . . . .
47	4.4 תכן מסנן הסנטזה האופטימלי . . . . .
50	4.5 תכנון מסנני האנליזה והסנטזה בעזרת אלגוריתם איטרטיבי . . . . .
52	4.6 תוצאות סמולציה . . . . .
62	4.7 נתוח תוצאות הסמולציה ומסקנות . . . . .
65	פרק 5 - תכן מערכי מסננים לפי קריטריונים בתחום התדר . . . . .
65	5.1 הקדמה . . . . .
66	5.2 פתוח קריטריון שגיאה בתחום התדר . . . . .
66	5.2.1 מודל המערכת ורכיבי העוות . . . . .
68	5.2.2 הגדרת פונקציית המחיר המשמשת לתכנון החלונות . . . . .

תוכן העניינים - המשך  
=====

עמוד		
71	תכן מסנני אנליזה וסנטזה	5.3
71	נוסחאות לתכנון המסננים	5.3.1
72	דיון ברעש כימות לבן	5.3.2
74	אלגוריתם לתכנון איטרטיבי	5.4
74	תאור האלגוריתם האיטרטיבי	5.4.1
77	דוגמת תכנון	5.4.2
80	פרק 6 - מקודדי אותות דבור בפסי תדר - המלצות לממוש	
80	הקדמה	6.1
81	מקודד אותות דבור בקצב שדור 16Kbits/sec	6.2
85	השוואה בין מקודדים	6.3
87	פרק 7 - סכום ומסקנות	
89	נספח א' - חשוב משוואות תכן מסנן הסנטזה עבור הכימות הוקטורי	
91	נספח ב' - הספק רעש מוצא מערך המסננים	
94	נספח ג' - בטויים למשוואות תכן המסננים	
107	נספח ד' - הוכחת טענות 5.1, 5.2	
109	נספח ה' - תכן מערכות שנוי סקלה של אותות בתחום התדר (FDHS)	
114	רשימת מקורות	

ת ק צ י ר  
=====

בעבודה זו נחקר קודד אותות דבור בפסי תדר בעזרת מערך מסננים אחיד (Uniform DFT Filter Bank) ומפותחות שיטות לתכנון המסננים. העבודה מתחלקת לשניים:

- א. יישום ובדיקת גישה סטטיסטית לתכן מסננים, שהוצעה לאחרונה ע"י א. דמבו, אך טרם נבדקה ביסודיות.
- ב. פתוח שיטת תכן מסננים לפי קריטריון עוות בתחום התדר, המניבה מקודדים באיכות טובה וסבוכיות ממוש נמוכה, ביחס לסבוכיות הממוש של מערך מסננים מקובל מטפוס Quadrature Mirror Filters (QMF).

קודד בפסי תדר היא שיטה מקובלת לשדור אותות דבור בערוצים ספרתיים בקצבי שדור בתחום 9.6K-16K סיביות לשנייה. את הדבור מפרד לפסי תדר צרים, באופן טפוסי 8 פסים שווי רוחב, ע"י מערך מסנני אנליזה. אותות פסי התדר צרי הסרט מדוללים (decimated), ומקודדים ע"י פעולת הכימות (quantization). בקצב השדור הגבוה מתקבלת איכות טובה ע"י כימות סקלרי, ובקצב הנמוך מקובל לבצע כימות וקטורי. את הדבור משוחזר מתוך אותות פסי התדר המקודדים ע"י מערך מסנני סנטזה.

למערך המסננים חשיבות מכרעת בקביעת איכות הדבור המשוחזר. מקובל לדרוש "תמסורת יחידה" בהעדר כימות של פסי התדר, כלומר: שחזור מושלם של אות המבוא במוצא מערך הסנטזה, פרט להשהייה קבועה. בעייה נוספת היא סבוכיות הממוש: במערכות קודד הכוללות כימות סקלרי, מערך המסננים הוא המרכיב בעל הסבוכיות העקרית.

פתרונות חלקיים לבעיות אלו הוצעו עבור מערכי מסננים בעלי זכרון סופי (FIR). מבנה מקובל הוא מערך ה-QMF, המוצא שמוש נרחב בקודד דבור. מערך ה-QMF מאפשר קרוב מצויין לתמסורת היחידה, תוך בטול מלא של גורמי ההתחזות בתדר (aliasing), ובסבוכיות ממוש בינונית. פתרון אחר הוא מערך מסננים אחיד. במערכת מסוג זה לא מתבטלת ההתחזות אם יחס הדלול (decimation) שווה למספר הערוצים (ומסנן האנליזה ארוך ממימד ההתמרה). מצד שני, המערך האחיד ניתן לממוש יעיל בסבוכיות נמוכה. פתרון לבעיות תכן המסננים במערך האחיד, באופן שיתאים לשמש לקודד דבור, לא הוצג עד כה.

הגישה הסטטיסטית לתכן מסנני המערך האחיד, שהוצעה ע"י א. דמבו, מתייחסת לשתי הבעיות הבאות:

א. במערכת אנליזה-סנטזה הכוללת כימות אותות פסי התדר לא ניתן לקבל מערכת יחידה, משום שהכימות הוא פעולה לא הפיכה. מערכת בעלת תמסורת יחידה בהעדר כימות היא לא בהכרח האופטימלית במקרה זה, ויש לתכנן את מערך המסננים בהתחשב בתהליך הכימות.

ב. מערכת אנליזה-סנטזה היא מערכת משתנה בזמן, עקב פעולות הדצימציה והאנטרפולציה הנכללות בה, ואות השגיאה במוצא המערכת אינו תהליך סטציונרי במובן הרחב.

לפתרון בעיות אלו, פותח קריטריון שגיאה סטטיסטי לאותות לא סטציונריים, המתחשב בפעולות הכימות, ומשמש להגדרת המסננים האופטימליים.

במסגרת חלקה הראשון של עבודה זו, יושמה גישת התכנון הסטטיסטי במערכות לקדוד אותות דבור. מבדיקות בסמולציה, וע"י השוואה למקודד מקובל המתבסס על מערכי QMF, מסתבר שאיכות הקדוד המושגת בקצב ביניים (16Kbits/sec) אינה מספקת. לאחר הצגת תוצאות הסמולציה, מוגש בעבודה נתוח מפורט של התוצאות, הסבר לסיבות הפגיעה בטיב הדבור המשוחזר, והמלצות לאופן שפור המקודד.

בחלקה השני של העבודה מפותח קריטריון שגיאה כתחום התדר, המפריד בין גורמי העוות, ומאפשר מתן משקל מתאים לגורמים השונים. ע"י כך מתאפשר תכנון מערך מסננים אחיד המתאים לשמש במקודד בעל איכות טובה. שפור האיכות מושג ע"י צמצום גורמי הפגיעה העקריים בטיב המקודד למינימום: ההתחזות בתדר (aliasing) הנוצרת עקב דלול אותות פסי התדר, וזליגת רעש הכימות מפס התדר שבו נוצר לפסים אחרים.

שיטת התכנון שפותחה במסגרת העבודה יושמה בסמולציה, ונערכו השוואות למקודד המתבסס על מערכי QMF. בקצב שדור בינוני (16Kbits/sec) משיגה מערכת הקדוד איכות טובה, בדומה למקודד QMF, ובסבוכיות ממוש נמוכה בהרבה.

לסכום, מוצגות מספר הצעות להמשך המחקר, ובפרט לתכנון מסננים אופטימליים

למערכות המשמשות לשנוי ציר הזמן או התדר של אותות בגישת Frequency Domain Harmonic Scaling.

רשימת קצורים  
=====

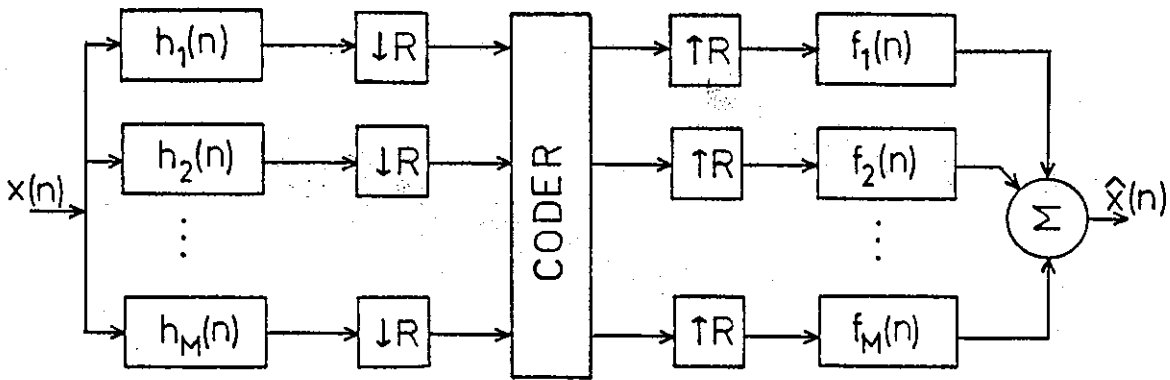
- ADPCM - Adaptive Differential Pulse Code Modulation
- DFT - Discrete Fourier Transform
- D(R) - Distortion Rate Function
- DSTFT - Discrete Short Time Fourier Transform
- FDHS - Frequency Domain Harmonic Scaling
- FFT - Fast Fourier Transform
- FIR - Finite Impulse Response
- IDFT - Inverse Discrete Fourier Transform
- IFFT - Inverse Fast Fourier Transform
- MQ - Matrix Quantization
- PCM - Pulse Code Modulation
- QMF - Quadrature Mirror Filter
- R(D) - Rate Distortion Function
- SNR - Signal to Noise Ratio
- SNR-SEG - Segmental Signal to Noise Ratio
- STFT - Short Time Fourier Transform
- VQ - Vector Quantization
- WOLA - Weighted Overlap Add



פרק 1 - מבוא  
=====

מערכי מסננים ספרתיים משמשים ביישומי עבוד אותות רבים, ובפרט בעבוד אותות דבור, כגון - קודד [3], ערכול [4], שנוי ציר הזמן והתדר של אותות דבור [5].

מערכת קודד טפוסית מתוארת בציור 1.1. מסנני האנליזה  $h_i(n)$  מפרידים את אות הכניסה ל-M פסי תדר צרים. הקודד מבוצע על אותות הערוצים מגבלי הסרט לאחר דצימציה. אותות מוצא המקודד עוברים אנטרפולציה וסנון דרך מסנני הסנטזה  $f_i(n)$ , וסכומם מהווה קרוב לאות המבוא.



ציור 1.1 - מערכת קודד טפוסית בפסי תדר

Fig 1.1 - A typical sub-band coder

מקובל לדרוש "תמסורת יחידה" בהעדר קודד, כלומר: שחזור משלם של אות המבוא ביציאה פרט להשהייה קבועה. פתרונות מלאים או מקורבים לבעייה זו הוצעו עבור מערכי מסננים מטפוס FIR. מערכים אלו נתנים - במבנה מתאים - למוש יעיל, המאפשר בניית מערכות קודד חסכוניות.

פתרון מקובל הוא מערך מסנני ה-QMF [6, chap.7], המוצא שמוש נרחב בקודד דבור. מערך ה-QMF מאפשר קרוב מצויין לתמסורת יחידה, תוך בטול מלא של גורמי ההתחזות בתדר (aliasing). בעבודות שהופיעו לאחרונה מוצע גם מערך QMF המקיים תמסורת יחידה [7].

פתרון אחר הוא מערך המסננים האחיד (Uniform DFT Filter Bank) [6, chap.7], הניתן למוש ביעילות גבוהה. במערך מסננים מסוג זה לא מתבטלת ההתחזות אם יחס הדצימציה שווה למספר הערוצים (ואם מסנן האנליזה ארוך ממימד ההתמרה), אם כי ניתן להתקרב לבטולה בשיטות תכנון מתאימות שפותחו לאחרונה [1].

תהליך הקדוד מבוצע בעזרת כימות (Quantization), ומהווה לפיכך פעולה לא הפיכה, ולכן לא תתכן תמסורת יחידה במערכת השלמה. מערכת בעלת תמסורת יחידה בהעדר כימות היא לא בהכרח המערכת האופטימלית במקרה זה, ויש לתכנן את מערך המסננים תוך התחשבות בתהליך הכימות.

בעייה זו נחקרה ע"י א. דמבו [2], [1], שהציע שיטת תכנון למערכות קדוד המבוססות על מערך המסננים האחידים. השיטה בנויה על הגדרת קריטריון שגיאה סטטיסטי המתחשב בכימות, ותכנון מסננים אופטימליים עפ"י קריטריון זה.

במסגרת עבודה זו, יושמה שיטת התכנון הסטטיסטי במערכת לקדוד אותות דבור. מבדיקות סמולציה מסתבר שאיכות הקדוד המושגת אינה מספקת. על סמך חקירת התוצאות מנוסח בעבודה קריטריון עוות משפור המכריד בין גורמי העוות השונים, ומאפשר מתן משקל גבוה לגורמי הפגיעה העקריים בטיב המקודד.

בהתבסס על הקריטריון המשופר, מפותחת שיטה פשוטה יחסית לתכנון המסננים עבור מערכות קדוד המתבססות על מערך המסננים האחיד. מתוך מדידות בסמולציה של מקודד אותות דבור בקצב ביניים (16Kbits/sec), נמצא שהתרומה משלב סטטיסטיקת רעש הכימות בקריטריון העוות לשפור האיכות - שולית. מסקנה זו מאשרת את הנתוח התאורטי המוצג בעבודה, ומובילה לגישת תכנון לא סטטיסטית.

המערכת המפותחת מושווית למקודד המבוסס על מערך QMF, ומשיגה איכות קרובה תוך שמירה על סבוכיות ממושג נמוכה יותר.

#### מבנה העבודה:

בפרקים 2, 3 נסקרת התאוריה הקשורה בקדוד אותות דבור בפסי תדר. בפרק 2 מתוארים מערך המסננים האחיד ומערך ה-QMF, ותנאים שונים לבטול עוותים במבנים אלו. פרק 3 דן בעקרונות הכימות הסקלרי והווקטורי, ובאופן שלובם במערך המסננים האחיד.

בפרק 4 מוצגת גישת התכנון הסטטיסטית שהוצעה ב-[1], ובדיקתה בסמולציות. התוצאות מנותחות ומוסכרות, ומובאות המלצות לשפור.

בפרק 5 מפותח קריטריון עוות חדש לתכנון מערך המסננים האחיד, הנובע מההמלצות שבפרק הקודם, ומשולב באלגוריתם איטרטיבי לתכנון המסננים בדומה ל-[1]. הפתוח המתמטי הקשור בפרק זה רוכז בנספחים ב, ג, ד.

פרק 6 מכיל המלצות לממוש מעשי של מקודדי דבור בפסי תדר המתבססים על מערכי מסננים אחידים, שגובשו במהלך הסמולציות, והשוואות למערכי מסננים אחרים.

בסכום לעבודה אנו מצביעים על הרחבה אפשרית: החלונות המתוכננים בשיטה המוצגת בפרק 5, עשויים לשמש במערכות לשנוי ציר הזמן או התדר של אותות דבור (Frequency Domain Harmonic Scaling) [5], תוך חסכון נכר בסוכיות הממוש. הנושא לא נחקר לעומקו בעבודה זו, אולם בסיס תאורטי מצומצם מוצג בנספח ה.

פרק 2 - מערכי מסננים - סקירת התאוריה

2.1 הקדמה

בפרק זה מתוארים שני הסוגים העקריים של מערכי מסננים מטפוס FIR: מערכי QMF (כולל הכללות שהוצגו לאחרונה), ומערכי מסננים אחידים.

הפרק פותח בהצגת מערך המסננים האחיד ובסכימת ממושו בשיטת WOLA. לאחר מכן מובא דיון בתנאים לתמסורת יחידה עבור מערך זה, ובבטול ההתחזות בתדר (aliasing). במערכות קדוד מעשיות לא מתקיימים התנאים, אם כי ניתן להתקרב לתמסורת יחידה ע"י תכנון מתאים (בשיטות המתוארות בפרקים 4, 5).

מעריך ה-QMF, המקובל במערכות קדוד דבור, מובא לצרכי השוואה. במוצא מעריך מסוג זה מבוטלת ההתחזות הנוצרת עקב דצימצית פסי התדר, ובקרום טוב ניתן להשיג תמסורת יחידה (בהעדר כימות אותות פסי התדר). להשלמת התמונה נסקרת גם סכימת מערכי QMF מרובי פסים ובעלי תמסורת יחידה, שהוצגו לאחרונה.

2.2 מערך המסננים האחיד (Uniform DFT Filter Bank) וממוש

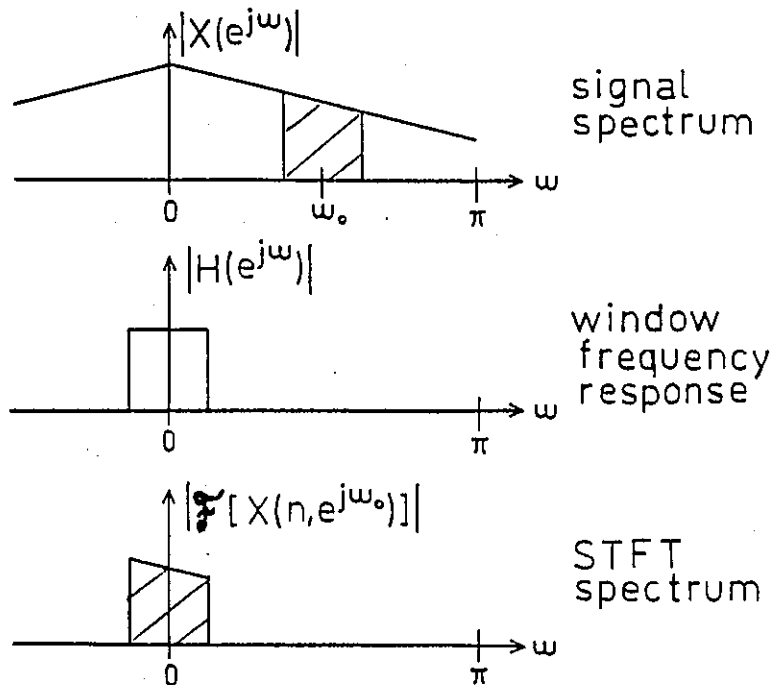
התמרת פורייה לזמן קצר (STFT - Short Time Fourier Transform) [8, chap.6] מאפשרת אנליזת פורייה של אות קוואזי-סטציונרי, בקטע שבו פרמטרי האות בקרוב קבועים. הגדרתה:

$$X(n, e^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(n-m) x(m) e^{-j\omega m} \quad (2.1)$$

כאשר  $h(n)$  הינה סדרת חלון המחליקה על פני סדרת האות  $x(n)$ . סדרת הזמן  $X(n, e^{j\omega_0})$  נתנת לפרוש כקונטורלוציה דסקרטית בין האות  $x(n) e^{-j\omega_0 n}$  לבין החלון  $h(n)$ :

$$X(n, e^{j\omega_0}) = [x(n) e^{-j\omega_0 n}] * h(n) \quad (2.2)$$

ציור 2.1 מתאר פעולה זו בתחום התדר.



ציור 2.1 - התמרת פורייה לזמן קצר

Fig 2.1 - Short time Fourier transform

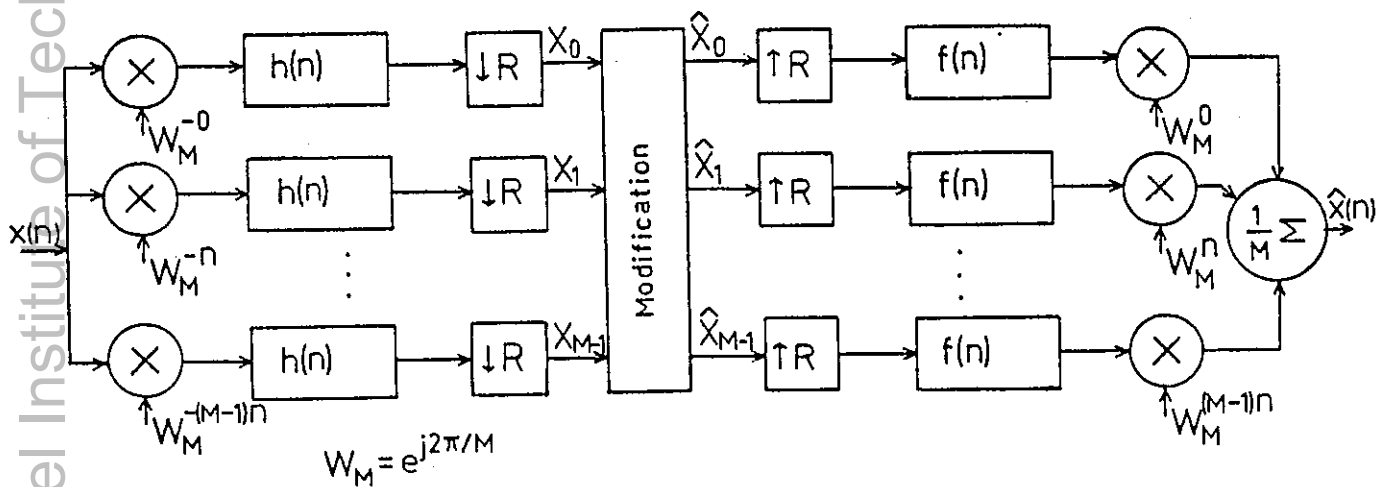
התמרת פורייה הדסקרטית לזמן קצר (DSTFT) מהווה דגימה מחזורית בתדר של ה-STFT. הרכיב ה-k של ההתמרה במימד M נתון ע"י:

$$X_k(n) = \left[ x(n)e^{-j\frac{2\pi}{M}kn} \right] * h(n) \quad , \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.3)$$

בשמושים רבים, בפרט לקדוד אותות, החלון  $h(n)$  מקרב את תגובת ההלם של מסנן מעביר נמוכים אידאלי, בעל תגובת התדר:

$$H_{ideal}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \pi/M \\ 0, & \pi/M < |\omega| \leq \pi \end{cases} \quad (2.4)$$

ממוש ה-DSTFT במקרה זה, שקול למערך המסננים המתואר בציור 2.2. במערך האנליזה, אות הכניסה עובר דה-מודולציה, ומסונן ע"י  $h(n)$ . כיוון שאותות הערוצים מגבלי סרט, ניתן להקטין את קצב הדגימה (דצימציה). במערך הסנטיזה, מבוצעת אנטרפולציה לקצב הדגימה המקורי בעזרת מסנני הסנטיזה  $f(n)$ , ומודולציה לפסי התדר המקוריים. אות המוצא,  $\hat{x}(n)$ , משוחזר ע"י סכום אותות פסי התדר.



ציור 2.2 - מערכת אנליזה/סנטיזה

Fig 2.2 - Analysis/Synthesis System

את פעולת מערך המסננים ניתן לפרש, באופן שקול, כסנון בעזרת מסננים מעבירי פס (קומפלקסיים). סדרות הזמן  $X_k(n)$ ,  $k=0, \dots, M-1$  נתנות לתאור ע"י:

$$X_k(n) = e^{-j\omega n} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) h(n-m) e^{-j\omega(n-m)} \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{M}k} = \quad (2.5)$$

$$= e^{-\frac{2\pi}{M}kn} [x(n) * h_k(n)], \quad h_k(n) = h(n) e^{j\frac{2\pi}{M}kn}$$

כלומר, אות הערוץ ה-k מתקבל ע"י סנון אות המבוא  $x(n)$  דרך המסנן מעביר הפס  $h_k$ , ולאחריו דה-מודולציה לפס בסיס.

אם חלונות האנליזה והסנטזה,  $h(n)$  ו- $f(n)$ , סופיים (כלומר - המסננים  $h(n)$  ו- $f(n)$  הם בעלי תגובת הלם סופית - FIR), מערך האנליזה ומערך הסנטזה ניתנים לממוש יעיל - הן מבחינת עומס החשוב והן מבחינת נפח הזכרון, במבנה WOLA (Weighted Overlap Add) המוסבר להלן.

### פעולת האנליזה

אות הערוץ ה-k לאחר דצימציה:

(2.6)

$$X_k(mR) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(mR-n) x(n) W_M^{-kn} = \sum_{t=-\infty}^{\infty} h(-t) x(t+mR) W_M^{-k(t+mR)} =$$

$$= W_M^{-kmR} \sum_{r=0}^{M-1} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(-lM-r) x(lM+r+mR) \right\} W_M^{-kr} =$$

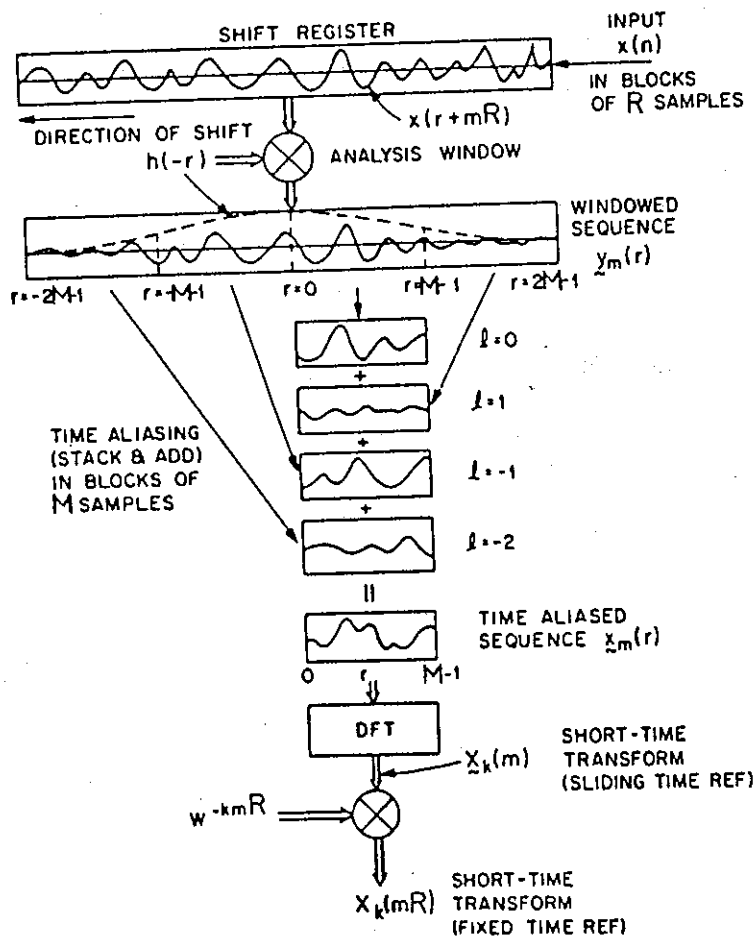
$$= W_M^{-kmR} \sum_{p=0}^{M-1} x_m(r) W_M^{-kr} = W_M^{-kmR} X_k(m)$$

$$x_m(r) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h(-lM-r) x(lM+r+mR)$$

$$X_k(m) = \sum_{r=0}^{M-1} x_m(r) W_M^{-kr}$$

$$W_M = e^{j2\pi/M}$$

הסדרה  $x_m(r)$ ,  $r=0, \dots, M-1$  מתקבלת ע"י פעולת הקפול בזמן של האות המכפל בחלון, והאותות  $X_k(m)$ ,  $k=0, \dots, M-1$  מחושבים ע"י DFT של  $x_m(r)$ . סכימת הממוש היעיל הנובעת מנוסחה (2.6) מתוארת בציור 2.3.



ציור 2.3 - אנליזת WOLA

Fig 2.3 - WOLA Analysis

פעולת הסנטזה

סכום תפוקות פסי התדר לאחר אנטרפולציה:

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{x}_k(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n-mR) \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{X}_k(mR) W_M^{kn} \quad (2.7)$$

נפרק את הסכום לתרומת ה-DSTFT בזמן  $m=m_0$  ולסכום התרומות בזמנים אחרים:



$$\hat{x}(r+mR) \Big|_{m=m_0} = f(r) \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{x}_k(m_0R) W_M^{km_0R} W_M^{kr} + \quad (2.8)$$

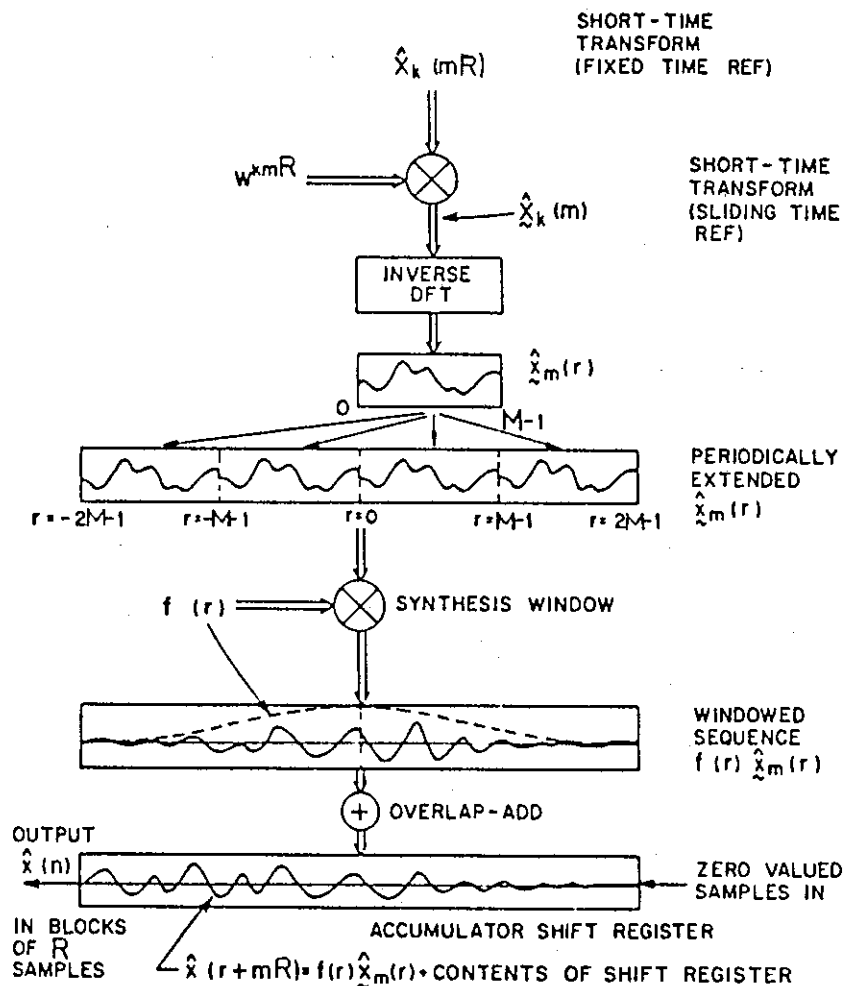
+ (terms for  $m \neq m_0$ ) =  $f(r) \hat{x}_{m_0}(r)$  + (terms for  $m \neq m_0$ ),

$$\hat{x}_{m_0}(r) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{x}_k(m_0R) W_M^{kr},$$

$$\hat{x}_k(m_0R) = \hat{x}_k(m_0R) W_M^{km_0R}, \quad W_M = e^{j\frac{2\pi}{M}}$$

וקטור האותות  $\hat{x}_{m_0}(r)$ ,  $r=0, \dots, M-1$ , מתקבל כ-IDFT של הסדרה:  $\hat{x}_k(m_0R)$ ,  $k=0, 1, \dots, M-1$ , וכאשר חלון הסנטזה ארוך ממנימד ההתמרה יש להרכיב מחזורית את הסדרה  $\hat{x}_{m_0}(r)$  לאורך החלון, בהתאם לתכונות ה-DFT.

סכימת הממוש היעיל הנובעת מנוסחה (2.8) מתוארת בציור 2.4.



ציור 2.4 - סנטזת WOLA

Fig 2.4 - WOLA Synthesis

2.3 תכונות מערך המסננים האחיד

קיום תמסורת יחידה

נדון בתנאים שעל חלון האנליזה וחלון הסנטזה לקיים לקבלת תמסורת יחידה.

בהעדר קדוד, אותות פסי התדר מקיימים:  $\hat{X}_k(mR) = X_k(mR)$ . ע"י הצבת נוסחה (2.6) ב-(2.7) נקבל:

$$\hat{x}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n-mR) \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X_k(mR) W_M^{kn} = \quad (2.9)$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r) f(n-mR) h(mR-r) \cdot \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W_M^{k(n-r)}$$

ומתוך הזהות:

$$\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} W_M^{k(n-m)} = \begin{cases} 1, & (n-m) \bmod M=0 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \quad (2.10)$$

נובע:

$$\hat{x}(n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(n-pM) \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n-mR) h(mR-n+pM) \quad (2.11)$$

לקיום השוויון  $\hat{x}(n)=x(n)$  לכל  $n$  נדרש:

$$A(p) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n-mR) h(mR-n+pM) = \delta(p) \quad , \quad \text{לכל } n \quad (2.12)$$

תנאי זה הוצג ע"י Portnoff [9].

במערכות בנות-ממוש נדרשים מסננים סיבתיים, והדרישה למערכת יחידה מתחשבת בהשתיית המסננים:

$$A(p) = \delta(p-n_0) \quad , \quad \text{לכל } n \quad (2.13)$$

$$\hat{x}(n) = x(n-n_0M) \quad , \quad \text{לכל } n \quad \text{ולכן:}$$

מכאן, השהיית מערך המסננים האחידים בעל תמסורת היחידה היא כפולה שלמה של מימד ההתמרה.

קיום תנאי Portnoff תלוי ביחס שבין אורך מסנן האנליזה  $L_h$  וגורם הדצימציה  $R$  לבין מימד ההתמרה  $M$ . התוצאות מפותחות ומוצגות ב-[10], ומסוכמות בטבלה 2.1.

טבלה 2.1 - תנאים לקיום מערכות יחידה במערך אחיד עם מסננים מטפוס FIR  
Table 2.1 - conditions for the existence of unity systems in FIR  
 uniform DFT filter bank

$R > M$	$R < M$	$R = M$	התנאים
אין מערכת יחידה	קיימות אין-סוף מערכות יחידה	קיימת מערכת יחידה אחת	1. $L_h = M$ ומסנן האנליזה $h(n)$ אינו מכיל אפסים
אין מערכת יחידה	קיימות אין-סוף מערכות יחידה	אין מערכת יחידה	2. $L_h > M$ וכל polyphase של $h(n)$ מכיל דגם אחד לפחות השונה מאפס.

- $L_h$  - אורך מסנן האנליזה
- $M$  - מימד ההתמרה
- $R$  - גורם הדצימציה.

במערכות קדוד, על מנת למנוע יתירות (redundancy) באותות פסי התדר, רצוי לבחור ביחס הדצימציה הקריטי:  $R=M$ . ברור שחלון אנליזה באורך ההתמרה יאפשר מערכת יחידה, כגון - חלון מלבני (במקרה זה פעולת המערכת מצטמצמת לבצוע DFT בבלוקים).

חסרון החלונות הקצרים הוא ההפרדה הגרועה שבין הערוצים, המהווה פרמטר קריטי לאיכות מערכת הקדוד - כפי שיובהר בהמשך.

תנאי Portnoff ביחס הדצימציה הקריטי:

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} f(n-mM) h(mM+pM-n) = \delta(p) \quad (2.14)$$

$n=0,1,\dots,M-1$

ניתן לפרק את (2.14) ל- $M$  משוואות התלויות במסנני ה-polyphase. נגדיר:

$$\bar{p}_h^{(i)}(m) = h(mM-i)$$

$$p_f^{(i)}(m) = f(mM+i)$$

הצבה ב-(2.11):

$$\bar{p}_h^{(i)}(m) * p_f^{(i)}(m) = \delta(m) \quad , \quad i=0,1,\dots,M-1 \quad (2.15)$$

$$\bar{p}_h^{(i)}(e^{j\omega}) p_f^{(i)}(e^{j\omega}) = 1 \quad \text{בתחום התדר:}$$

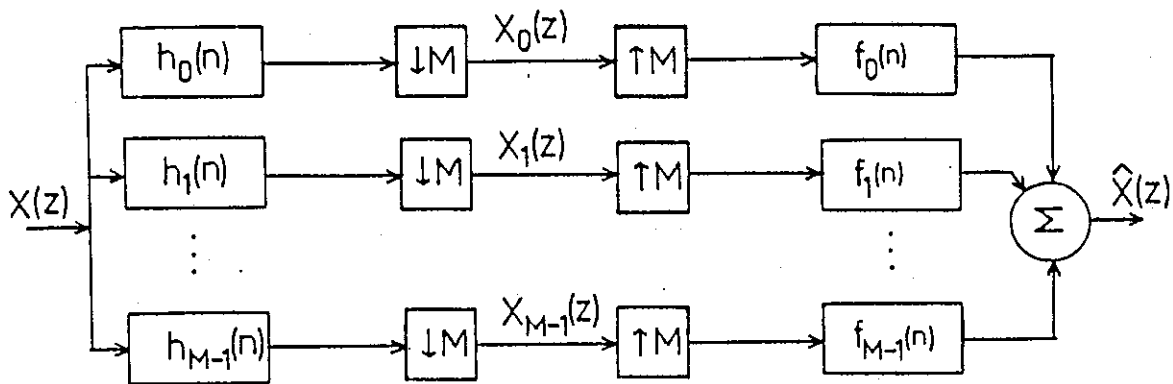
אם מסנן ה-polyphase  $\bar{p}_h^{(i)}$  מכיל שני דגמים או יותר השונים מאפס, אזי  $p_f^{(i)}$  מסנן IIR. לפיכך - לא ניתן לתכנן מערכת יחידה עם מסנני FIR בקצב הדצימציה הקריטי כאשר אורך החלון גדול ממימד ההתמרה.

בטול ההתחזות בתדר (aliasing)

תופעת ההתחזות בתדר הנגרמת לאחר דצימצית אותות פסי התדר פוגעת מהותית בטיב המקודד אף אם אינה התבטאות במדידות יחס אות לרעש.

מסנני QMF [6, chap.7] מתוכננים כך שההתחזות מתבטלת במוצא מערך הסנטיזה. ב-[11] מוצגת שיטה לתכנון מערך מסננים אחיד בקצב דצימציה קריטי וחלונות FIR ארוכים מאורך ההתמרה, המקיים את תכונת בטול ההתחזות.

להצגת השיטה, נבחן תחילה את מערך המסננים הכללי בקצב דצימציה קריטי  $(R=M)$ , המתואר בצירור 2.5. מבנה זה מכליל את מערך המסננים האחיד (ראה בטוי (2.5), כאשר הדה-מודולציה מצטמצמת לכפל ב-1 לאחר הדצימציה ביחס  $(M:1)$ ).



ציור 2.5 - מערך המסננים הכללי בקצב הקריטי  
 Fig 2.5 - The critical rate general filter bank

הקשר בין מוצא המערך למבואו:

$$\hat{X}(z) = \sum_{k=0}^{M-1} F_k(z) X_k(z^M) = \tag{2.16}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(zW_M^l) \sum_{k=0}^{M-1} F_k(z) H_k(zW_M^l),$$

$$W_M = e^{j\frac{2\pi}{M}}$$

ההתחזות מתבטלת במוצא המערכת אם מתקיים:

$$T_l(z) \triangleq \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} F_k(z) H_k(zW_M^l) = 0, \quad l=1,2,\dots,M-1 \tag{2.17}$$

לאחר בטול ההתחזות, למערכת תמסורת קבועה בזמן:

$$\frac{\hat{X}(z)}{X(z)} = T_0(z) \triangleq \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} F_k(z) H_k(z) \tag{2.18}$$

במערך המסננים האחד מתקיים:  $H_k(z) = H(zW_M^{-k})$  (נובע מתוך

בטוי (2.5). תנאי בטול ההתחזות ברשום מטריציאלי:  $h_k(n) = e^{j2\pi kn/M} h(n)$

$$[H(z)] \underline{f}(z) = \underline{t}(z) \quad (2.19)$$

$$[H(z)]_{l,k} = \frac{1}{M} H_k(zW_M^l) = \frac{1}{M} H_{(k-1) \bmod M}(z) , \quad l,k=0,\dots,M-1$$

$$\underline{f}(z) = [F_0(z), F_1(z), \dots, F_{M-1}(z)]^T$$

$$\underline{t}(z) = [T_0(z), 0, \dots, 0]^T$$

מסנני הסנטזה המקיימים משוואה זו:

$$\underline{f}(z) = [H(z)]^{-1} \underline{t}(z) = \frac{1}{\det[H(z)]} \text{adj}[H(z)] \underline{t}(z) \quad (2.20)$$

אם נבחר בתמסורת:

$$T_0(z) = \det[H(z)] \quad (2.21)$$

אזי מסנני הסנטזה יהיו בעלי תגובת הלים סופית (כאשר מסנני האנליזה,  $H_k(z)$ , בעלי תגובת הלים סופית).

המטריצה  $[H(z)]$  צירקולנטית (circulant), ומקיימת את התכונות הבאות:

1. הערכים העצמיים  $\{\lambda_k\}$  של  $[H(z)]$  מתקבלים ע"י DFT של השורה ה-0. מכפלתם שווה כמובן לדטרמיננט.
2. העמודה הראשונה של  $[H(z)]^{-1}$  מתקבלת ע"י IDFT של  $\{\lambda_0^{-1}, \dots, \lambda_{M-1}^{-1}\}$ .

נרשום כעת את  $H(z)$  בעזרת מסנני ה-polyphase שלו [11]:

$$H(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} P_h^{(l)}(z^M) \quad (2.22)$$

$$H_k(z) = H(zW_M^{-k}) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} P_h^{(l)}(z^M) W_M^{lk} , \quad k=0,\dots,M-1$$

הערכים העצמיים  $\lambda_l$  מחושבים ע"י DFT של הוקטור  $\frac{1}{M} [H_0, \dots, H_{M-1}]^T$ :

$$\lambda_l(z) = z^{-l} P_h^{(l)}(z^M) \quad (2.23)$$

$$\det[H(z)] = \prod_{k=0}^{M-1} \lambda_k = z^{-M(M-1)/2} \prod_{k=0}^{M-1} P_h^{(k)}(z^M)$$

ומסנני הסנטזה מחושבים ע"י כפל ה-IDFT של  $[\lambda_0^{-1}, \dots, \lambda_{M-1}^{-1}]^T$  ב- $\det[H(z)]$ :

$$F_k(z) = \det[H(z)] \cdot \sum_{l=0}^{M-1} \lambda_1^{-l} W_M^{+lk} \frac{1}{M} = \quad (2.24)$$

$$= \frac{1}{M} z^{-M(M-1)/2} \sum_{l=0}^{M-1} z^{l} P_f^{(1)}(z^M) W_M^{+lk} ,$$

כאשר:

$$P_f^{(1)}(z^M) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{M-1} P_h^{(k)}(z^M)$$

מתקבל מערך מסנני סנטזה אחיד הנגזר מהעתקה בתדר של מסנן אב-טיפוס, וניתן על-כך לממוש יעיל בשיטת WOLA:

$$F_k(z) = F(z W_M^k) , \quad k=0, \dots, M-1 \quad (2.25)$$

מסנן אב-הטפוס  $F(z)$  מוגדר ע"י מסנני ה-polyphase  $P_f^{(1)}(z^M)$  אשר מחושבים ישירות ע"י מסנני ה-polyphase  $P_h^{(1)}(z^M)$  לפי משוואה (2.24):

$$F(z) = \frac{1}{M} z^{-M(M-1)/2} \cdot \sum_{l=0}^{M-1} z^{l} P_f^{(1)}(z^M) \quad (2.26)$$

להשלמת התכנון נותר לבחור במסנן אנליזה,  $H(z)$ , המקרב את תמסורת היחידה:

$$\| z^{-n_0} - T_0(z) \|^2 \ll 1 \quad (2.27)$$

שיטת תכנון המסנן מפורטת ב-[11].

למערך המסננים שהוצג לעיל חסרון מהותי:

מסנן הסנטזה ארוך ביחס למסנן האנליזה (כפי שניתן להסיק משוואה (2.24)): אם  $H$  בעל  $L$  דגמים,  $L > M$ , אזי אורכו של  $F$  הוא כ- $(M-1)L$  דגמים [11]. המסנן הארוך פוגע ביעילות הממוש; את בטול ההתחזות משיגים גם במערכי QMF, ובעומס חשובי נמוך יותר.

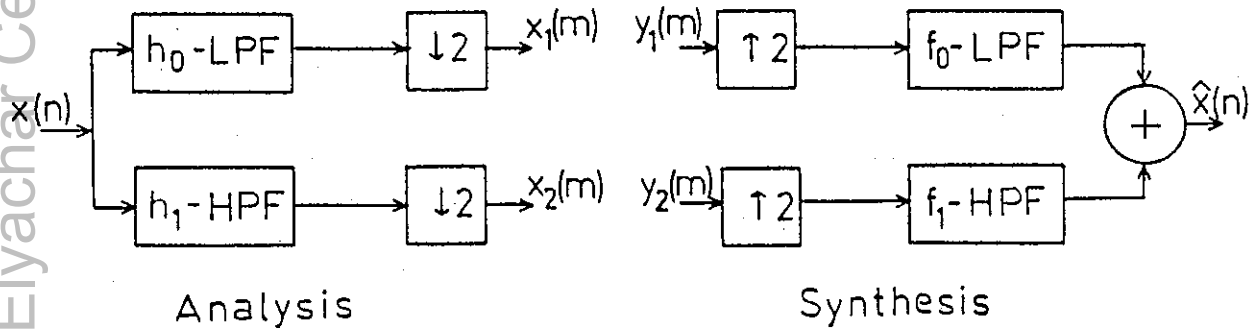
סכימה נוספת לבטול ההתחזות נתנת ב-[13], [12]. מערך המסננים המוצג שם הוא בעל פסי תדר ממשיים, ומסנני הערוצים השונים נגזרים מאב-טפוס ע"י הזזה בתדר, ע"י התמרות סינוס/קוסינוס.

לצורך הפתוח מניחים שאות ההתחזות בכל פס תדר נובע מהפסים הסמוכים בלבד. בהתבסס על הנחה זו, מוצגים מערכי מסננים, במבנה המביא לבטול ההתחזות לאחר פעולת הסנטזה. מערכי המסננים נתנים למוש במבנה דומה לסכימת WOLA, אך בסבוכיות גבוהה ממערך המסננים האחיד הקומפלקסי, עבור תכונות הפרדת תדר דומות (מספר פסי התדר, ומידת ההפרדה בין פסים סמוכים).



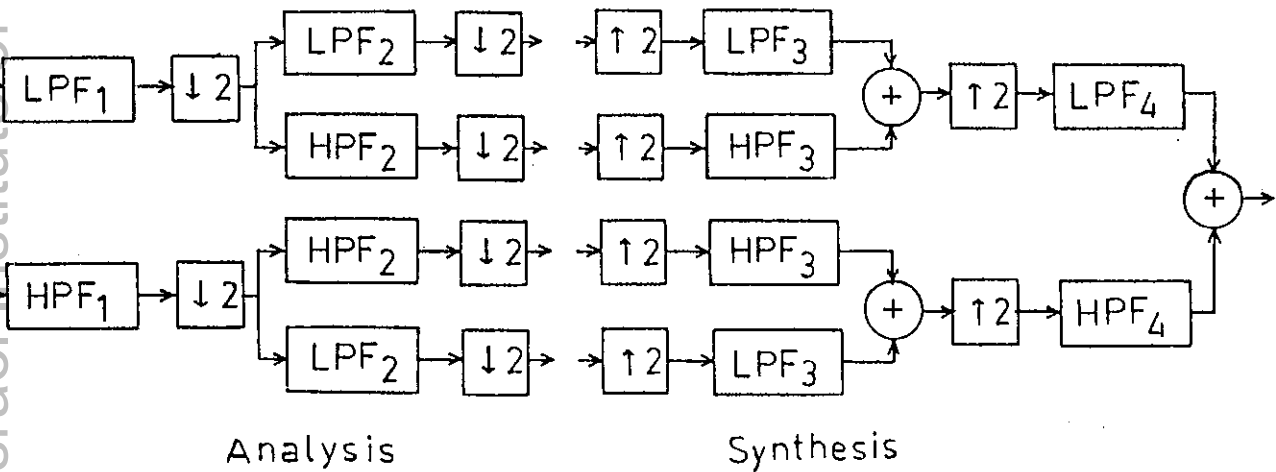
2.4 מערך QMF במבנה הקלאסי

מערכי QMF מוצאים שמוש נרחב בקדוד אותות דבור. במבנה הנפוץ מתכננים מערך מסננים המפצל אות נתון לשני פסי תדר שווי-רוחב, ומרחיבים אותו במבנה עץ, כמתואר בציורים 2.6, 2.7.



ציור 2.6 - דרגת QMF בסיסית

Fig 2.6 - Basic QMF stage



ציור 2.7 - דוגמה למערך QMF בן 4 פסים במבנה עץ

Fig 2.7 - Example of 4 band tree structure QMF bank

בהעדר קדוד -  $y_1(m) = x_1(m)$ ,  $y_2(m) = x_2(m)$ . התמרת אות היציאה נתונה ע"י:

$$\begin{aligned} \hat{X}(z) = & \frac{1}{2} X(z)[F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z)] + \\ & + \frac{1}{2} X(-z)[F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z)] \end{aligned} \quad (2.28)$$

נבחר:

$$H_1(z) = H_0(-z) \quad ; \quad h_1(n) = (-1)^n h_0(n) \quad (2.29)$$

$$F_0(z) = 2H_0(z) \quad ; \quad f_0(n) = 2h_0(n)$$

$$F_1(z) = -2H_0(-z) \quad ; \quad f_1(n) = -(-1)^n \cdot 2h_0(n)$$

עם הצבת קשרים אלו ב-(2.28) מתקבל שההתחזות בתדר (aliasing) מתבטלת, והמערכת הכוללת בעלת תמסורת קבועה בזמן:

$$F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) = 0 \quad (2.30)$$

$$\frac{\hat{X}(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} [F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z)] = H_0^2(z) - H_0^2(-z)$$

מסנן אב הטפוס,  $H_0(z)$ , מתוכנן בעזרת תכנית אופטימיזציה בהתאם

לדרישות הבאות:

א. קרוב למעביר נמוכים בעל תדר קטעון  $\pi/2$ , בעל הפרדה טובה בין פסי התדר:

$$(0, \pi/2), (\pi/2, \pi)$$

ב. שגיאה נמוכה כלפי תמסורת היחידה:

$$|H_0^2(z) - H_0^2(-z)| \approx 1, \quad z \text{ לכל}$$

ג. מסנן סימטרי (בעל פזה לינארית).

תנאי (ב) ניתן לקיום עבור מסנן באורך זוגי בלבד, משום שעבור מסנן

FIR סימטרי בעל אורך איזוגי מתקיים [6, chap.7]:

$$|H_0^2(e^{j\omega}) - H_0^2(e^{j(\omega+\pi)})| = 0, \quad \omega = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \quad (2.31)$$

2.5 מערכי QMF בעלי תמסורת יחידה

לאחרונה פותחו מערכי QMF בעלי תמסורת יחידה במדויק - לשני פסים [15], ולמספר פסים כלשהוא [7].

נסקור בקצרה את המבנה הכללי.

מערכת בת  $M$  כניסות ו- $M$  יציאות נקראת חסרת הפסדים, אם היא יציבה, ותגובת התדר (המטריציאלית, במימד  $M \times M$ ) שלה מקיימת:

$$E^*(e^{j\omega}) E(e^{j\omega}) = E(e^{j\omega}) E^*(e^{j\omega}) = I, \quad \text{לכל } \omega \quad (2.32)$$

כאשר  $*$  מציין מחלף-צמוד, ו- $I$  היא מטריצת היחידה. מתוך ההמשכה האנליטית וכאשר פונקציות התמסורת רציונליות ובעלות מקדמים ממשיים:

$$E(z) E^T(z^{-1}) = E^T(z^{-1}) E(z) = I, \quad (2.33)$$

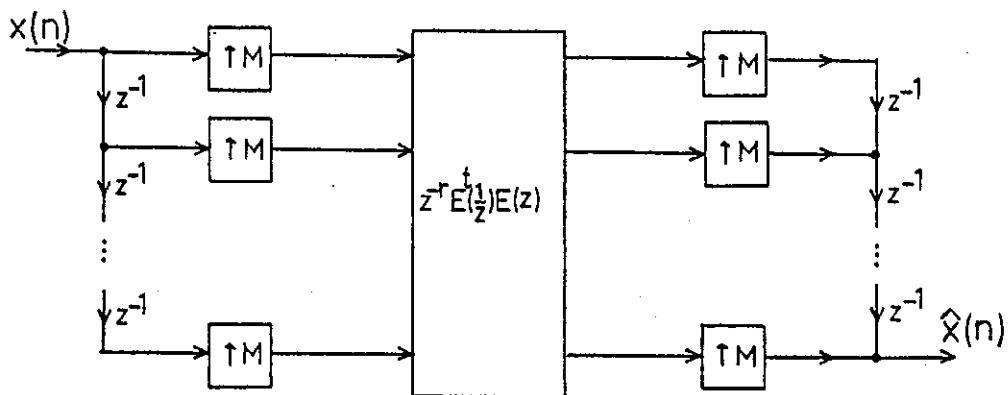
לכל  $z$ .

נבחר במטריצת תמסורת חסרת הפסדים  $E(z)$ , ונכלול אותה במבנה המתואר בציור (2.8). אם  $E(z)$  מטריצת תמסורת סיבתית, אזי  $E^T(z^{-1})$  אינה סיבתית. ממוש סיבתי במבנה זה אפשרי אם ורק אם מטריצת התמסורת  $E(z)$  מטפוס FIR, כלומר: קיים  $r$  סופי כך ש- $E^T(z^{-1}) z^{-r}$  סיבתית.

הממוש בציור 2.8 שקול לממושים בציורים 2.9, 2.10. מתוך הגדרת פעולות הדצימציה והאנטרפולציה נובע שהתמסורת הכוללת היא:

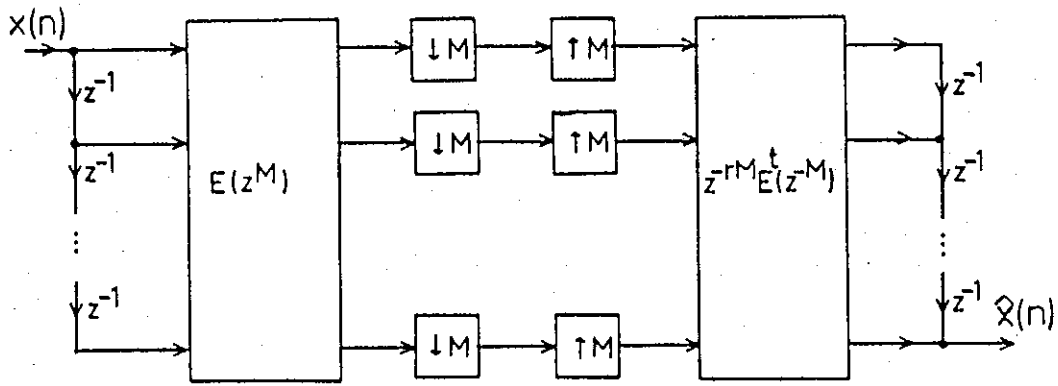
$$\hat{X}(z) = z^{-(M-1+rM)} X(z)$$

כלומר: מערך מסננים בעל תמסורת יחידה.



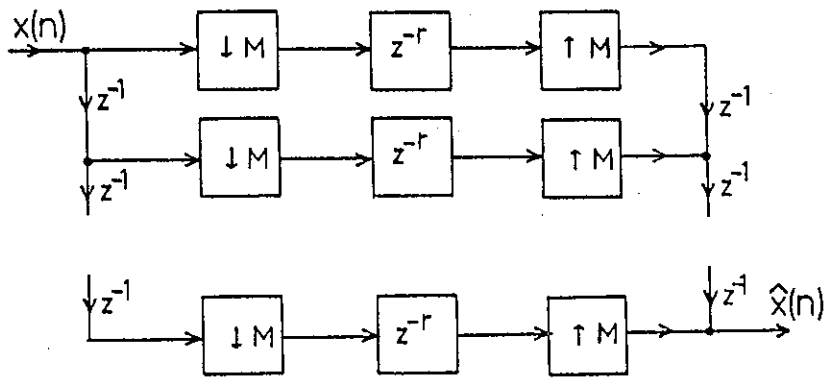
ציור 2.8 - צעד ראשון להגדרת מערך QMF בן  $M$  פסים

Fig 2.8 - A first step in defining an  $M$ -channel QMF bank



ציור 2.9 - מבנה שקול לציור 2.8

Fig 2.9 - An equivalent structure to Fig 2.8



ציור 2.10 - מבנה מבושט של המערכת בציור 2.8

Fig 2.10 - A simplified structure of Fig 2.8

נשווה בין מערך המסננים בציור 2.9 לבין מערך המסננים הכללי (ציור 2.5) ונסיק ששתי הסכימות שקולות, אם נגדיר את מסנני האנליזה  $H_k(z)$  ומסנני הסנטזה  $F_k(z)$  ע"י:

$$\underline{h}(z) = [H_0(z), H_1(z), \dots, H_{M-1}(z)]^T = \tag{2.34}$$

$$= E(z^M) \cdot [1, z^{-1}, \dots, z^{-(M-1)}]^T$$

$$\underline{f}(z) = [F_0(z), F_1(z), \dots, F_{M-1}(z)]^T =$$

$$= z^{-rM} E(z^{-M}) \cdot [z^{-(M-1)}, z^{-(M-2)}, \dots, 1]^T$$

אברי השורה ה-k במטריצה  $E(z)$  הינם למעשה מסנני ה-polyphase של  $H_k(z)$ :

$$H_k(z) = \sum_{l=0}^{M-1} z^{-l} E_{kl}(z^M) \quad (2.35)$$

כאשר  $E_{kl}(z^M)$  היא התמרת  $z$  של מסנן ה-polyphase ה- $l$  של  $H_k$ .

מתוך (2.34) נובע שמסנן הסנטזה  $F_k(z)$  ניתן ע"י הפוך סדר מקדמיו של מסנן האנליזה  $H_k(z)$ .

המטריצה חסרת ההפסדים  $E(z)$  מתוכננת בעזרת תכנית אופטימיזציה לקבלת הפרדה טובה בין פסי התדר. פתרון לשני פסים מוצג ב-[15], ולמספר פסים כלשהו ב-[7].

נדגים את מבנה המערכת במערך בן שני פסים. נבחר:

$$H_1(z) = z^{-(N-1)} H_0(-z^{-1}) \quad (2.36)$$

$$F_0(z) = z^{-(N-1)} H_0(z^{-1})$$

$$F_1(z) = z^{-(N-1)} H_1(z^{-1})$$

$F_0, F_1$  מקיימים את משוואה (2.34).  $H_0(z)$  הוא מסנן FIR מעביר נמוכים המתוכנן לקיום התנאי [15]:

$$H_0(z^{-1}) H_0(z) + H_1(z^{-1}) H_1(z) = 1, \quad z \text{ לכל} \quad (2.37)$$

על מנת להוכיח שאכן מתקיימת תמסורת היחידה, נפרק את  $H_0, H_1$  למסנני polyphase, נציבם במטריצה  $E(z^2)$  (לפי (2.35)), ונגדיר את המטריצה  $H(z)$ :

$$H_0(z) = E_{00}(z^2) + z^{-1} E_{01}(z^2) \quad (2.38)$$

$$H_1(z) = E_{10}(z^2) + z^{-1} E_{11}(z^2)$$

$$E(z^2) = \begin{bmatrix} E_{00}(z^2) & E_{01}(z^2) \\ E_{10}(z^2) & E_{11}(z^2) \end{bmatrix}$$

$$H(z) = \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} \\ 1 & -z^{-1} \end{bmatrix} E^T(z^2) = \begin{bmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{bmatrix}$$

מהשוויון האחרון נובע:

$$H^T(z^{-1}) H(z) = 2E(z^{-2}) E^T(z^2) \quad (2.39)$$

כלומר,  $\sqrt{2} E(z)$  חסרת הפסדים אם ורק אם  $H(z)$  חסרת הפסדים. ואכן, עם הצבת (2.36) במשוואת (2.38) מתקבל:

$$H(z) H^T(z^{-1}) = I, \quad \text{לכל } z \quad (2.40)$$

המסננים המתוכננים בשיטה זו אינם בעלי פזה לינארית. אם נבחר במסנן אב-טיפוס סימטרי, התנאים (2.36) מצטמצמים לתנאים (2.29), ומתקבל מערך QMF במבנה הקלאסי. במבנה זה מתבטלת ההתחזות (aliasing), אך את תמסורת היחידה לא ניתן לקיים.

פרק 3 - כימות אותות בפסי תדר

=====

3.1 הקדמה

כימות (Quantization) אות הדבור מבוצע לאחר סנון האות לפסי תדר. לכימות בפסי תדר מספר יתרונות על פני שיטות קדוד ידועות בתחום הזמן [16, chap.11]:

1. בהשוואה ל-PCM [16, chap.5], ההפרדה לפסי תדר צרים יחסית מורידה את מידת היתירות (redundancy) שבאות, כיוון שאותות פסי התדר, לאחר דלולם עפ"י רוחב הפס שלהם, הם בעלי קורלציה נמוכה. ע"י הפחתת היתירות מתאפשר קדוד בקצב שדור בינוני ונמוך.

2. משאבי הקדוד המוקצים לכל פס תדר (כגון - מספר הסיביות לכימות סקלרי), ניתנים לחלוקה בהתאם לאופי האות. אותות פסי תדר חלשים במיוחד, לדוגמה, לא יקודדו כלל.

3. ניתן להתאים לכל פס תדר את המקודד האופטימלי, בהתחשב בתכונות האי-סטציונריות של האות, המשתנות מפס תדר אחד למשנהו. בפרט, ניתן להתאים את המקודד לשנוי עוצמת האות בכל פס תדר בנפרד.

נבחין בין שתי סכימות כימות:

1. בקצב ביניים (כגון - 16Kbits/sec) מקובל לבצע כימות סקלרי. הכימות חסר זכרון, כלומר: כל דגם מקודד בנפרד. לקדוד עם חזוי כמו ADPCM [16, chap.6] אין יתרון בעל משקל, מכיוון שדגמי האות המדוללים, בכל פס תדר, חסרי קורלציה בקרוב.

2. בקצב שדור נמוך (9.6Kbits/sec ומטה) מקובל לבצע כימות וקטורי.

מבנה הפרק:

תחילה מתואר מבנה המקודד הסקלרי מהסוג המשמש בעבודה זו. אופן שלוב הכימות במערך המסננים מתואר בהמשך, ומובא דיון במספר נקודות יחודיות הקשורות בשלוב עם מערך המסננים האחד.

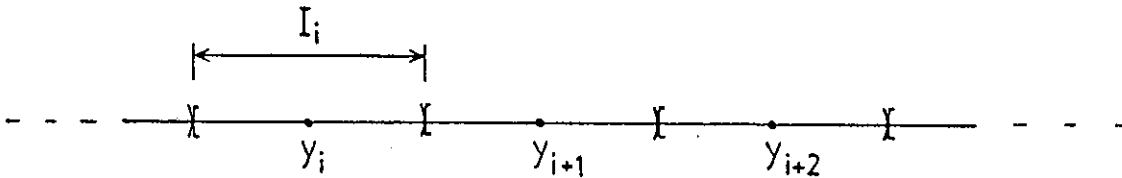
לאחר מכן, מתואר הכימות הוקטורי ושיטת תכנון ספר הקוד. מוסברות סכימות הקדוד במבנה אופקי ובמבנה אנכי, ונדון אופן שלובן במערך האחד.

3.2 כימות סקלרי (scalar quantization)

פעולת כימות חסרת זכרון למספר רמות ייצוג סופי, הינה מפוי של ערך ממשי לקבוצת ערכים ממשיים סופית:  $Y = \{y_i\}_{i=1}^N$ ,  $Q: R \rightarrow Y$ , הנקראים רמות ייצוג. הישר הממשי מחולק ל-N קטעים זרים  $I_i$ , ופעולת המפוי:

$$Q[x] = y_i, \text{ if } x \in I_i \quad (3.1)$$

סכימה זו מתוארת בציור 3.1.



ציור 3.1 - רמות ייצוג ותחומי החלטה בכימות סקלרי

Fig 3.1 - Representing levels and decision regions in scalar quantization

בהנתן פונקצית פלוג הסתברות של משתנה אקראי, ניתן לתכנן את רמות הייצוג  $y_i$  ותחומי ההחלטה  $I_i$  תוך מינימיזציה של תוחלת השגיאה הרבועית:

$$E[(x - Q[x])^2]$$

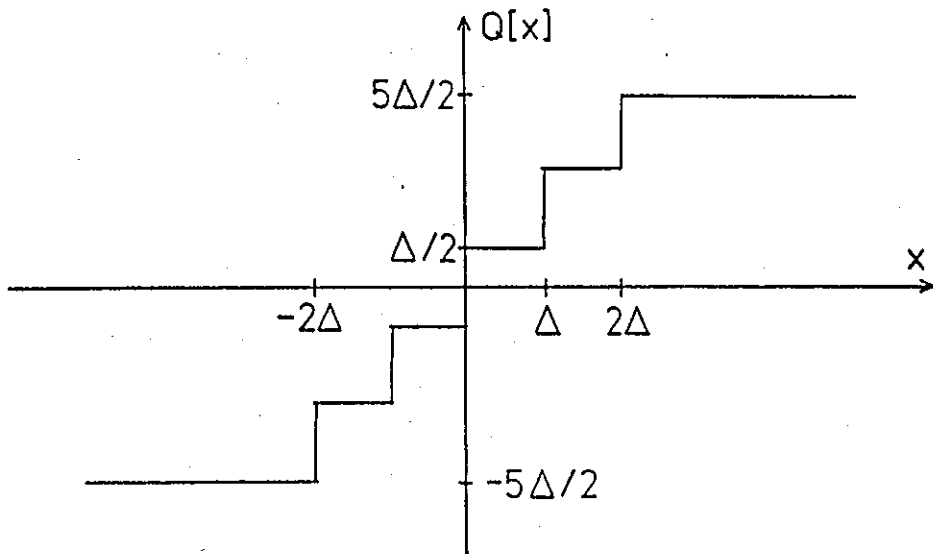
אם הפלוג אינו אחיד, נצפה לצפיפות גבוהה יותר של רמות הייצוג בתחומי האמפליטודה השכיחים יותר. הכימות האחד, המתואר בציור 3.2, הוא פתרון תת-אופטימלי. בהנתן פונקצית הפלוג, ניתן לתכנן את המרווח  $\Delta$  לכל מספר רמות רצוי  $N$ . שיטות תכנון וטבלאות מספריות למספר פונקציות פלוג המשמשות באפיון אותות דגומים, נתונות ב-[16, chap.4].

כאשר מספר רמות הייצוג גבוה דיו, באופן טפוסי 8 רמות ומעלה, ניתן לקרב את שונות רעש הכימות בעזרת הבטוי הבא [16, chap.4]:

$$\sigma_E^2 = \epsilon^2 2^{-2b} \sigma_x^2 \quad (3.2)$$

כאשר  $\sigma_x^2$  הינה שונות אות המקור (בעל ממוצע אפס),  $\epsilon^2$  קבוע התלוי בפונקצית פלוג ההסתברות ואינו תלוי בקרוב במספר רמות הייצוג, ו- $b$  הינו מספר הסיביות לייצוג:  $b = \log_2 N$  (N נבחר כחזקה שלמה של 2 מטעמי יעילות הקוד).

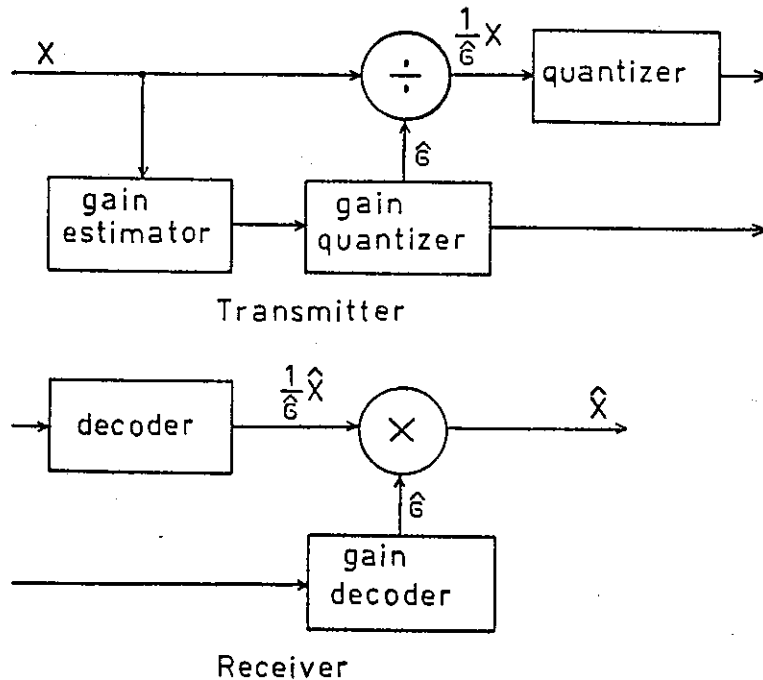




ציור 3.2 - כימות אחיד וסימטרי (N=6 רמות)

Fig 3.2 - Uniform symmetric quantization (N=6 levels)

כאשר האות אינו סטציונרי יש להשתמש בכימות בעל צעד  $\Delta$  משתנה בזמן, כמתואר למשל בציור 3.3. בקוד דבור בפסי תדר, משוערכת השונות לזמן קצר של האות בכל ערוץ, ומשמשת בסיס לקביעת גודל צעד הכימות ולחלוקה אופטימלית של מספר הסיביות הכולל העומד לרשותנו לקודד - בין הפסים השונים.



ציור 3.3 - כמות מסתגל (שערוך הגבר קדמי)

Fig 3.3 - Adaptive quantization (Forward gain estimation)

3.3 קדוד סקלרי בפסי תדר

במערך המסננים האחידים קיימים הקשרים הבאים בין הערוצים השונים:

$$\text{Im } X_0 = 0 \tag{3.3}$$

$$\text{Im } X_{M/2} = 0$$

$$X_k = X_{M-k}^* , \quad k = 1, 2, \dots, M/2-1$$

כאשר \* מציין צמוד קומפלקסי. ניתן לנקוט בשתי גישות לקדוד האותות הקומפלקסיים.

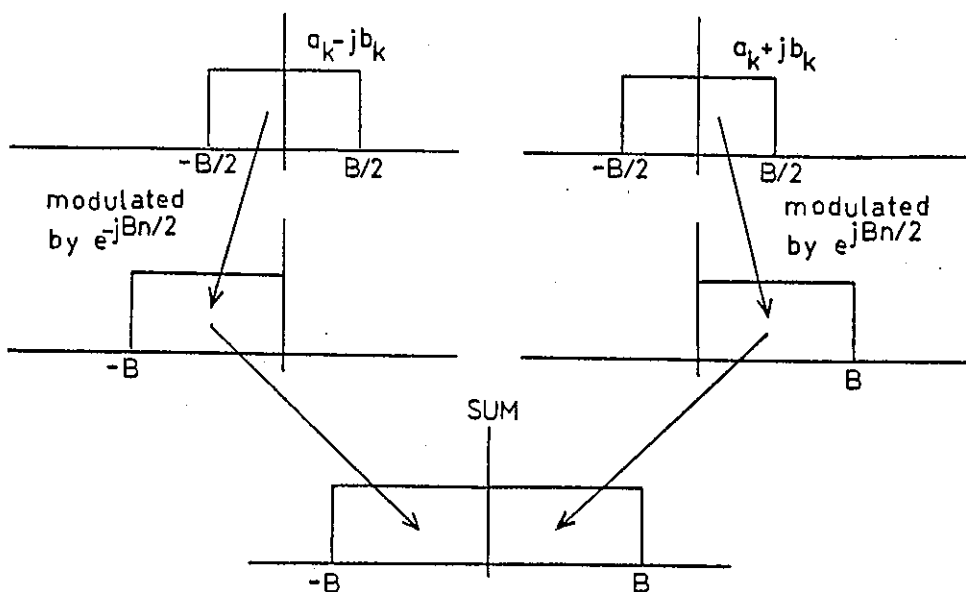
גישה א: הרכבת פסי תדר ממשיים ע"י אפנון SSB [3].

מזוג אותות צמודים המתקבלים במוצא האנליזה מרכב אות ממשי בעל רוחב פס כפול, כמתואר בציור 3.4. במוצא ערוצי האנליזה ה-k וה-(M-k), ולפני הדצימציה, מתקבלים האותות הקומפלקסיים  $a_k(n) \pm j b_k(n)$ , המגבלים (אינדאלית) לרוחב פס  $2\pi/M$ . אותות אלו מאופננים אפנון SSB ומסוכמים לאות ממשי. לאחר מכן מבוצעת דצימציה ביחס  $1: (R/2)$ ,  $R \leq M$ . לצורך ממוש האפנון באופן יעיל, נתחשב באותות פסי התדר כבאותות בעלי רוחב פס בשעור  $B=2\pi/R$ . לאחר הדצימציה מצטמצם האפנון לבחירת הרכיב הממשי והרכיב המדומה לסרוגין, וכפל ב-1, משום ש-

$$\cos(mR \cdot B/2) = \cos(m\pi/2) = 1, 0, -1, 0, 1, 0, \dots$$

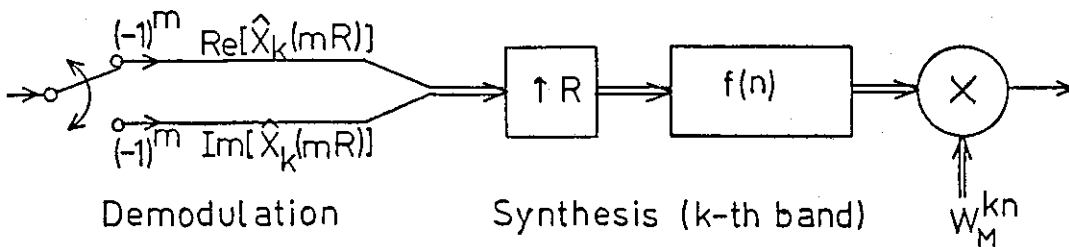
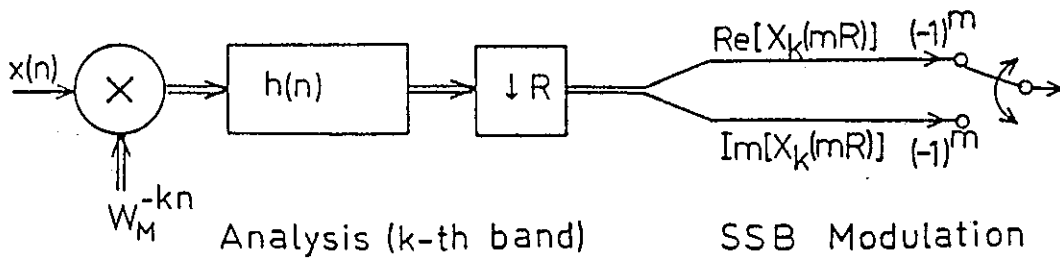
$$\sin(mR \cdot B/2) = \sin(m\pi/2) = 0, 1, 0, -1, 0, 1, \dots$$

ומכאן נובעת סכימת הממוש המתוארת בציור 3.5.



ציור 3.4 - הרכבת פס תדר ממשי בעזרת אפנון SSB

Fig 3.4 - Constructing real band signal via SSB modulation



ציור 3.5 - ממוש מערך מסננים בעל ערוצים ממשיים

Fig 3.5 - Implementation of the real signal filter bank

בגישה זו יש לקודד  $(M/2)+1$  פסי תדר, כאשר רוחב פס התדר התחתון ורוחב פס התדר העליון  $(k=0, M/2)$ , הממשיים במקורם, שווה למחצית רוחב שאר פסי התדר. אלגוריתם הקצאת סיביות במערכת קדוד עם פסים שאינם בעלי רוחב אחיד מתואר ב-[24].

גישה ב: קודד סקלרים ממשיים.

לתאור מלא של מוצא מערך המסננים בזמן נתון  $m$ , די ב-M הסקלרים

הממשיים הבאים:

$$\text{Re } X_0(mR), \text{Re } X_{M/2}(mR), \tag{3.4}$$

$$\text{Re } X_k(mR), \text{Im } X_k(mR) \quad , \quad k = 1, \dots, M/2-1$$

רכיבי רעש הכימות בערוץ ה- $k$ ,  $e_k(mR)$ :

$$\text{Re } e_k = \text{Re } X_k - Q[\text{Re } X_k] \tag{3.5}$$

$$\text{Im } e_k = \text{Im } X_k - Q[\text{Im } X_k] \quad , \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

ברצוננו להביא למינימום את השגיאה הרבועית הכוללת:

$$E \sum_{k=0}^{M-1} |e_k|^2 = E(\text{Re } e_0)^2 + E(\text{Re } e_{M/2})^2 + \quad (3.6)$$

$$+ E \left[ \sum_{k=1}^{M/2-1} 2(\text{Re } e_k)^2 + 2(\text{Im } e_k)^2 \right]$$

לרכיבים  $k = 1, 2, \dots, \frac{M}{2} - 1$ ,  $E_k$  משקל כפול בפונקצית השגיאה, משקל זה מכוּסא בהקצאת הסיביות ע"י כפל שונות (variance) רכיבים אלו ב-2.

אם  $M$  הסקלרים אינם חסרי קורלציה, ניתן לשכר את בצועי המקודד בעזרת התמרה יוניטרית מתאימה [16, chap.12]. בהנחה שמסנן האנליזה מפריד היטב בין פסי התדר, אותות הפסים השונים חסרי קורלציה. מתוצאות סמולציה מסתבר שהקורלציה בין הרכיב הממשי והרכיב המדומה בכל פס תדר זניחה, וניתן לבצע את הכימות על  $M$  הסקלרים הממשיים ישירות.

הערה: אם נשערך שונות ממוצעת משותפת לרכיב הממשי ולרכיב המדומה בכל פס תדר, ונקבע הקצאת סיביות שווה לשניהם, אזי גישה ב' שקולה לגישה א' - וזאת מכיוון שהפוך הסימן (ראה ציור 3.5) אינו משפיע על שגיאת הכימות של האות שהוא בעל ממוצע אפס.

#### הקצאת סיביות לוקטור משתנים אקראיים

נתון וקטור ערכי השונות  $(\sigma_0^2, \dots, \sigma_{M-1}^2)$  המייצג את השונות המשוערכת של  $M$  הסקלרים הממשיים לאחר כפל במשקל מתאים. לפי נוסחה (3.2) השגיאה הכוללת:

$$E^2 = \sum_{k=0}^{M-1} \sigma_k^2 2^{-2b_k} \quad (3.7)$$

ניתן לסכם את שונות הרעש של הרכיבים השונים, משום שהם, כאמור, חסרי קורלציה.

את  $E^2$  ממזערים תחת האלוץ:

$$\sum_{k=0}^{M-1} b_k = B \quad (3.8)$$

כאשר  $b_k$  הינו מספר הסיביות לכימות הערוץ ה- $k$ , ו- $B$  שווה למספר הסיביות הנתון לכימות הערוצים כולם. פתרון הבעייה נותן [16, chap.12]:

$$b_k = \frac{B}{M} + \frac{1}{2} \log_2(\sigma_k^2 / \bar{\sigma}^2), \quad \bar{\sigma}^2 = \left[ \prod_{k=0}^{M-1} \sigma_k^2 \right]^{1/M} \quad (3.9)$$

למעשה, על הקצאת הסיביות לעמוד באלוצים נוספים:  $b_k$  מספרים שלמים ותחומים בין 0 ל- $b_{\max}$ . בספרות הוצעו פתרונות לתקון נוסחת ההקצאה כדי שתעמוד באלוצים אלו [16, chap.12], [17].

3.4 כימות וקטורי

כימות וקטורי חסר זכרון הוא פעולת מפוי וקטור ממשי לקבוצת וקטורים ממשיים סופית באורך זהה:

$$Q : R^K \rightarrow Y, Y = \{y_i\}_{i=1}^N, y_i \in R^K$$

המרחב  $R^K$  מחולק ל- $N$  קבוצות זרות  $S_i$ , ופעולת הכימות:

$$Q[x] = y_i \quad \text{if } x \in S_i \quad (3.10)$$

הקבוצה  $Y$  מכונה "מילון", ואבריה "מילות קוד". בהנתן קריטריון עוות  $d(x, y)$  יש לתכנן את המילון כך שתוחלת העוות  $D=E[d(x, Q[x])]$  תהיה מינימלית.

הכימות הוקטורי  $(VQ)$  הינו בברור פעולה מרכבת ביחס לסקלרי, אך מניב בצועים משופרים: עוות נמוך יותר בקצב קדוד זהה. יתרון ה- $VQ$  על פני הכימות הסקלרי נובע מהתכונות הבאות [19]:

1. ה- $VQ$  מנצל את התכונות הסטטיסטיות שבין רכיבי הוקטור (ובפרט את התלות הסטטיסטית שביניהם) ומקטין את היתירות (redundancy) שבמידע המקודד אף אם הרכיבים חסרי קורלציה.
2. הגמישות שבקביעת גבולות איזורי ההחלטה  $S_i$ , לעומת קוביות  $K$  - מימדיות בכימות סקלרי של וקטור באורך  $K$ , מאפשרת את קיום התנאי ההכרחי (שיפורט בהמשך) לאופטימליות הקידוד ולפיכך הקטנת העוות הממוצע.

יתרוננו של ה- $VQ$  מדגם גם ע"י משפט קדוד המקורות בתורת האנפורמציה [18, chap.9]: לכל מקור סטציונרי וחסר זכרון קיימת פונקצית קצב-עוות  $R(D^*)$ , המהווה חסם תחתון לקצב השדור עבור עוות נתון  $D^*$ . לפי המשפט, לכל  $\epsilon > 0$  קיים  $VQ$  באורך סופי  $K$ , כך שבקצב שדור  $R(D^*) + \epsilon$  סיביות לסמל, גורם לעוות ממוצע  $D_K$  בשעור  $D_K \leq D^* + \epsilon$ .

במערכת הקדוד בפסי תדר, ספקטרום ההספק של האות בכל פס תדר שטוח במקורב, ולכן הקורלציה בין דגמי האות נמוכה. האותות מנורמלים בשונות לזמן קצר, וממדידות סמולציה מסתבר שפלוגם קרוב לגאוס. מסקנה: אותות פסי התדר מנורמלי ההגבר קרובים בתכונותיהם למודל המקור חסר הזכרון, וניתן להקיש ממשפט קדוד המקורות לגבי הקדוד במערכת הנדונה.

תנאים הכרחיים לאופטימליות

בהנתן פונקציית פלוג הסתברות, ה- $VQ$  האופטימלי (במובן תוחלת עוות מינימלית) מקיים שני תנאים הכרחיים [20]:

1. "תנאי השכך הקרוב": המקודד בוחר במילת הקוד המניבה עוות מינימלית לייצוג הוקטור הנתון.

$$Q[x] = y_j \text{ if } d(x, y_j) \leq d(x, y_i), \quad j=1, \dots, N \quad (3.11)$$

מכאן נובעת סכימת הקדוד המעשית: השוואת הוקטור הנתון לכל וקטור במילון ובחירת הוקטור הקרוב, עם כלל החלטה שרירותי לבחירה בין מספר מילות קוד התורמות לעוות זהה, ובאופן זה מגדירים איזורי ההחלטה  $S_i$ .

2. "תנאי מרכז הכובד":  $y_i$  נבחר כוקטור הממזער את העוות הממוצע בתחום ההחלטה  $S_i$ .

$$\begin{aligned} y_i &= \min_y E[d(x, y) | x \in S_i] = \\ &= \min_y \int_{S_i} d(x, y) p(x) dx \end{aligned} \quad (3.12)$$

בהקשר פיזיקלי,  $y_i$  שקול למרכז הכובד (centroid) המכלל של איזור ההחלטה  $S_i$  עם צפיפות מסה  $p(x)$  ופונקציית משקל  $d(x, y)$ .

תכנון המילון

אלגוריתם לחשוב המילון האופטימלי אינו ידוע, פרט למספר מקרים מנוונים. הפתרון המוצע בספרות [21] מתבסס על הפעלה איטרטיבית של שני התנאים הכרחיים:

1. אתחול: בחר מילון התחלתי  $m \leftarrow 0, Y^{(0)} = \{y_i^{(0)}\}_{i=1}^N$

2. בהנתן המילון  $Y^{(m)}$  מצא את איזורי ההחלטה לפי תנאי השכך הקרוב:

$$S_i^{(m)} = \{x : d(x, y_i^{(m)}) \leq d(x, y_j^{(m)}) \text{ , } j=1, \dots, N\} \quad (3.13)$$

3. בהנתן חלוקה של המרחב לאיזורי ההחלטה  $\{S_i^{(m)}\}_{i=1}^N$  בחר את מילות הקוד  $\{y_i^{(m+1)}\}$  לפי תנאי מרכז הכובד (3.12).  $m \leftarrow m+1$ , חזור ל-(2).

האלגוריתם עוצר כאשר השפור היחסי בעוות מאיטרציה לאיטרציה יורד מתחת לסף מסוים, ומילות הקוד  $\{y_i^{(m+1)}\}$  מרכיבות את המילון שתוכנן.

- נוהגים לבחור בפונקצית עוות ממשית אי-שלילית  $d(\underline{x}, \underline{y})$ , וקמורה  $(\text{convex } U)$  במשתנה הימני  $(\underline{y})$ . במקרה זה לאלגוריתם התכונות הבאות [20]:
- א. תוחלת העוות יורדת מונוטונית מאיטרציה לאיטרציה, ונותרת קבועה אם ורק אם האלגוריתם התכנס לנקודת שבת (fixed point).
  - ב. כל נקודות השבת היציבות הינן נקודות מינימום מקומי של העוות, כלומר: האלגוריתם מתכנס למינימום מקומי התלוי בנחוש ההתחלתי.

### תכנון מילון לפי סדרת אימון

ביישומים מעשיים פלוג ההסתברות של וקטורי המקור אינו ידוע, ומשוערך כממוצע דגם של סדרת למוד/אמון "ארוכה". נבחר בפונקצית עוות הניתנת לחשוב אי-בר-אי-בר.

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^K d_i(x(i), y(i)) \quad (3.14)$$

מקובל לבחור בקריטריון השגיאה הרבועית:

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^K w_i |x(i) - y(i)|^2 \quad (3.15)$$

כאשר  $w_i$  קבועי משקל אי-שליליים. עבור קריטריון זה, חשוב מרכז הכובד מצטמצם לחשוב הממוצע [21]:

$$\text{centroid}(S_i) = \frac{1}{\|S_i\|} \sum_{\underline{x} \in S_i} \underline{x} \quad (3.16)$$

כאשר  $\|S_i\|$  הינו מספר וקטורי סדרת הלימוד הממופים לאיזור ההחלטה  $S_i$  לפי כלל השכן הקרוב. האלגוריתם הנגזר:

$$1. \text{ אתחול: בחר מילון התחלתי } m \leftarrow 0, Y^{(0)} = \{y_i^{(0)}\}_{i=1}^N$$

2. בהנתן המילון  $Y^{(m)}$  פצל את סדרת הלימוד ל- $N$  קבוצות  $\{S_i\}_{i=1}^N$  לפי תנאי השכן הקרוב:

$$S_i^{(m)} = \{\underline{x} : d(\underline{x}, y_i^{(m)}) \leq d(\underline{x}, y_j^{(m)})\}, j=1, \dots, N \quad (3.17)$$

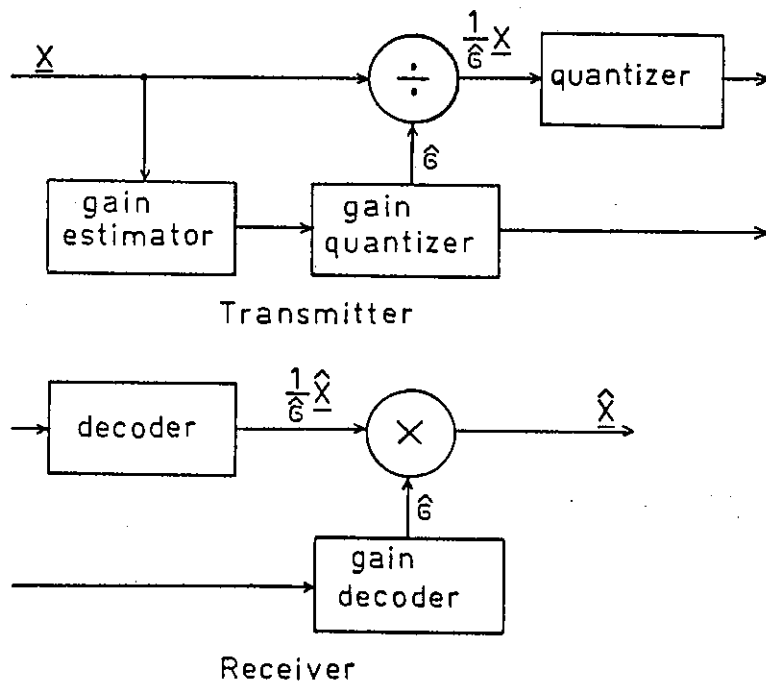


3. בהנתן חלוקה של סדרת הלימוד לקבוצות  $\{S_i^{(m)}\}_{i=1}^N$ , בחר את מילות הקוד  $\{y_i^{(m+1)}\}$  לפי תנאי מרכז הכובד (3.16).  $m \leftarrow m+1$ , חזור ל-(2).

אם מקור האות הוקטורי ארגודי, אזי המילון המתוכנן לפי סדרת לימוד בת  $n_v$  וקטורים מתכנס בהסתברות 1 למילון המתוכנן לפי הפלוג ה"אמיתי" (בתנאי התחלה זהים) כאשר  $n_v \rightarrow \infty$  [20].

כימות וקטורי בעל הגבר מסתגל (gain adaptive vector quantization)

אותות הדבור, ולכן אותות הערוצים במקודד פסי תדר, אינם סטציונריים. אמפליטודת האות משתנה בתחום דינמי רחב, ועקב השמוש בקריטריון השגיאה הרבועית יקודדו אותות חלשים בשגיאה יחסית גבוהה. כפתרון לבעייה פותחה סכימת קדוד וקטורי בעל הגבר מסתגל [22], כמתואר בצירור 3.6.



צירור 3.6 - כימות מסתגל (שערוך הגבר קדמי)

Fig 3.6 - Adaptive quantization (forward gain estimation)

המילון מתוכנן כך שתוחלת העוות שבין מוצא המערכת ומבואה, כלומר  $E[d(\underline{x}, \underline{\hat{x}})]$  תהייה מינימלית - ולא תוחלת העוות שבין הוקטורים מנורמלי ההגבר [22].  
שני התנאים ההכרחיים לאופטימליות הנגזרים מגישה זו בשלוב קריטריון השגיאה הרבועית [22]:

1. "תנאי השכך הקרוב": המקודד בוחר במילת הקוד המנורמלת המניבה עוות מינימלי לייצוג וקטור מנורמל נתון.

$$\hat{\underline{x}} = \underline{y}_i \text{ if } \|\hat{\underline{x}} - \underline{y}_i\|^2 \leq \|\hat{\underline{x}} - \underline{y}_j\|^2, j=1, \dots, N \quad (3.18)$$

כאשר  $\hat{\underline{x}}$  הוא הוקטור המנורמל המייצג את הוקטור המקודד:  $\hat{\underline{x}} = (1/\hat{\sigma})\underline{x}$ .

2. "תנאי מרכז הכובד": בהנתן סדרת לימוד מנורמלת  $\{\underline{x} = (1/\hat{\sigma}(\underline{x}))\}$ , כאשר  $\hat{\sigma}^2(\underline{x})$  הינו שערך השונות של הוקטור  $\underline{x}$ ,

$$\underline{y}_i = \text{centroid}(S_i) = \left[ \sum_{\underline{x} \in S_i} \hat{\sigma}^2(\underline{x}) \underline{x} \right] / \left[ \sum_{\underline{x} \in S_i} \hat{\sigma}^2(\underline{x}) \right] \quad (3.19)$$

תנאים אלו מוצבים באלגוריתם האיטרטיבי לתכנון המילון.

3.5 שלוש קודים וקטורי במערכי מסננים

בעבודה זו נבחן קודים וקטורי בשני מבנים:

א.  $VQ$  אנכי :  $M$  הסקלרים הממשיים במוצא ערוצי התדר, בזמן נתון  $mR$  (נוסחה (3.4)), מקודדים כוקטור (באורך  $M$ ).

ב.  $VQ$  אופקי: אותות פסי התדר הממשיים (כמתואר בסעיף 3.3) מקובצים לקבוצות בנות  $J$  דגמים לערוץ, ובכל פס תדר מפעל  $VQ$  (באורך  $J$ ) אופטימלי עבור האות בפס זה.

$VQ$  אנכי

גישה זו "טבעית" במובן שנמנעת חלוקה מלאכותית של משאבי ערוץ השדר בין פסי התדר השונים. אם אורך ההתמרה אינו קטן (באופן טפוסי, מעל ל-8 פסים), מבצעים  $VQ$  במבנה תת-אופטימלי של קוד מכפלה [23], על מנת להקטין את סבוכיות הממוש.

$VQ$  אופקי

לצורך הפשטות, ספר הקוד בכל ערוץ קבוע (ובפרט - בעל מספר מילות קוד קבוע), והקצאת הסיביות לפסי התדר השונים נקבעת ע"י שונות (variance) אותות הפסים לזמן ארוך. אופן קביעת הקצאת הסיביות (קצב השדר, גודל המילון) לכל פס תדר הוא כדלקמן:  
אותות פסי התדר קרובים באופיים לתפוקת מקור גאוסי חסר זכרון (דיון בכך הובא בסעיף 3.4). כידוע מתורת האנפורמציה, קצב השדר של  $VQ$  אופטימלי באורך  $J$  מתכנס לפונקצית קצב עוות  $R(D)$  כאשר  $J \rightarrow \infty$  [18].  
פונקציות קצב-עוות ועוות-קצב של מקור גאוסי חסר זכרון הן [16, chap.1]:

$$R(D) = \frac{1}{2} \log_2 \frac{D}{\sigma^2} \tag{3.20}$$

$$D(R) = \sigma^2 2^{-2R}$$

כאשר  $R$  הוא הקצב (סיביות לדגם),  $\sigma^2$  היא שונות (variance) המקור, ו- $D$  הוא העוות הממוצע.

נניח שהעוות הרבועי הממוצע של ה- $VQ$  בכל פס תדר קרוב ל- $D(R)$  המחושב ע"י השונות באותו פס. מכאן, פתוח נוסחת הקצאת הסיביות זהה לפתוח עבור כימות סקלרי (סעיף 3.3), ומתקבלת נוסחת הקצאה זהה (נוסחה (3.9)).

אם לערוץ מסוים נקצה  $R=b$  סיביות לדגם, אזי המילון מכיל  $2^{Jb}$  מילות קוד (וקטורים) באורך  $J$ .

הערה: רוחב פסי התדר העליון והתחתון שווה למחצית רוחב שאר פסי התדר. על מנת להשתמש בנוסחת הקצאת הסיביות שפותחה עבור פסים שווי-רוחב, יש לחלק את שונות הפס העליון והפס התחתון ב-2 לפני ההצבה בנוסחה (3.9). פתוח הקצאת הסיביות לפסים שאינם שווי-רוחב ניתן ב-[24].

#### VQ אנכי בתחום התדר

חפוש הוקטור המייצג במילון מבוצע ע"י מזעור השגיאה הרבועית הממוצעת המגדרת במשוואה (3.6). לפי משפט Parseval, השגיאה הרבועית בתחום התדר שווה לשגיאה הרבועית בתחום הזמן. ניתן, לפיכך, לוותר על חשב ה-DFT בתהליך האנליזה, ועל חשב ה-IDFT בתהליך הסנטזה, ולבצע את הכימות הוקטורי ישירות על הוקטור בתחום הזמן  $\underline{x}(x)$ ,  $x=0,1,\dots,M-1$ , ראה נוסחאות (2.6), ((2.8)).

לעומת זאת, אם נדרש לקבוע משקל לא אחיד לרכיבי השגיאה בפסי התדר השונים, לא ניתן להמנע ממעבר לתחום התדר לצורך בצוע הכימות.

פרק 4 - תכן מערכות אנליזה וסנטזה לפי קריטריון שגיאה סטטיסטי  
=====

4.1 הקדמה

פרק 4 מקדש לתאור ובדיקת שיטת תכנון מערכות הקדוד שהוצעה ב-[1], [2]. בשיטה זו מתוכננים מסננים אופטימליים למערכות קדוד בפסי תדר, עפ"י קריטריון טיב הכולל את כל גורמי העוות שבאות היציאה. העוות נובע מדצימצית אותות פסי התדר, מכימות אותות אלו, ומפעולת הסנון ע"י מערך המסננים שאינו בעל תמסורת יחידה.

קריטריון הטיב שהגדר מסתמך על אות השגיאה שבין דגמי המוצא ודגמי הכניסה. אות השגיאה אינו תהליך סטציונרי, מכיוון שמערכת הקדוד היא מערכת משתנה בזמן, כתוצאה מפעולות הדצימציה והאנטרפולציה. לפיכך, פותח ב-[1] קריטריון טיב המהווה הכללה של קריטריון השגיאה הרבועית הממוצעת לתהליכים סטציונריים, עבור השגיאה הלא סטציונרית.

פעולת הכימות מתוארת ע"י שני מודלים:

- א. במערכות הפועלות בקצב שדור בינוני (כגון 16Kbits/sec) מבוצע כימות סקלרי, המאופיין כרעש אדיטיבי הנוסף לאותות פסי התדר.
- ב. במערכות הפועלות בקצב שדור נמוך (9.6Kbits/sec ומטה) מקובל לשלב כימות וקטורי. הקדוד מבוצע ע"י מפוי וקטור דגמי אות נתון למילון (ספר - קוד) בעל א"ב סופי, ומאופיין ע"י סטטיסטיקה מדודה.

בהמשך פרק זה יושמה שיטת התכנון בסמולציה. לשם כך פותחו תכניות מחשב, ובעזרתן נבדקו בצועי המערכת בקדוד אותות דבור דגומים. משוואות תכנון המסננים במערכת הכוללת כימות וקטורי, נתונות ב-[1] ב"לבוש סטטיסטי". משוואות אלו פותחו לצורה פשוטה המתאימה לתכנות.

מבנה הפרק: תחילה מובאים סקירת התאוריה. בהמשך מובאים דוגמאות תכנון, סכום תוצאות הסמולציה, נתוחן והסברן.

ההמלצות הנובעות מנתוח התוצאות מובילות לשיטת תכנון חדשה, המתוארת

בפרק 5.

4.2 מודל מערכת הקדוד

העבודה המוגשת ב-[1] דנה בתכנון מסננים למערכות במבנה WOLA [6, chap.7], כמתואר בציור 4.1.

מערכת האנליזה מפרידה את אות הכניסה  $x(n)$  ל- $M$  פסי תדר בשני שלבים (באופן דומה לציור 2.3). ראשית, פעולת הכפל בחלון והקפול בזמן; האותות המתקבלים:

$$x_m(sR) = \sum_r h(sR-m-Mr) x(m+Mr), \quad 0 \leq m \leq M-1 \quad (4.1)$$

כאשר  $h(n)$  הוא חלון (מסנן) האנליזה, ו- $R$  הוא יחס הדצימציה. ע"י הפעלת DFT מתקבלים אותות פסי התדר הקומפלקסיים:

$$X_k(sR) = \sum_{m=0}^{M-1} x_m(sR) W_M^{-mk}, \quad W_M = e^{j\frac{2\pi}{M}} \quad (4.2)$$

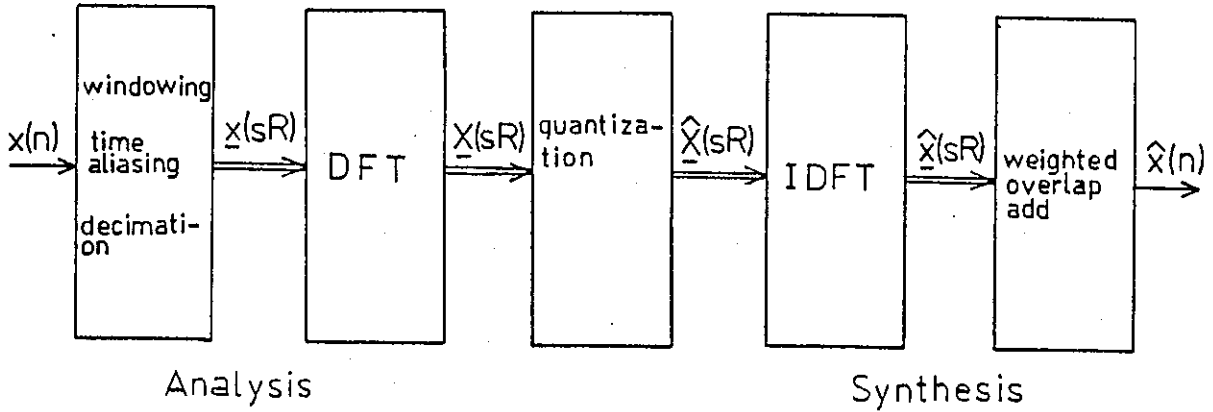
לאחר הכימות משוחזר אות המוצא ע"י מערכת הסנטזה (בדומה לציור 2.4). תחילה, מחושב IDFT ומתקבלים האותות:

$$\hat{x}_m(sR) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \hat{X}(sR) W_M^{mk} \quad (4.3)$$

וע"י פעולת ה-WOLA מחושב אות המוצא:

$$\hat{x}(n) = \sum_s f(n-sR) \hat{x}_{n \bmod M}(sR) \quad (4.4)$$

כאשר  $f(n)$  הוא חלון (מסנן) הסנטזה.



ציור 4.1 - מבנה מערכת הקודד  
 Fig 4.1 - Structure of the coding system

נגדיר שני מודלים לפעולת הכימות, בהתאם לאופי רעש הכימות.

א. כימות סקלרי "עדין"

כאשר מספר רמות הייצוג גבוה, באופן טפוסי 8 רמות ומעלה, ניתן לאפיין את פעולת הכימות כרעש אדיטיבי, סטציונרי במובן הרחב, וחסר קורלציה עם האות.

$$\hat{x}_k(sR) = X_k(sR) + V_k(sR), \quad k=0,1,\dots,M-1 \quad (4.5)$$

מכיוון שהמעבר לתחום הזמן מבוצע בעזרת התמרה ליניארית, רעש הכימות הוא אות אדיטיבי אף בתחום הזמן:

$$\hat{x}_m(sR) = x_m(sR) + v_m(sR), \quad m=0,1,\dots,M-1 \quad (4.6)$$

$$\{v_m(sR)\}_{m=0}^{M-1} = \text{IDFT} \{V_k(sR)\}_{k=0}^{M-1}$$

נניח את ההנחות הבאות:

$$E[v_1(sR)] = 0, \quad \forall s \quad \text{א.} \quad (4.7)$$

$$E[v_1(sR) x(n)] = 0, \quad \forall s, n \quad \text{ב.}$$

$$E[v_1(sR) v_k((s+d)R)] = \psi_{1,k}(dR) \quad \text{ג.}$$

$\psi_{1,k}(dR)$  היא סדרת הקרוס-קורלציה של רכיבי רעש הכימות בתחום הזמן.

ב. כימות בעזרת ספרי קוד

כימות מטריציאלי חסר זכרון - MQ (Matrix Quantization) מגדר כמפוי של סדרת וקטורי אותות הערוצים,

$$X = [\underline{X}(sBR), \underline{X}((sB+1)R), \dots, \underline{X}((sB+B-1)R)] \quad (4.8)$$

לקבוצת מטריצות סופית במימד זהה, המכונה "ספר קוד":

$$Q : R^{M \times B} \rightarrow \{C^{(i)}\}_{i=1}^L, C^{(i)} \in R^{M \times B} \quad (4.9)$$

המרחב  $R^{M \times B}$  מחולק ל-L קבוצות זרות  $A^{(i)}$ , ופעולת הכימות:

$$Q[X_{sBR}] = C^{(i)} \text{ if } X_{sBR} \in A^{(i)} \quad (4.10)$$

ה-MQ מהווה הכללה של הכימות הוקטורי המתואר בפרק 3:

-  $VQ$  במבנה האנכי מתאים ל-MQ כאשר  $B=1$ .

-  $VQ$  במבנה אופקי בעל וקטורים באורך  $B$  מתאים ל-MQ במימד  $M \times B$ , כאשר הכימות מבוצע ע"י מפוי כל שורה במטריצה  $X$  למילון של וקטורים באורך  $B$ , באופן בלתי תלוי בשורות האחרות של המטריצה. קיימים  $M$  מלונים נפרדים: מילון מס'  $i$  לכימות שורה מס'  $i$ ,  $i=1, 2, \dots, M$ , כאשר  $B=1$ . המודל מצטמצם לכימות סקלרי.

עבור מודל זה נניח את ההנחות הבאות:

א. הכימות אינו מוטח (unliased), כלומר:

$$C^{(i)} = E[X_{sBR} | X_{sBR} \in A^{(i)}] \quad (4.11)$$

ספרי קוד אופטימליים במובן תוחלת השגיאה הרבועית מקיימים הנחה זו, משום שהתנאי ההכרחי לאופטימליות הקדוד - "תנאי מרכז הכובד" (ראה פרק 3) - שקול להנחה א' עבורם.

ב. התוחלת  $E[x(sBR+d) | X_{sBR} \in A^{(i)}]$  ידועה (משוערכת) תלויה ב-d בלבד, ותסומן ב-

$$G^{(i)}(d) \triangleq E[x(sBR+d) | X_{sBR} \in A^{(i)}] \quad (4.12)$$



ג. ידועות ההסתברויות:

$$P^{(i)} \triangleq \text{Prob} \{X_{sBR} \in A^{(i)}\} \quad (4.13)$$

$$F^{(i,j)}(d) \triangleq \text{Prob} \{X_{sBR} \in A^{(i)} \cap X_{(s+d)BR} \in A^{(j)}\}$$

אברי הסדרות  $F, P, G$  לא ימדדו ישירות, אלא באופן עקיף - כפי שיפורט בהמשך.

בנוסף לשני המודלים שהגדרנו נניח שאות הכניסה  $x(n)$  סטציונרי במובן הרחב, בעל ממוצע אפס, ופונקצית אוטוקורלציה:

$$\rho(d) \triangleq E[x(n) x(n+d)] \quad (4.14)$$

קריטריון השגיאה הסטטיסטי

4.3

הקריטריון שיוגדר להלן ישמש לתכנון חלון הסנטזה בהנתן חלון האנליזה.

מערכות אנליזה וסנטזה במבנה WOLA, בעלות תמסורת יחידה, משהות את אות הכניסה בכפולה שלמה של מימד ההתמרה [6], כלומר: בשעור  $r_0 M$  דגמים,  $r_0$  שלם. נסמן את אות השגיאה במוצא המערכת ע"י:

$$e(n) \triangleq \hat{x}(n) - x(n-r_0 M) \quad (4.15)$$

עפ"י ההנחות שהכימות חסר הטייה ((4.11), (4.7)),  $e(n)$  בעל ממוצע אפס. התהליך  $e(n)$  אינו סטציונרי, עקב פעולת האנטרפולציה - המשתנה בזמן - הכלולה בתהליך הסנטזה. לשם כך מוכלל ב-[1] קריטריון השגיאה הרבועית הממוצעת עבור משפחת אותות הכוללת את  $e(n)$ .

נגדיר את פונקציית האוטוקורלציה (התלוייה בזמן) של  $e(m)$ :

$$\Phi(d, m) \triangleq E[e(m+d) e(m)] \quad (4.16)$$

נוסחה (4.16) ניתנת לפתוח לבטויים התלויים בגדלים  $\rho, \psi, G, P, F$  [1] שהגדרו לעיל.

מתוך בטויים אלו מתקבלות המסקנות הבאות [1]:

$$|\Phi(d, m)| \leq \text{Constant}, \quad \forall d, m \quad \text{א.}$$

$$\Phi(d, m+1N) = \Phi(d, m) \quad \text{ב.}$$

כאשר:

$$N \triangleq BRM/\text{gcd}(BR, M) \quad (4.17)$$

ו- $\text{gcd}(BR, M)$  מציין את המחלק המשותף הגדול ביותר של  $BR, M$ . עבור הכימות הסקלרי:  $B=1$ .

תהי  $G(e^{j\omega})$  פונקציית משקל ממשית, סמטרית ואי-שלילית אשר מקדמי הפורייה שלה  $g(n)$  מתכנסים בהחלט:

$$g(n) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \quad (4.18)$$

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \sum_{n=-L}^L |g(n)| < \infty$$

פונקציות העוות מגדרת ע"י:

$$U \triangleq \sum_{d=-\infty}^{\infty} g(d) \left[ \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \Phi(d, m) \right] \quad (4.19)$$

מכיוון שסדרת האוטוקורלציה  $\Phi$  חסומה, הסכום מגדר היטב.

פונקציות העוות מהווה הרחבה טבעית של מדד תוחלת השגיאה הרבועית לתהליכים אקראיים בעלי סדרת אוטוקורלציה מחזורית בזמן, בהתאם לפרשנות הבאה [1]:

$$U = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} E \left| \frac{1}{2r+1} \sum_{n=-r}^r \varepsilon(n) e^{j\omega n} \right|^2 G(e^{j\omega}) d\omega \quad .א$$

מכאן,  $U \geq 0$ .

ב. אם תהליך אקראי סטציונרי במובן הרחב ובעל ספקטרום הספק  $S_{\varepsilon}(e^{j\omega})$ , אזי לפי משפט Parseval:

$$U = \sum_{d=-\infty}^{\infty} g(d) \Phi(d) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{\varepsilon}(e^{j\omega}) G(e^{j\omega}) d\omega,$$

$$\Phi(d) = \Phi(d, m), \quad \forall m$$

כלומר,  $U$  מצטמצמת למדד הספק השגיאה המשוקלל בתדר.

4.4 תכנן מסנן הסנטזת האופטימלי

פונקציית העוות  $U$  נתנת לפתוח לתכנית רבועית אי-שלילית מגדרת [1]:

$$U = c + \frac{1}{R} (\underline{f}^T Q \underline{f} - \underline{b}^T \underline{f}) \quad (4.20)$$

כאשר הקבוע  $c$ , המטריצה  $Q$  והוקטור  $\underline{b}$  תלויים במקדמי חלון האנליזה  $h(n)$  ובגדלים הסטטיסטיים שהגדרו לעיל, ואברי הוקטור  $\underline{f}$  הם מקדמי חלון הסנטזת  $f(n)$ . הבטויים המתאימים נתונים ב-[1, Appendix A].

ע"י גזירת  $U$  לפי  $\underline{f}$  והשוואה לאפס מתקבלת מערכת משוואות לינארית לחשוב

$$\underline{f}_{opt}$$

$$(Q + Q^T) \underline{f}_{opt} = \underline{b} \quad (4.21)$$

התוצאות העקריות, עבור מודל הכימות העדין ועבור הכימות הוקטורי מסוכמות להלן, ללא הפתוח המפורט המובא ב-[1].

הכימות הסקלרי העדין

נדון במקרה פרטי בלבד: בקצב דצימציה קריטי  $(R=M)$  וכאשר פונקציית המשקל  $G$  קבועה  $(G(e^{j\omega})=1)$ , מערכת המשוואות מתפרקת ל- $M$  מערכות בלתי תלויות, עפ"י פרוק החלונות למסנני polyphase. נגדיר את מסנני ה-polyphase ע"י:

$$f_\tau(x) \triangleq f(\tau + Mx), \quad (4.22)$$

$$h_\tau(x) \triangleq h(Mr_0 - (\tau + Mx)), \quad \tau=0,1,\dots,M-1$$

ומערכת המשוואות לתכנון  $f(n)$  נתונה ע"י [1,eq.33]:

$$\sum_{d=-\infty}^{\infty} h_\tau(x-d) \bar{\rho}(d) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} f_\tau(x-y) [R_\tau(y) + \psi_{\tau,\tau}(yM)], \quad (4.23)$$

$$R_\tau(y) \triangleq \sum_{r=-\infty}^{\infty} h_\tau(r+y) \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_\tau(r-l) \bar{\rho}(l), \quad -\infty \leq y \leq \infty$$

$$\bar{\rho}(d) \triangleq \rho(Md) \quad \tau=0,1,\dots,M-1$$

כאשר  $\psi_{\tau, \tau}$  היא פונקצית האוטוקורלציה של רכיבי רעש הכימות בתחום הזמן ומגדרת ע"י משוואה (4.7), ו- $\rho(d)$  היא סדרת האוטוקורלציה לזמן ארוך של אות הכניסה  $x(n)$  ומגדרת ע"י משוואה (4.14).

חלונות האנליזה והסנטזה הם בעלי תגובת הלים סופית (FIR), ולכן כל הסכומים במשוואה (4.23) סופיים, ומספר דגמי הסדרות  $\psi$  ו- $\rho$  הדרושים להצבה במשוואה סופי, ותלוי באורך החלונות.

לנוסחת התכנון שלעיל ניתן לתת את הפרשות הבאה. נרשום את משוואה (4.23) בעזרת אופרטור הקונבולוציה הדסקרטית:

$$h_{\tau}(x) * \bar{\rho}(x) = f_{\tau}(x) * [R_{\tau}(x) + \psi_{\tau, \tau}(Mx)] \quad (4.24)$$

$$R_{\tau}(x) \triangleq \bar{\rho}(x) * h_{\tau}(x) * h_{\tau}(-x)$$

נסמן ב- $H_{\tau}(e^{j\omega})$ ,  $F_{\tau}(e^{j\omega})$ ,  $\bar{R}(e^{j\omega})$ ,  $\psi_{\tau, \tau}(e^{j\omega})$  את התמרות פורייה של  $h_{\tau}(x)$ ,  $f_{\tau}(x)$ ,  $\bar{\rho}(x)$ ,  $\psi_{\tau, \tau}(Mx)$  בהתאמה. כאשר לא מגבילים את אורך מסנן הסנטזה  $f(n)$  ומאפשרים למסנן להיות לא סיבתי, מתקבל בעזרת משפט Parseval הקשר הבא בתחום התדר, הדומה לנוסחת מסנן Wiener הלא סיבתי [11, chap.7]:

$$F_{\tau}(e^{j\omega}) = \frac{H_{\tau}(e^{j\omega}) \bar{R}(e^{j\omega})}{\psi_{\tau, \tau}(e^{j\omega}) + \bar{R}(e^{j\omega}) |H_{\tau}(e^{j\omega})|^2} \quad (4.25)$$

### הכימות הוקטורי

גם עבור מערכת זו נדון במקרה פרטי בלבד: בקצב דצימציה קריטי ( $R=M$ ) וכאשר פונקצית המשקל קבועה ( $G(e^{j\omega})=1$ ). ע"י הצבת תנאים אלו ב-[1, eq.B3] מתקבל:

$$(Q + Q^T) \underline{f}_{\text{opt}} = \underline{b} \quad (4.26)$$

$$b(t) = \sum_{j=0}^{B-1} \sum_{l=1}^L P^{(l)} \cdot G^{(l)}(t+jM-Mr_0) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{B} \sum_{m=0}^{MB-1} c^{(l)}(m \bmod M, j)$$

$m-t \bmod M=0$   
 $m-t \bmod MB=j$

$$Q(t,s) = \sum_{j=0}^{B-1} \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^L F^{(l,k)} \left[ - \left\lfloor \frac{j-(t-s)/M}{B} \right\rfloor \right] \delta((s-t) \bmod M) \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{B} \sum_{m=0}^{MB-1} c^{(l)}(m \bmod M, j) c^{(k)}(m \bmod M, j)$$

$m-t \bmod M=0$   
 $m-t \bmod MB=j$

$$s, t = 0, 1, \dots, L_f - 1$$

כאשר הגדלים הסטטיסטיים  $P, G, F$  מגדרים ע"י משוואות (4.12), (4.13);  
 $c^{(l)}(i, j)$  הוא האיבר ה- $i$  של הוקטור המחושב ע"י IDFT של העמודה ה- $j$   
 במטריצה  $c^{(l)}$ ;  
 $c^{(l)}$  מטריצה השייכת לספר הקוד אשר מכיל  $L$  מטריצות;  $L_f$  הוא אורך חלון  
 הסנטזה. חלון הסנטזה האופטימלי תלוי בחלון האנליזה  $h(n)$  בעקיפין, דרך  
 המדידות הסטטיסטיות.

עומס החשוב העקרי נובע משערוך הסטטיסטיקה ולא מפתרון המשוואות.  
 שערוך ישיר של אברי הסדרות  $P, G, F$  והצבתם בנוסחה (4.26) מיותר, ודורש  
 אמצעי זכרון כבדים. במסגרת העבודה כאן פותחה גישה שקולה לחשוב יעיל של  
 אברי המטריצה  $Q$  והוקטור  $\underline{b}$ . פתוחה המלא ונוסחות התכנון מוצגים בנספח א'.

4.5 תכנון מסנני האנליזה והסנטזה בעזרת אלגוריתם איטרטיבי

תכנון חלון האנליזה

פונקציית העוות  $U$  המגדרת בסעיף 4.3, תלויה מפורשות במקדמי חלון האנליזה - עבור מודל הכימות העדין. בהנתן חלון סנטזה, ניתן לחשב את חלון האנליזה האופטימלי ע"י מזעור  $U$ . בנוסף, יש להתחשב בדרישה שחלון האנליזה נדרש להיות מעביר נמוכים, בעל הפרדה טובה בין פסי התדר (ההפרדה חיונית למצוי היתרונות של קדוד בתחום התדר, המתוארים בהקדמה לפרק 3). נכלול דרישה זו בתכנון ע"י הגדרת פונקציית שגיאה משוקללת, כדלהלן.

תהי  $D(e^{j\omega})$  תגובת התדר הרצויה של חלון האנליזה, ו- $W(e^{j\omega})$  פונקציית משקל ממשית, סימטרית ואי-שלילית. נגדיר:

$$\bar{U} = U + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W(e^{j\omega}) \left| H(e^{j\omega}) - D(e^{j\omega}) \right|^2 d\omega \quad (4.27)$$

כאשר  $U$  מגדרת במשוואה (4.19), ו- $H$  היא תגובת התדר של חלון האנליזה. פונקציית השגיאה  $\bar{U}$  ניתנת לפתוח לתבנית רבועית אי-שלילית מגדרת [1]:

$$\bar{U} = \hat{c} + \underline{h}^T \bar{Q} \underline{h} - \underline{b}^T \underline{h} \quad (4.28)$$

כאשר הקבוע  $\hat{c}$ , המטריצה  $\bar{Q}$  והוקטור  $\underline{b}$  הם תלויים במקדמי חלון הסנטזה  $f(n)$  ובתגובת התדר הרצויה  $D(e^{j\omega})$ . הבטויים המתאימים ניתנים ב-[1, Appendix C]. ע"י גזירת  $\bar{U}$  לפי חלון האנליזה  $\underline{h}$  והשוואה לאבט מתקבלת מערכת משוואות ליניאריות לחשוב  $\underline{h}_{opt}$ :

$$(\bar{Q} + \bar{Q}^T) \underline{h}_{opt} = \underline{b} \quad (4.29)$$

נדון כעת במקרה פרטי. בקצב דצימציה קריטי ( $R=M$ ), וכאשר פונקציית המשקל קבועות:  $W(e^{j\omega})=\mu$ ,  $G(e^{j\omega})=1$ , מערכת המשוואות (4.29) מתפרקת למסנני polyphase (המגדרים במשוואה (4.22)):

$$\mu M d_\tau(x) + \sum_{d=-\infty}^{\infty} f_\tau(x-d) \bar{\rho}(d) = \sum_{y=-\infty}^{\infty} h_\tau(x-y) [\bar{R}_\tau(y) + \mu M \delta(y)] , \quad (4.30)$$

$$\bar{R}_\tau(y) \triangleq \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_\tau(r+y) \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_\tau(r-l) \bar{\rho}(l) , \quad -\infty < y < \infty$$

$$\bar{\rho}(d) \triangleq \rho(Md) ,$$

$$d_\tau(x) \triangleq d(Mr_0 - (\tau + Mx)) , \quad r=0,1,\dots,M-2=1$$

$d(n)$  הם מקדמי הפורייה של  $D(e^{j\omega})$ , כלומר - תגובת ההלם הרצויה של מסנן האנליזה.

אלגוריתם לתכנון איטרטיבי

יהי  $\underline{h} = A_1(\underline{f})$  פתרון כלשהוא של משוואה (4.30) בהנתן  $\underline{f}$ , ו-  $\underline{f} = A_2(\underline{h})$  פתרון כלשהוא של משוואה (4.23) בהנתן  $\underline{h}$ .

נתכנן את חלונות האנליזה והסנטזה בעזרת האלגוריתם הבא:

1. אתחול:  $r=0$ , יהיו  $\underline{h}^{(0)}$ ,  $\underline{f}^{(0)}$  חלונות התחלתיים.
2. יהי  $\underline{h}^{(r+1)} = A_1(\underline{f}^{(r)})$ , בהסתייגות שאם  $\underline{h}^{(r)}$  פותר את (4.30) אזי  $\underline{h}^{(r+1)} = \underline{h}^{(r)}$ .
3. יהי  $\underline{f}^{(r+1)} = A_2(\underline{h}^{(r+1)})$ , בהסתייגות שאם  $\underline{f}^{(r)}$  פותר את (4.23) אזי  $\underline{f}^{(r+1)} = \underline{f}^{(r)}$ .
4. אם  $\underline{h}^{(r+1)} = \underline{h}^{(r)}$  וגם  $\underline{f}^{(r+1)} = \underline{f}^{(r)}$ , עצור. אחרת,  $r \leftarrow r+1$ , חזור ל-2.

לאלגוריתם התכונות הבאות [1, Theorem 2]:

- פונקצית השגיאה  $\bar{U}$  יורדת מונוטונית מאיטרציה לאיטרציה, אלא אם האלגוריתם עצר בנקודת שבת (fixed-point), כלומר - מתקיים תנאי 4 באלגוריתם.
- בנקודת שבת של האלגוריתם מתקבל מינימום מקומי של פונקצית השגיאה  $\bar{U}$ .



4.6 תוצאות סימולציה

לצורך הערכת הבצועים נכתבו תכניות מחשב לתכנון מערכות הקדוד ולסמולציה שלהן. התכניות העקריות הן:

1. מערכת אנליזה וסנטזה בשיטת WOLA, הכוללת כימות סקלרי במספר שיטות, ומערכות הכוללות כימות וקטורי אנכי ואופקי.
2. תכניות לעריכת מדידות סטטיסטיות של רעש הכימות ולתכנון מסנני סנטזה אופטימליים, הן לכימות הסקלרי והן לוקטורי.
3. תכנית לתכנון איטרטיבי של חלונות האנליזה והסנטזה.
4. תכניות לתכנון ספרי קוד לכימות וקטורי ע"י סדרת לימוד, הן למבנה האנכי והן למבנה האופקי.

מדידות הסימולציה מסווגות לשלוש קבוצות: תכן חלונות סנטזה אופטימליים למערכות קדוד סקלריות, תכן חלונות איטרטיבי, ותכן חלונות סנטזה אופטימליים למערכות קדוד וקטוריות.

א. תכן חלונות סנטזה אופטימליים למערכות קדוד סקלריות

חלונות אנליזה תוכננו בשיטת החלון [28] ובעזרת אלגוריתם [28] Remez Exchange. מבין חלונות אלו, הטוב ביותר שהתקבל מבחינת מזעור השגיאה הרבועית של המערכת (ללא קדוד), הוא  $\text{sinc}$  מקוצץ ע"י חלון מלבני:

$$h(n+(L/2)) = \begin{cases} \sin(\frac{\pi n}{M}) / (\frac{\pi n}{M}), & -L/2 \leq n \leq L/2-1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \quad (4.31)$$

כאשר  $M$  הוא מימד ההתמרה, ו- $L$  הוא אורך החלון.

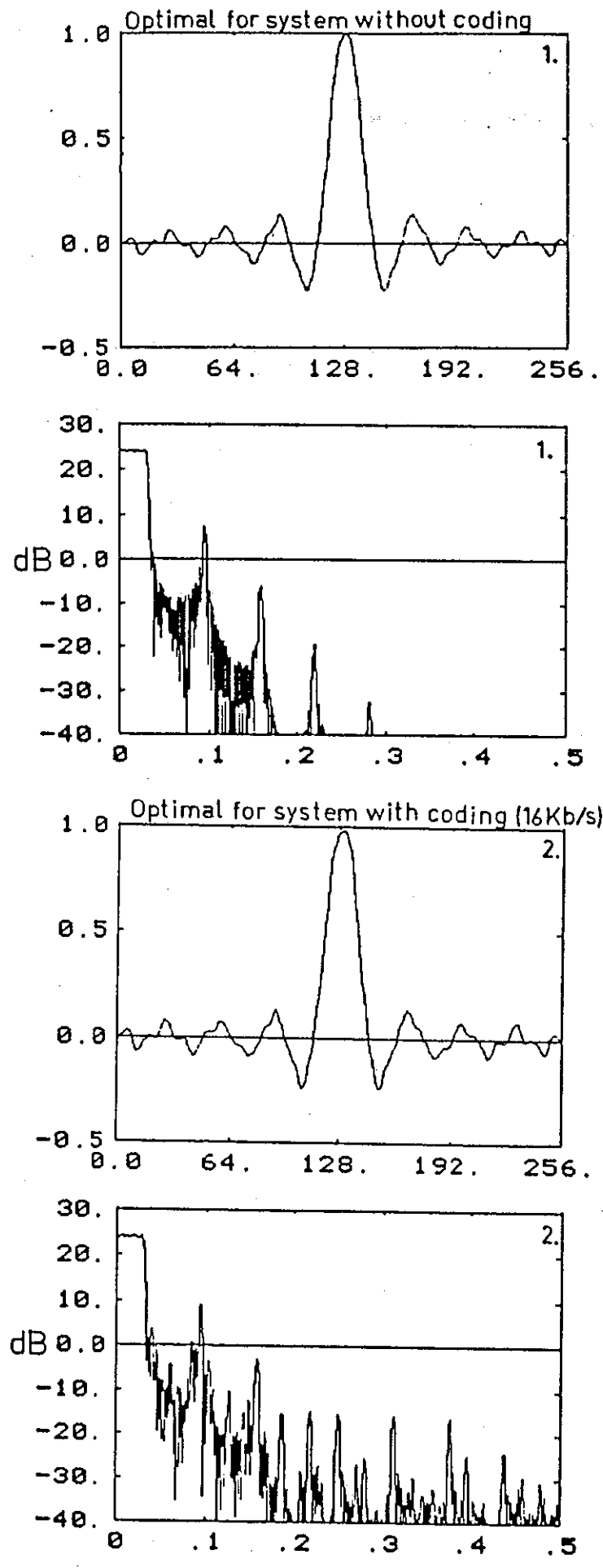
חלון הסנטזה תוכנן הן עבור מערכת אנליזה וסנטזה שאינה כוללת קדוד ( $\psi=0$ ) במשוואה (4.7), והן למערכת הכוללת כימות סקלרי. הכימות בוצע בעזרת fixed uniform quantizers, אופטימליים לפלוג גאוזי, ולשוניות המשוערכת בכל פס תדר (השוניות הקבועה, לזמן ארוך). תוצאות עקריות מודגמות בטבלה 4.1.

טבלה 4.1 - תוצאות סמולציה בחלונות סנטזה אופטימליים, וכימות סקלרי

Table 4.1 - Simulation results using optimal synthesis windows and scalar quantization

SNR, dB	SNR-SEG, dB	קצב שידור Kbits/sec	חלון סנטזה	חלון אנליזה
15.7	18.1	ללא קדוד	sinc (מובא להשוואה)	sinc
17.0	19.3	ללא קדוד	אופטימלי למערכת ללא קדוד	sinc
10.58	9.88	16	אופטימלי למערכת ללא קדוד	sinc
10.65	9.82	16	אופטימלי למערכת הכוללת כימות	sinc

המערכת בדוגמות אלו כוללת 16 פסי תדר קומפלקסיים (שקול ל-9 פסים ממשיים), חלונות אנליזה וסנטזה באורך 256 דגמים, ועובדת בקצב הקריטי. SNR נמדד עבור אות דבור דגום. חלונות הסנטזה האופטימליים, ללא ועם קדוד, ותגובות התדר שלהם, מתוארים בציר 4.2.



ציור 4.2 - תגובות החלם והתדר של חלונות הסנטיזה האופטימליים  
Fig 4.2 - Impulse and frequency responses of the optimal synthesis windows

עפ"י תוצאות הסמולציה מסיקים את המסקנות הבאות:

1. חלון אנליזה המתוכנן כמעביר נמוכים בשיטות מקובלות, אינו מתאים לשמש כמעריך המסננים האחידים בקצב הקריטי, וגורם לעוות נכר.
2. חלון הסנטזה האופטימלי אינו משפר את השגיאה הרבועית במדה מהותית, ביחס לחלון סנטזה לא אופטימלי (sinc). לעומת זאת, החלון האופטימלי מפחית במדה ניכרת את תופעת ה-aliasing הנשמעת בברור (אף ללא קדוד).
3. הכללת סטטיסטיקת הרעש בקריטריון העוות מפחיתה במדה זעירה את השגיאה הרבועית (SNR גבוה בכ-0.1dB) ביחס לתכנון אופטימלי עבור מערכות ללא קדוד. תגובות ההלם והתדר של חלונות הסנטזה בשני המקרים דומות, כפי שמתואר בציור 4.1. מבדיקות נוספות עולה שעם הפחתת עוצמת רעש הכימות (ע"י עלייה בקצב השדור), מידת שפור השגיאה הרבועית פוחתת.

### ב. תכנון איטרטיבי של חלונות אנליזה וסנטזה

בתכנון האיטרטיבי, סטטיסטיקת הרעש אינה נכללת בקריטריון העוות, והחלונות המתוכננים - אופטימליים למערכות ללא קדוד. לאחר קבלת מסנן האנליזה הסופי, ניתן להתאים לו חלון סנטזה אופטימלי, עם התחשבות ברעש הכימות. הסיבה לאופן תכנון זה היא כדלקמן:

לפי המודל שהנחנו, רעש הכימות אינו תלוי באות הכניסה ובחלון האנליזה, ובעל סטטיסטיקה קבועה. אולם, המודל אינו מדויק לחלוטין, ולמעשה משתנים במידה מסוימת אופי אות השגיאה וסטטיסטיקת הרעש עם כל שנוי בחלון האנליזה. מסיבה זו, טיב החלונות לא ישתפר עם הכללת סטטיסטיקת הרעש (הקבועה) בקריטריון העוות. מסקנה זהה התקבלה ע"י הסמולציה.

לצורך תכנון חלון האנליזה, יש להגדיר מסנן אב-טפוס מסוג מעביר נמוכים. חלון האנליזה האופטימלי הוא למעשה פשרה בין תגובת התדר הרצויה, ובין שגיאת המערכת כלפי תמסורת היחידה. מתוך מספר מסננים שנבחנו, מסנן אב הטפוס שנתן את השגיאה המינימלית תוך שמירה על קרבת אופי חלון האנליזה למעביר נמוכים, הוא M-window [5]:

$$d(n+(L/2)) = \begin{cases} \frac{M}{L} \sin\left(\frac{\pi n}{M}\right) \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi n}{L}\right), & -\frac{L}{2} \leq n \leq \frac{L}{2} - 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

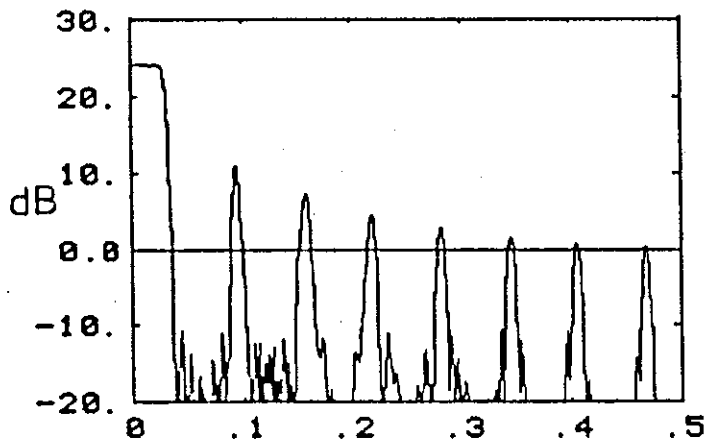
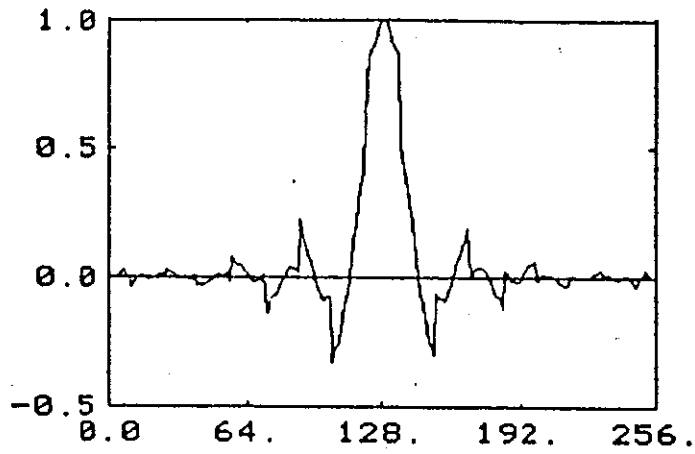
תוצאות הסמולציה העקריות מודגמות בטבלה 4.2.

טבלה 4.2 - תוצאות סמולציה בחלונות אופטימליים בתכנון איטרטיבי  
 Table 4.2 - Simulation results using windows via iterative design

SNR, dB	SNR-SEG, dB	קצב שדור Kbits/sec	חלונות האנליזה והסנטזה
>60		ללא קדוד	1. תכנון איטרטיבי ללא אלוץ על תגובת התדר של חלון האנליזה (משקל: $W=0$ )
34		ללא קדוד	2. תכנון איטרטיבי כולל אלוץ על תגובת התדר של חלון האנליזה (M-window כאב טפוס), וללא התחשבות בסטטיסטיקת הרעש
11.46	10.82	16	3. כמו ב-2 (אך אותות פסי התדר מקודדים)
11.59	10.78	16	4. חלון האנליזה כמו ב-2, חלון הסנטזה אופטימלי עם התחשבות ברעש

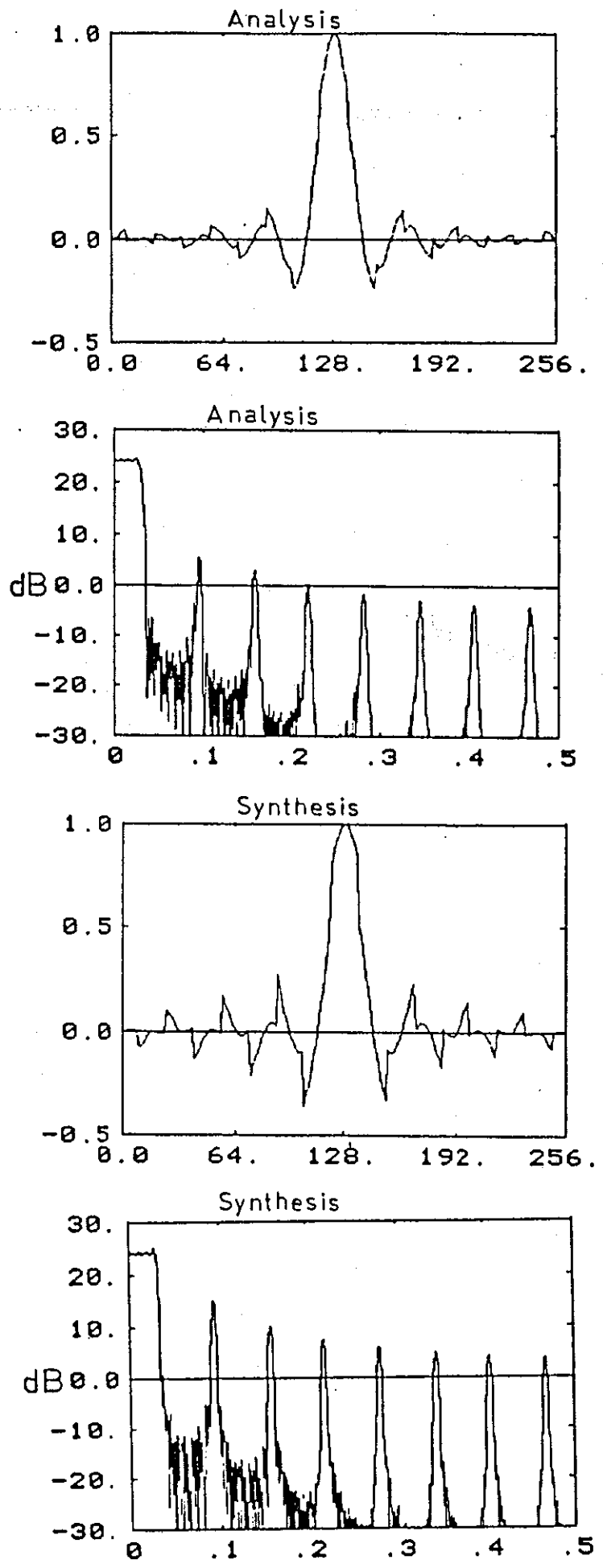
גם כאן המערכות כוללות 16 פסי תדר קומפלקסיים, חלונות אנליזה וסנטזה באורך 256, קדוד סקלרי, ופועלות בקצב הקריטי.

חלון האנליזה והסנטזה מסי 1 בטבלה 4.2 (במקרה זה, מתקבלים חלונות זהים) ותגובת התדר שלו מתוארים בציור 4.3. חלונות האנליזה והסנטזה מסי 2 באותה טבלה מתוארים בציור 4.4.



ציור 4.3 - תגובות החלם והתדר של חלון אנליזה/סנטזה איטרטיבי

Fig 4.3 - Impulse and frequency responses of the iterative A/S window



ציור 4.4 - תגובות ההלם והתדר של החלונות האיטרטיביים

Fig 4.4 - Impulse and frequency responses of the iterative windows

עפ"י תוצאות הסמולציה מסיקים את המסקנות הבאות:

1. ללא כל אלוץ על תגובת התדר של חלון האנליזה, מתקבלת מערכת קרובה ביותר למערכת יחידה. די בחלון שאורכו פי 4 מאורך ההתמרה להשגת שגיאה רבועית מסדר גודל  $-55\text{dB}$  ופחות. חלון האנליזה המתקבל אינו מפריד במידה מספקת בין פסי התדר, ואינו מאפשר את מצוי יתרונות הקדוד בתחום התדר (המתוארים בהקדמה לפרק 3).
2. ע"י הכללת איבר השגיאה שבין תגובת התדר של חלון האנליזה לתגובה הרצויה בקריטריון העוות, מתקבלת הפרדה טובה בין פסי התדר בשלב האנליזה. נדרש חלון אנליזה שאורכו מסדר גודל פי 16 מאורך ההתמרה לקבלת שגיאה נמוכה כלפי תמסורת היחידה עם הפרדה סבירה בין פסי התדר.
3. הכללת סטטיסטיקת הרעש בקריטריון העוות מפחיתה במידה זעירה את השגיאה הרבועית.
4. בבדיקות סמולציה נוספות שולב במערכת מקודד סקלרי בעל הגבר מסתגל (gain adaptive quantizer) עם הקצאת סיביות דינמית לפסי התדר. מתקבל מקודד המניב יחס אות לרעש גבוה (מעל  $19\text{dB}$  בקצב שדור  $16\text{Kbits/sec}$ ). אולם, אות הדבור המשוחזר מלווה ב"צלצולים" חזקים, הנכרים אף בכימות עדין ביותר ( $32\text{Kbits/sec}$ ).

### ג. תכונות סנטזה אופטימליים למערכת עם קדוד וקטורי

המקודד מומש בשני מבנים: אנכי ואופקי, ובעזרת VQ מסתגל (gain adaptive VQ). במבנה האנכי, מערכת הקדוד כוללת 8 פסי תדר קומפלקסיים. במבנה האופקי, נבחנו מערכות בנות 8 ו-16 פסי תדר. גודל המילונים עבור פסי התדר השונים (במבנה האופקי) נקבע ע"י הקצאת סיביות קבועה לפסים. כל המערכות פועלות בקצב הקריטי.

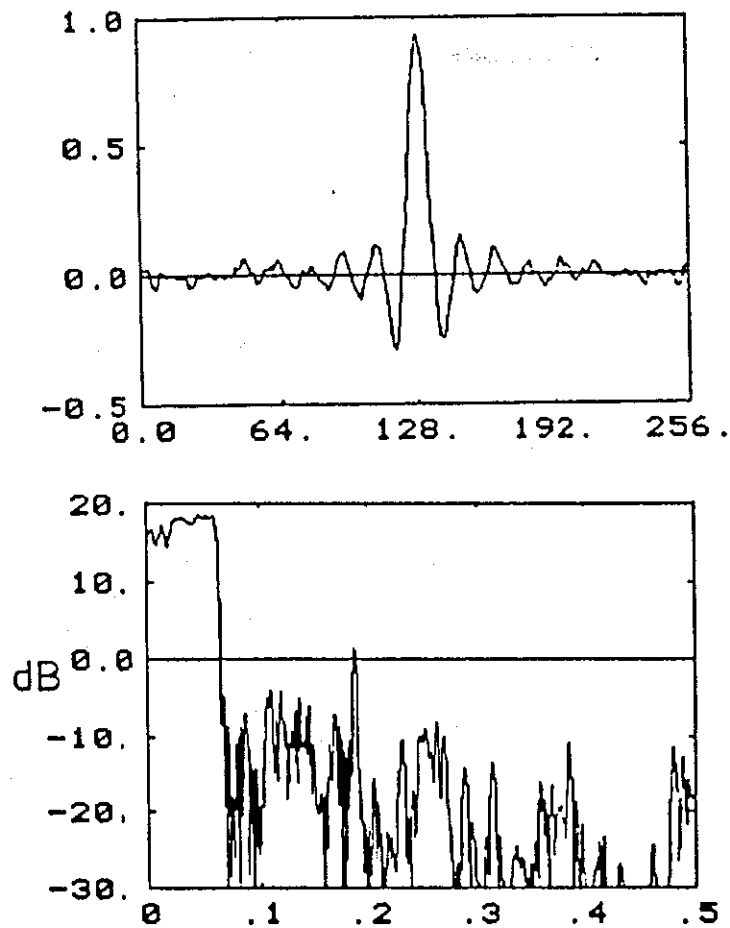
עפ"י תוצאות הסמולציה, המבנה האנכי עדיף ביחס לאופקי, הן בבדיקת SNR והן בבחינת האזנה. תוצאות עקריות במבנה האנכי מובאות בטבלה 4.3.



טבלה 4.3 - תוצאות סמולציה בחלונות סנטזה אופטימליים, וכימות וקטורי  
 Table 4.3 - Simulation results using optimal synthesis windows and  
 vector quantization

SNR, dB	SNR-SEG, dB	קצב שדור Kbits/sec	חלון הסנטזה	חלון האנליזה
11.56	13.05	8.25	sinc	.1 sinc
11.95	13.36	8.25	אופטימלי (תכנון בהתחשב בכימות)	.2 sinc
12.08	13.54	8.25	תכנון איטרטיבי (עבור מערכת ללא כימות)	.3 תכנון איטרטיבי
12.36	13.61	8.25	אופטימלי (תכנון בהתחשב בכימות)	.4 תכנון איטרטיבי

המערכות המתוארות בטבלה 4.3 כוללות 8 פסי תדר קומפלקסיים, והכימות מבוצע ע"י מילון בן 256 וקטורים באורך 8. אנדקסי מילות הקוד הנבחרות משודרים בקצב של 8Kbits/sec והגבר אותות פסי התדר משודר כמידע צד בקצב של 0.25Kbits/sec.  
 חלון הסנטזה מסי 2 בטבלה 4.3, ותגובת התדר שלו, מתוארים בציור 4.5.



ציור 4.5 - תגובות ההלם והתדר של חלון הסנטזה האופטימלי

Fig 4.5 - Impulse and frequency responses of the optimal synthesis window

עפ"י תוצאות הסמולציה מסיקים את המסקנות הנאות:

1. חלון הסנטזה האופטימלי משיג שפור מתון ב-SNR ביחס לחלון שתכנן ללא התחשבות בכימות.
2. הדבור המשוחזר נשמע ברור ("clear") וללא תופעת "מעביר נמוכים" (low pass effect). העוות נשמע לצרידות ומעין "צלצולים" הנלווים לאות.
3. מבחינה סובייקטיבית, קיים שפור באיכות מערכת 2 ביחס למערכת 1 בטבלה 4.3, עקב הנחתת ההתחזות (aliasing) הנגרמת ע"י חלונות sinc. אין הבדל ברור באיכות הסובייקטיבית בין מערכות 2, 3 ו-4 באותה טבלה.

4.7 נתוח תוצאות הסמולציה, ומסקנות

תוצאות הסמולציה מעלות שתי נקודות עקריות הדורשות הסבר:

- א. הכללת סטטיסטיקת הרעש בקריטריון העוות אינה מעלה במידה רבה את יחס האות לרעש, וכאשר הכימות "עדין" מידת השפור זעומה וחסרת משמעות מבחינת האוזן. נשאלת השאלה - האם קיים הסבר תאורטי לכך, והאם ניתן להעלות את מידת השפור ע"י שנוי קריטריון העוות.
- ב. מקודדים בפסי תדר לקצב ביניים (כגון 16Kbits/sec), בעזרת מערכי QMF, כימות מסתגל והקצאת סיביות דינמית, מניבים בצועים מעולים. במערכת WOLA שנבחנה לעיל, הדבור המשוחרר מלווה בהפרעות חזקות, למרות שמתקבל יחס אות לרעש גבוה, בדומה למערכת המכוססת על מערכי QMF. נדרשים הסבר לתופעה, והמלצות לאופן שפור האיכות.

א. התחשבות ברעש הכימות בקריטריון העוות

- בקצב שדור בינוני וגבוה, מרבית פסי התדר מקבלים הקצאת סיביות "עשירה", ואות הרעש  $V_k(sR)$  (המגדר במשוואה (4.5)) קרוב בתכונותיו למודל הרעש הלבן.
- מכאן, פונקציית הקרוס קורלציה של רכיבי הרעש בתחום הזמן (משוואה (4.7)) מקיימת:

$$E[v_1(sR) v_k((s+d)R)] = \psi_{1,k}(dR) \approx \psi_{1,k}(0) \delta(d) \quad (4.33)$$

$$\delta(d) = \begin{cases} 1, & d=0 \\ 0, & d \neq 0 \end{cases} \quad \text{כאשר:}$$

סדרת האוטוקורלציה של אות הדבור, המדוללת ביחס גבוה דיו (8 ומעלה), אף היא קרובה לסדרת הלם (דגם יחידה):

$$E[x(n) x(n+dR)] = \rho(dR) \approx \rho(0) \delta(d) \quad , \quad R \geq 8 \quad (4.34)$$

בסעיף 4.4, משוואה (4.25), מודגם הדמיון שבין מסנן הסנטזה האופטימלי (בקצב קריטי וכימות עדין), ובין מסנן Wiener. משוואה (4.25) מתקיימת כאשר חלון הסנטזה  $f(n)$  אינו מוגבל באורכו, ומקורבת אם החלון סופי, אך ארוך.

עפ"י ההנחות לעיל, משוואה (4.25) מצטמצמת ל:

$$F_\tau(e^{j\omega}) \approx \frac{H_\tau(e^{j\omega})}{|H_\tau(e^{j\omega})|^2 + (\psi_{\tau,\tau}(0)/\rho(0))} \quad (4.35)$$

כאשר  $H_T$  ו- $F_T$  הן התמרות פורייה של מסנני ה-polyphase  $h_T(n)$  ו- $f_T(n)$ .  
 בהעדר כימות, כלומר -  $\varphi_{T,T}(0)=0$ ,

$$F_T(e^{j\omega}) \equiv \{H_T^*(e^{j\omega})\}^{-1} \quad (4.36)$$

בכימות עדין, כלומר - ביחס אות לרעש גבוה:  
 $\varphi_{T,T}(0)/\rho(0) \ll 1$ , אמפליטודת  $F$  מנחתת מעט, ואופיו הכללי של המסנן  
 אינו משתנה בקרוב. תופעה זו היא בהתאמה מלאה עם תוצאות הסמולציה  
 (לדוגמה, ציור 4.2).

נתוח תאורטי נוסף של השפעת רעש הכימות על מסנן הסנטזה האופטימלי  
 ניתן בפרק 5, ע"י בחינת השפעת גורמי הרעש השונים בתחום התדר.

### ב. גורמי ההפרעות במקודד בפסי תדר

עפ"י מודל רעש הכימות האדיטיבי, נפריד את גורמי העוות במקודד  
 המבוסס על מערך המסננים האחידים לשני רכיבים אדיטיביים ובלתי תלויים:  
 העוות הנגרם ע"י מערך המסננים (הכולל את ההתחזות - aliasing), ורעש  
 הכימות.

העוות הנגרם בהעדר קדוד אפסי (ראה דוגמה 2 בטבלה 4.2), ובהאזנה  
 לא ניתן כלל להבחין בהבדל בין אות הדבור המקורי למשוחזר. מכאן  
 שהעוות באות הדבור המשוחזר נובע מרעש הכימות ואת ההבדל בין התוצאות  
 במערכות QMF לעומת מערך המסננים האחיד יש לתלות באופי רעש הכימות  
 המופיע במוצא המערכת.

ההבדל ניתן להסבר ע"י תופעת המיסוך (Auditory Masking Effect)  
 [26], [27]. אות צר סרט מפחית את רגישות האוזן לאותות חלשים ממנו  
 בתדירות קרובה, ועשוי למנוע כליל את קליטתם אם יחס העוצמות גבוה.  
 לעומת זאת, אות צר סרט אינו מונע או מחליש קליטת אותות בתדירות  
 רחוקה, אף אם הם חלשים יחסית.

רעש הכימות הנוצר בפס תדר מסוים ממוסך ע"י האות, וקליטת הרעש  
 נחלשת ויתכן שאף נמנעת כליל. אם רעש הכימות זולג לפסים אחרים, ובפרט  
 לפס שבו לא קיים אות (אותות פסי תדר חלשים לא מקודדים ולא מועברים  
 ליציאה), הוא ישמע בעוצמה גבוהה, בהעדר מיסוך.

במערך מסננים מטפוס QMF, מסנני הסנטזה (שהם זהים למסנני האנליזה), מפרידים היטב בין פסי התדר, ומונעים זליגת רעש הכימות מפס לפס. לעומת זאת, חלונות הסנטזה האופטימליים עבור מערך המסננים האחידים, אינם מפרידים היטב בין פסי התדר (ראה ציור 4.3).

## ג. מסקנות

על מנת לשפר את בצועי מערכת הקדוד המבוססת על המערך האחיד עם המסננים האופטימליים, יש לבצע את השפורים הבאים:

1. יש לאלץ אופי של מעביר נמוכים למסנן הסנטזה (בנוסף למסנן האנליזה), ולהפריד היטב בין פסי התדר.
2. יש להפריד בין הגורמים השונים של רעש הכימות, ולכלול אותם בנפרד בקריטריון העוות:
  - הגורם העקרי לירידת האיכות הוא הרעש הזולג מפס תדר אחד לאחרים, ויש לקבוע משקל גבוה לגורם זה בקריטריון העוות.
  - הגורם המשני הוא הרעש הנותר בפסי התדר שבהם נוצר, והשפעתו מופחתת ע"י תופעת המיסוך.

פרק 5 - תכן מערכי מסננים לפי קריטריונים בתחום התדר

=====

5.1 הקדמה

מתוך מסקנות הפרק הקודם מתבקש קריטריון עוות המפריד בין רכיבי הרעש הזולגים מפס תדר אחד לאחרים ובין רכיבי הרעש הנותרים בפסים המקוריים. ההפרדה מאפשרת מצד אחד לחקור תופעות עוות שונות, ומביאה למסקנות עקרוניות הן במשור התאורטי והן בסמולציות. מצד שני, היא מניבה שיטת תכנון למערך מסננים אחיד העשוי לשמש במערכת קדוד בעלת איכות גבוהה.

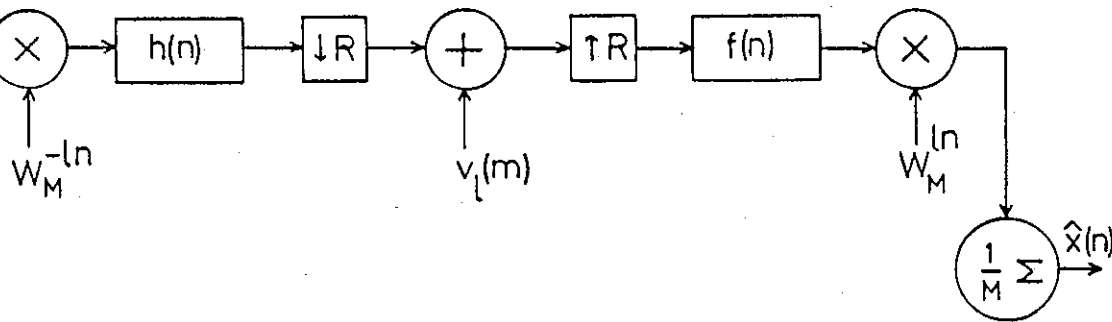
הגישה הטבעית להפרדת רכיבי הרעש היא ע"י הגדרת קריטריון עוות בתחום התדר. להגדרת המודל הנחנו שמערכת הקדוד מבצעת כימות סקלרי "עדין" במספר רמות ייצוג גבוה דיו להצדקת תאור פעולת הכימות כתוספת של רעש אדיטיבי וסטציונרי לאות בכל פס תדר. במוצא מערך המסננים הרעש אינו סטציונרי, ויש להכליל את קריטריון תוחלת השגיאה הרבועית באופן מתאים.

נגדיר פונקציות מחיר המשמשות לתכנון חלון האנליזה בהנתן חלון הסנטזה ולהיפך, שיהוו בסיס לתכנון איטרטיבי. פונקציות העוות יוגדרו כנורמה אויסקלידית בתחום התדר, ומזעורן יבוצע בעזרת פתרון מערכת משוואות לינאריות.

5.2 פתוח קריטריון שגיאה בתחום התדר

5.2.1 מודל המערכת ורכיבי העוות

מערך המסננים הממומש בשיטת WOLA מתואר בציור 2.2. נניח שפעולת הכימות בכל ערוץ שקולה לתוספת רעש אדיטיבי וסטציונרי, בעל ממוצע אפס וסדרת אוטוקורלציה ידועה (או משוערכת בעזרת מדידות). ציור 5.1 מתאר ערוץ טפוסי במערך המסננים האחד. הוא רעש קומפלקסי בעל ספקטרום הספק  $S_{v_1}(e^{j\omega})$ .



ציור 5.1 - הערוץ ה-1 במערך המסננים האחדים

Fig 5.1 - The 1-th channel of the uniform DFT filter bank

התמרת אות המוצא נתונה ע"י:

$$\hat{X}(z) = \frac{1}{R} \sum_{k=0}^{R-1} X(z W_R^k) \cdot \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} F(z W_M^{-l}) H(z W_R^k W_M^{-l}) + \quad (5.1)$$

+ { תרומת הרעש }

$$W_M = e^{j\frac{2\pi}{M}}, \quad W_R = e^{j\frac{2\pi}{R}}$$

כל המחברים הכוללים את האיברים  $X(z W_R^k)$ ,  $k=1, \dots, R-1$ , הם אברי ההתחזות הנובעים מהאות עצמו, ללא רעש הכימות.

רעש הכימות במוצא המערכת אינו סטציונרי, עקב פעולת האנטרפולציה. ניתן להגדיר פונקציית ספקטרום הספק של רעש המוצא, התלויה בזמן. מפתוח הבטוי לפונקציה זו, נובע שספקטרום ההספק מחזורי בזמן. נגדיר ספקטרום הספק ממוצע, כממוצע על פני מחזור של הספקטרום התלוי בזמן.

הבטוי לספקטרום הממוצע מפותח כנספח ב', וניתן ע"י:

$$S_{out}(e^{j\omega}) = \sum_{l=0}^{M-1} S_{vl}(e^{j\omega} W_M^{-lR}) \left| F(e^{j\omega} W_M^{-l}) \right|^2 \quad (5.2)$$

כאשר האיבר התלוי ב- $S_{vl}$  מציין את תרומת הרעש הנוצר בפס ה-1.

תמסורת יחידה תתקיים אם  $\tilde{X}(z) = z^{-n_0} X(z)$ , ובמערך המסננים האחד בעל תמסורת יחידה,  $n_0$  הוא תמיד כפולה שלמה של מימד ההתמרה (ראה פרק 2, סעיף 2.3).

נגדיר את הנורמה האויקלידית בתחום התדר באופן הבא:

$$\|F(z)\|^2 \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |F(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (5.3)$$

נפריד את העוות במוצא המערכת לארבעה גורמים. תחילה, העוות הנוצר בהעדר כימות:

$$E_1 \triangleq \frac{1}{M^2} \sum_{k=1}^{R-1} \left\| \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{M-1} F(z W_M^{-l}) H(z W_R^k W_M^{-l}) \right\|^2 \quad (5.4)$$

$E_1$  קשורה לאנרגיית עוות ההתחזות, וכאשר  $E_1 \rightarrow 0$  ההתחזות מבוטלת במוצא המערכת ("aliasing free").

$$E_2 \triangleq \left\| z^{-n_0} - \frac{1}{M \cdot R} \sum_{l=0}^{M-1} F(z W_M^{-l}) H(z W_M^{-l}) \right\|^2 \quad (5.5)$$

$E_2$  מתארת את השגיאה הרבועית ביחס לתמסורת היחידה, וכאשר  $E_1 \rightarrow 0$  ו- $E_2 \rightarrow 0$  (ובהעדר כימות) מתקיים  $\|\tilde{X}(z) - z^{-n_0} X(z)\| \rightarrow 0$ .

שני גורמי העוות הנוספים הם תוצאה של פעולת הכימות:

$$E_3 \triangleq \frac{1}{M^2} \sum_{l=0}^{M-1} \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{2\pi l}{M} - \frac{\pi}{M}}^{\frac{2\pi l}{M} + \frac{\pi}{M}} S_{vl}(e^{j\omega R} W_M^{-lR}) \left| F(e^{j\omega} W_M^{-l}) \right|^2 d\omega \quad (5.6)$$



$E_3$  היא סכום הספקי הרעש ה"פנים-פסי", כלומר: בכל פס תדר מסוכם הספק הרעש הנובע מהכימות בפס זה בלבד.

$$E_4 \triangleq \frac{1}{M^2} \sum_{l=0}^{M-1} \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{2\pi l}{M} - \frac{\pi}{M}}^{\frac{2\pi l}{M} + \frac{\pi}{M}} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{M-1} S_k(e^{j\omega R} W_M^{-kR}) \left| F(e^{j\omega} W_M^{-k}) \right|^2 d\omega \quad (5.7)$$

$E_4$  היא סכום הספקי הרעש ה"חוץ פסי", כלומר: הספק רעש הכימות הזולג מהפס המקורי שבו נוצר לפסים אחרים.

הערות:

- א. להשוואה בת-משמעות בין מידות העוות השונות, יש לחלק (לנרמל) את  $E_3, E_4$  בהספק האות  $x(n)$ .
- ב. ניתן להכליל בנקל את שיטת התכנון ע"י הצבת פונקצית משקל אי-שלילית (חיובית על פני קבוצה בת מידה הגדולה מאפס) בתוך האנטגרלים. לצורך הפשטות בחרנו במשקל קבוע (יחידה).

### 5.2.2 הגדרת פונקצית המחיר לתכנון החלונות

נדרש לעצב את תגובת התדר של חלונות הסנטזה והאנליזה, באופן שמתקבלת הפרדה טובה בין פסי התדר, וממוזערת מידת החפיפה בין הפסים השונים. במערך האנליזה, ההפרדה נדרשת כדי למצות את היתרונות של קדוד בפסי תדר (המתוארים בפרק 3). במערך הסנטזה, ההפרדה נחוצה להפחתת עוצמת רעש הכימות הנקלט ע"י האוזן (ראה פרק 4, סעיף 4.7). הגישה הנוחה לממש דרישה זו היא ע"י הוספת איבר היחסי לאנרגיית אונות הצד של תגובת התדר לפונקצית המחיר.

מפרט מסנני האנליזה והסנטזה האידיאליים הוא:

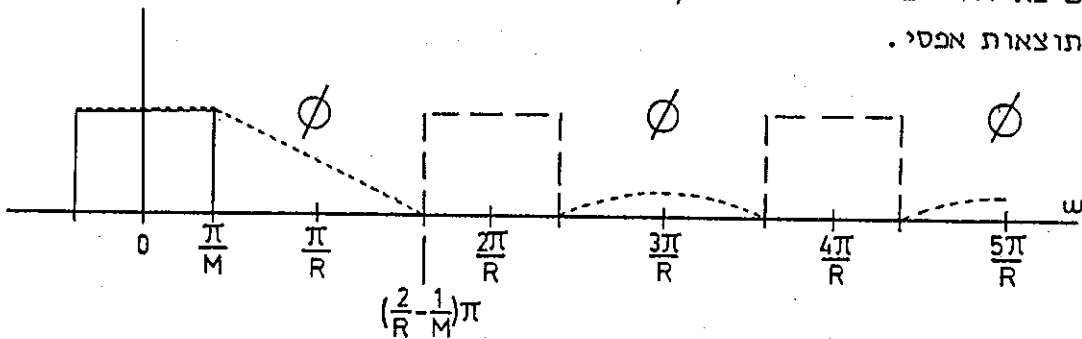
$$H_{\text{ideal}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} M, & 0 < |\omega| < \pi/M \\ 0, & \pi/M < |\omega| < \pi \end{cases} \quad (5.8)$$

$$F_{\text{ideal}}(e^{j\omega}) = \begin{cases} M, & 0 < |\omega| < \frac{\pi}{M} \\ 0, & \frac{2\pi k}{R} - \frac{\pi}{M} < |\omega| < \frac{2\pi k}{R} + \frac{\pi}{M}, \\ \infty, & \frac{2\pi(k-1)}{R} + \frac{\pi}{M} < |\omega| < \frac{2\pi k}{R} - \frac{\pi}{M}, \end{cases}$$

$k=1, 2, \dots, R/2$

כאשר יחס הדצימציה אינו גדול ממימד ההתמרה ( $R \leq M$ ), ובתחום המסומן ב- $\Phi$  ערכה של תגובת התדר חסר חשיבות (בתנאי שהוא חסום).

תגובות תדר אידאליות אלו מתוארות כציור 5.2. חלון האנליזה מבצע הפרדה מושלמת לפסי תדר, וחלון הסנטזה משחזר באופן מושלם את אותות פסי התדר לאחר האנטרפולציה. לצורך הפשטות נניח שיש לאפס את תגובת התדר  $F$  גם באיזורי  $\Phi$  המתאימים ל- $k=2, \dots, R/2$ . מדוגמות תכנון מסתבר שההבדל בתוצאות אפסי.



— Analysis window response  $|H(e^{j\omega})|$

--- Analysis window shifted images

..... Synthesis window response  $|F(e^{j\omega})|$

$\Phi$  Don't care regions

ציור 5.2 - תגובות התדר האידאליות של חלונות האנליזה והסנטזה

Fig 5.2 - Ideal Frequency responses of the analysis/synthesis windows

נגדיר את אנרגיית אונות הצד של המסננים ע"י:

$$E_5 \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_5(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (5.9)$$

$$E_6 \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_6(e^{j\omega}) |F(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

$$Q_5(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & , \quad |\omega| < \pi/M \\ 1 & , \quad \pi/M < |\omega| < \pi \end{cases}$$

$$Q_6(e^{j\omega}) = \begin{cases} 0 & , \quad |\omega| < \frac{2\pi}{R} - \frac{\pi}{M} \\ 1 & , \quad \frac{2\pi}{R} - \frac{\pi}{M} < |\omega| < \pi \end{cases}$$

נגדיר פונקצית מחיר:

$$\tilde{D} \triangleq \sum_{i=1}^6 c_i E_i, \quad c_2=1 \quad (5.10)$$

כאשר:

- $E_1$  מתארת את עוצמת עוות ההתחזות בתדר (aliasing),
- $E_2$  היא השגיאה הרבועית כלפי תמסורת היחידה,
- $E_3$  הוא הספק הרעש הפנים פסי,
- $E_4$  הוא הספק הרעש החוץ פסי,
- $E_5$  ו- $E_6$  הן אנרגיות אונות הצד של חלונות האנליזה והסנטזה בהתאמה.

בהנתן חלון אנליזה, חלון הסנטזה יחושב ע"י מזעורה של  $\tilde{D}$ . קבועי המשקל נבחרים כממשיים אי-שליליים, ומאפשרים שליטה על משקלם של הגורמים השונים בפונקצית המחיר. לא ניתן לקבוע  $c_2=0$  מכיוון שניתן להביא את  $\tilde{D}$  טריוויאלית לאפס במקרה זה, ע"י בחירת חלון סנטזה שמקדמיו אפסים. הגורם  $E_5$  אינו תלוי בחלון הסנטזה, ואינו משפיע על חשוב החלון, אך הכללתו בפונקצית המחיר הכרחית לצורך נסוח תכונת ההתכנסות של האלגוריתם האיטרטיבי (טענה 5.2, תובא בהמשך).

לחלופין, בהנתן חלון סנטזה, חלון האנליזה יחושב ע"י מזעור של  $\tilde{D}$ . במקרה זה - הגורמים  $E_3$ ,  $E_4$  ו- $E_6$  אינם תלויים בחלון האנליזה ואינם משפיעים על חשוב החלון, כפי שנובע מהמודל האדיטיבי של רעש הכימות.

5.3 תכנון מסנני אנליזה וסנטזה

5.3.1 נוסחות לתכנון המסננים

א. תכנון חלון האנליזה בחנתן חלון הסנטזה:

החלון מחושב ע"י מזעור פונקציית המחיר  $\bar{D}$ . לפי הגדרה (5.10) ונספח ג',  $\bar{D}$  ניתנת לבטוי כתבנית רבועית אי-שלילית:

$$\bar{D} = 1 - 2\bar{h}^T \bar{q} + \bar{h}^T \bar{Q} \bar{h} + \{\text{איברים שאינם תלויים ב-}\bar{h}\} \quad (5.11)$$

$$\bar{Q} = c_1 \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + c_5 Q_5 \quad \text{כאשר:}$$

בטויים לוקטור  $\bar{q}$  ולמטריצות האי-שליליות  $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2, Q_5$  מפותחים ומוצגים בנספח ג'. ע"י מזעור התבנית הרבועית ביחס למקדמי חלון האנליזה, מתקבלת מערכת משוואות לינאריות לחשוב חלון האנליזה האופטימלי:

$$\bar{Q} \bar{h}_{opt} = \bar{q} \quad (5.12)$$

הדיון ביחידות הפתרון ידחה להמשך.

ב. תכנון חלון הסנטזה בחנתן חלון האנליזה

החלון מחושב ע"י מזעור פונקציית המחיר  $\bar{D}$ . לפי הגדרה (5.10) ונספח ג',  $\bar{D}$  ניתנת לבטוי כתבנית רבועית אי-שלילית:

$$\bar{D} = 1 - 2\bar{f}^T \bar{q} + \bar{f}^T \bar{Q} \bar{f} + \{\text{איבר שאינו תלוי ב-}\bar{f}\} \quad (5.13)$$

$$\bar{Q} = c_1 Q_1 + Q_2 + c_3 Q_3 + c_4 Q_4 + c_6 Q_6 \quad \text{כאשר:}$$

בטויים לוקטור  $\bar{q}$  ולמטריצות האי-שליליות  $Q_1-Q_4, Q_6$  מפותחים ומוצגים בנספח ג'. ע"י מזעור התבנית הרבועית ביחס למקדמי חלון הסנטזה, מתקבלת מערכת משוואות לינאריות לחשוב חלון הסנטזה האופטימלי:

$$\bar{Q} \bar{f}_{opt} = \bar{q} \quad (5.14)$$

ג. תכנון חלונות סימטריים

מסננים סימטריים בעלי תגובת הلم סופית הם בעלי פזה לינארית, ומערך המסננים במקרה זה אינו יוצר עוות פזה. פרט ליתרון זה, חלונות סימטריים מקטינים את סדר מערכת המשוואות הלינארית שאותה יש לפתור לחשוב המסנן האופטימלי - למחצית, ובכך מקטינים מהותית את סבוכיות אלגוריתם התכנון.

בהנתן חלון אנליזה סימטרי, חלון הסנטזה המחושב לפי משוואה (5.14) מתקבל כחלון סימטרי. בהנתן חלון סנטזה סימטרי, פתרון משוואה (5.12) הוא חלון אנליזה סימטרי. הסבר לתכונה זו ומשוואות התכנון נתונים בנספח ג'.

5.3.2 דיון ברעש כימות לבן

אם מספר רמות הייצוג של ה-quantizer בפס תדר מסוים גבוה, לאות השגיאה תכונות סטטיסטיות הדומות לתכונות רעש לבן [16].

נניח שתהליכי הרעש בכל הערוצים הם בעלי ספקטרום הספק שטוח:

$$S_k(e^{j\omega}) = \eta_k^2 \text{ (constant) }, k=0, \dots, M-1 \quad (5.15)$$

הקצאת הסיביות האופטימלית לכימות פסי התדר מביאה לשונות רעש אחידה בכל הפסים [16]:  $\eta_k^2 = \eta^2, k=0, \dots, M-1$ . מתוך משוואה (5.7) מסיקים שהקטנת הרעש החוץ-פסי שקולה להקטנת אנרגיית אונות הצד של חלון הסנטזה בתחום התדר:

$$E_4 \triangleq \frac{1}{M^2} \sum_{l=0}^{M-1} \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{2\pi l}{M} - \frac{\pi}{M}}^{\frac{2\pi l}{M} + \frac{\pi}{M}} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq l}}^{M-1} \eta_k^2 \left| F(e^{j\omega} W_M^{-k}) \right|^2 d\omega, \quad (5.16)$$

$$\eta_k^2 = \eta^2, k=0, \dots, M-1$$

ואילו על הרעש הפנים-פסי אין כל שליטה, כפי שמסיקים ממשוואה (5.6), פרט להקטנת אמפליטודת האות והרעש גם יחד.

אם הקצאת הסיביות מכוונת לצביעה כלשהיא של הרעש, כלומר - שונות הרעש (הלבן)  $\mu_k^2$  בכל פס תדר אינה אחידה, אזי אין טעם "לתקן" את ספקטרום הרעש דרך מסנן הסנטזה, וגם במקרה זה נותר רק להקטין ככל האפשר את עוצמת תגובת התדר של המסנן מחוץ לפס ההעברה.

במערכת קדוד לקצב שדור בינוני וגבוה (16Kbits/sec ומעלה), מרבית פסי התדר מקבלים הקצאת סיביות "עשירה", ואות הרעש קרוב בתכונותיו למודל הרעש הלבן. עפ"י הנתוח התאורטי לעיל מסיקים שאין תועלת בהכללת רכיב הספק רעש הכימות הפנים-פסי,  $E_3$ , בקריטריון השגיאה המשמש לתכנון חלונות אופטימליים. הקטנת עוצמת רכיב הרעש ההרסני - הרעש החוץ-פסי,  $E_4$ , שקולה להנחתת תגובת התדר של חלון הסנטזה בתחום אונות הצד, המבוצעת ע"י הכללת גורם אנרגית אונות הצד  $E_6$  (משוואה 5.9) בפונקצית המחיר. בהמשך ננקוט בגישה הבאה: נגדיר קריטריון עוות דטרמיניסטי, שאינו כולל את האיברים התלויים בסטטיסטיקת הרעש.

קריטריון העוות הדטרמיניסטי מגדר ע"י הצבת  $c_3 = c_4 = 0$  (קבועי השקלול של אברי הספק הרעש,  $E_3, E_4$ ) בקריטריון העוות (5.10). מתקבל:

$$D \stackrel{\Delta}{=} c_1 E_1 + E_2 + c_5 E_5 + c_6 E_6 \quad (5.17)$$

בהנתן חלון הסנטזה, חלון האנליזה יחושב ע"י פתרון המשוואה הבאה, המתקבלת מתוך (5.13), (5.14) ע"י הצבת  $c_3 = c_4 = 0$ :

$$Q \underline{f}_{opt} = \underline{q} \quad (5.18)$$

$$Q = c_1 Q_1 + Q_2 + c_6 Q_6$$

בטויים לוקטור  $\underline{q}$  ולמטריצות  $Q_1, Q_2, Q_6$  נתונים בנספח ג'.

חלון האנליזה האופטימלי, שעפ"י המודל אינו תלוי ברעש, מחושב ע"י פתרון מערכת המשוואות (5.11), (5.12).

5.4 אלגוריתם לתכנון איטרטיבי

5.4.1 תאור האלגוריתם איטרטיבי

חלון האנליזה וחלון הסנטזה מתוכננים בשיטה איטרטיבית המתכנסת למינימום מקומי של מדד העוות  $D$  (משוואה (5.17)), לפי גישה דומה לזו המוצעת ב-[1].

תאור האלגוריתם:

(1) אתחול: יהיו  $\underline{f}^{(0)}$  חלון סנטזה נתון (תנאי התחלה), ו- $0 \leq \epsilon$  קבוע סף. קבע  $k=1, D^{(0)} = \infty$ .

(2) בהנתן  $\underline{f}^{(k-1)}$ , חלון האנליזה  $\underline{h}^{(k)}$  יחושב ע"י פתרון משוואה (5.12):

$$\bar{Q} \underline{h}^{(k)} = \bar{q}$$

(3) בהנתן  $\underline{h}^{(k)}$ , חלון הסנטזה  $\underline{f}^{(k)}$  יחושב ע"י פתרון משוואה (5.18):

$$Q \underline{f}^{(k)} = q$$

(4) חשב את השגיאה  $D^{(k)}$  לפי משוואה (5.17).

אם  $\epsilon \leq (D^{(k-1)} - D^{(k)}) / D^{(k)}$  עבור ל-(5). אחרת  $k \leftarrow k+1$ , חזור ל-(2).

(5) בצע נרמול של החלונות  $\underline{f}^{(k)}, \underline{h}^{(k)}$  (מוסבר בהמשך). עצור.

פעולות הנרמול (סעיף 5 באלגוריתם):

א. הגורמים  $E_1, E_5, E_6$  (עוות ה-aliasing, אנרגיית אונות הצד של חלון האנליזה ושל חלון הסנטזה) כפונקצית המחיר (5.12) מנחתים עם הקטנת אמפליטודת החלונות. לפיכך, עם הגדלת משקל גורמים אלו בפונקצית המחיר, ע"י הגדלת  $c_1, c_5, c_6$ , מנחתת אמפליטודת החלון, ואמפליטודת אות הדבור המשוחזר. על מנת לשמור על עוצמת האות, נכפול את חלון הסנטזה  $\underline{f}^{(k)}$  המתקבל בסיום האיטרציות בקבוע  $c_0$ , שיביא למינימום את השגיאה הרבועית כלפי תמסורת היחידה.

ב. משקולי יעילות ממוש המקודד באריתמטיקה מסוג fixed-point, נחלק את חלון האנליזה  $\underline{h}$  בקבוע  $c_h$  כך שהדגם המקסימלי של החלון (בערך מוחלט) ישווה ל-1, ואת חלון הסנטזה נכפול בקבוע  $c_h$ .

השגיאה הרבועית הממוצעת ניתנת ע"י (ראה (5.5):

$$E_2(c) = \left\| z^{-n_0} - \frac{c}{MR} \sum_{l=0}^{M-1} F^{(k)}(z W_M^{-1}) H^{(k)}(z W_M^{-1}) \right\|^2 \quad (5.19)$$

נבחר את  $c_0$  כקבוע הממזער את השגיאה הרבועית:

$$c_0 = \arg(\min_c E_2(c))$$

בטוי ל- $c_0$  בתלות במקדמי החלונות מפותח בנספח ג'. שלב א בנרמול יבוצע ע"י:

$$\underline{f}^{(k)} \leftarrow c_0 \underline{f}^{(k)} \quad (5.20)$$

$$c_h = \max_n |h^{(k)}(n)| \quad \text{נגדיר:}$$

שלב ב בנרמול יבוצע ע"י:

$$\underline{h}^{(k)} \leftarrow \frac{1}{c_h} \underline{h}^{(k)}, \quad \underline{f}^{(k)} \leftarrow c_h \underline{f}^{(k)} \quad (5.21)$$

ממוש האלגוריתם ללא אלוץ על אנרגית אונות הצד

אם  $c_5=c_6=0$ , פונקציית המחיר D (משוואה (5.17)) אינה תלויה באברי אנרגית אונות הצד של החלונות, וכוללת את האיברים  $E_1 + E_2$  בלבד (עוות ה-aliasing והשגיאה הרבועית כלפי תמסורת היחידה). עבור מקרה זה, נצפתה במהלך הסמולציות התופעה הבאה: האלגוריתם הממומש במחשב נוטה להתבדר, כך שאמפליטודת אחד החלונות  $h(n)$  או  $f(n)$  הולכת ועולה במהלך האיטרציות, אולם הסדרה  $\{h(n) \cdot f(n)\}$  חסומה. התבדרות זו מתקיימת מכיוון שהאיברים  $E_1, E_2$  תלויים במכפלות המקדמים של  $h(n)$  במקדמים של  $f(n)$ , ולא במקדמי כל חלון בנפרד. למניעת ההתבדרות, ננקוט בפעולה הבאה:

בסיום שלב (3) של האלגוריתם האיטרטיבי, נגדיר:

$$c_h = \max_n |h^{(k)}(n)|, \quad \text{ונבצע את הנרמול:}$$

$$\underline{h}^{(k)} \leftarrow \frac{1}{c_h} \underline{h}^{(k)}, \quad \underline{f}^{(k)} \leftarrow c_h \underline{f}^{(k)} \quad (5.22)$$

אם  $c_5, c_6 > 0$ , פונקציית המחיר כוללת אברי "קנט" התלויים באמפליטודת כל חלון בנפרד, וההתבדרות נמנעת.



תנאי התחלה לאלגוריתם

ניתן לבצע את החשוב האיטרטיבי כאשר נתון חלון סנטיזה התחלתי, ולחלופין - חלון אנליזה התחלתי. התוצאות אינן זהות בשני המקרים, משום שהאלגוריתם מתכנס למינימום מקומי של פונקצית המחיר, התלוי בתנאי ההתחלה (דוגמה והמלצה תובא בהמשך).

התכנסות האלגוריתם ויחידות הסדרה האיטרטיבית

5.1 טענה

יהי  $\underline{f}^{(0)}$  תנאי התחלה (שונה מאפס), ו-  $c_1, c_5, c_6$  קבועים המקיימים:  $c_1 \geq 0, c_5 > 0, c_6 > 0$ . אזי - סדרת החלונות  $\{\underline{h}^{(k)}, \underline{f}^{(k)}\}$  יחידה. במילים אחרות, מערכת המשוואות הלינאריות ככל שלב של האלגוריתם אינה סגולרית.

הגדרות

נקודה סטנציונרית של פונקצית העוות  $D(\underline{h}, \underline{f})$  היא נקודה  $\underline{h}, \underline{f}$  שבה וקטור הגרדיאנט מתאפס:

$$\frac{\partial D}{\partial \underline{h}} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial \underline{f}} = 0$$

נקודת שבת (fixed point) של האלגוריתם האיטרטיבי היא נקודה  $\underline{h}^{(k)}, \underline{f}^{(k)}$  שאינה משתנה מאיטרציה לאיטרציה, כלומר:

$$\underline{h}^{(k+1)} = \underline{h}^{(k)}, \quad \underline{f}^{(k+1)} = \underline{f}^{(k)}, \quad l=1,2,3,\dots$$

נקודה יציבה (stable point) של האלגוריתם האיטרטיבי היא נקודת שבת  $\underline{h}^{(k)}, \underline{f}^{(k)}$  אשר קיימת סביבה שלה, כך שמכל תנאי התחלה המוכל בסביבה האלגוריתם מתכנס ל-  $\underline{h}^{(k)}, \underline{f}^{(k)}$ .

5.2 טענה

- בתנאים של טענה 5.1 מתקיים:
- א. פונקצית העוות  $D^{(k)}$  יורדת מונוטונית מאיטרציה לאיטרציה, ונותרת קבועה אם-ורק-אם האלגוריתם הגיע לנקודת שבת.
  - ב. כל נקודת שבת של האלגוריתם היא נקודה סטציונרית של  $D$ , וכל נקודה יציבה היא מינימום מקומי של  $D$ .

טענה 5.2 לעיל מנוסחת באופן דומה ל-[1, Theorem 2]. שתי הטענות מוכחות בנספח ד'.

סעיף זה מתאר דוגמת תכנון ע"י האלגוריתם האיטרטיבי. מסנני האנליזה והסנטזה המוצגים להלן, משמשים למוש מקודד בפסי תדר בקצב 16Kbits/sec, המתואר בפרק 6.

הפרמטרים הנדרשים לתהליך התכנון הם:

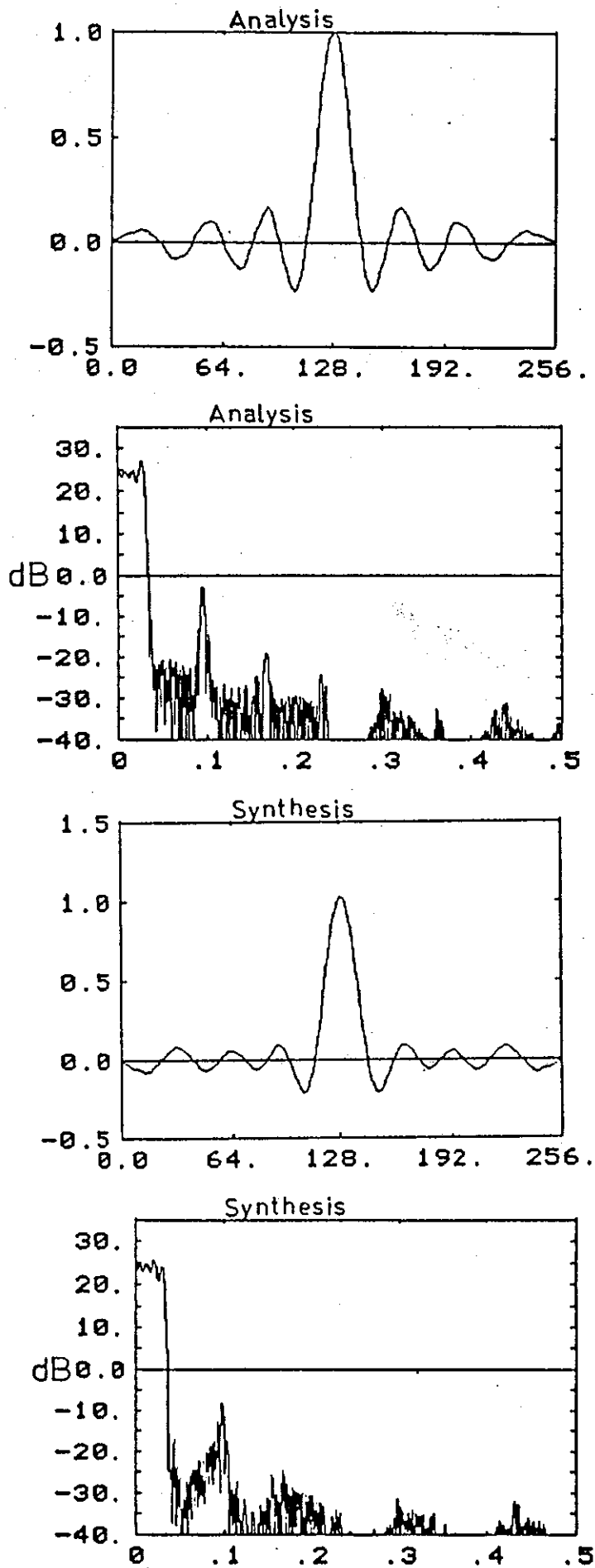
1. מימד ההתמרה (מספר פסי התדר הקומפלקסיים) -  $M$ , ויחס הדצימציה -  $R$ .
2. אורך החלונות. לצורך פשטות משוואות התכנון, שני החלונות שווים באורכם, והאורך  $L$  הוא כפולה שלמה של מימד ההתמרה  $M$  (ראה נספח ג').
3. חלון סנטזה (או חלון אנליזה) המשמש כתנאי התחלה.
4. קבועי המשקל של פונקצית המחיר:
  - $c_1 =$  קבוע המשקל לעוות ההתחזות (aliasing).
  - $c_5 =$  קבוע המשקל לאונות הצד של חלון האנליזה.
  - $c_6 =$  קבוע המשקל לאונות הצד של חלון הסנטזה.

נסיונות לתכנן חלונות למערכת קדוד הפועלת בקצב הקריטי  $(M=R)$ , לא עלו יפה: מערכת אנליזה וסנטזה בעלת עוות נמוך אינה מפרידה באופן מספק בין פסי התדר, וחלונות בעלי הפרדה טובה גורמים לעוות נכר באות המוצא. ירידה ליחס דצימציה נמוך במעט ממימד ההתמרה מאפשרת תכנון מערך מסננים בעל איכות גבוהה. דוגמת התכנון שלהלן, מציגה חלונות אנליזה וסנטזה עבור מערך מסננים בעל  $M=16$  פסים, ויחס דצימציה  $R=15$ . תוצאות טובות מתקבלות עבור חלונות באורך  $L=256$  דגמים.

קבועי המשקל נקבעים ע"י מספר נסיונות, עפ"י הדרישות הבאות: הפרדה טובה בין פסי התדר, שגיאת שחזור נמוכה בהעדר קדוד, ואיכות טובה בבדיקות סמולציה, בשלוב קדוד.

תנאי התחלה מתאים, התקבל באופן נסיוני, בדרך הבאה: תחילה נתון מסנן מעביר נמוכים סימטרי, בעל רוחב הפס הנדרש, שתוכנן בשיטה מקובלת, כגון אלגוריתם Remez Exchange [28, chap.5]. מסנן זה משמש כתנאי התחלה לתכנון חלונות בעלי אונות צד נמוכות בתחום התדר ( $c_1=1, c_5=1000$ ), חלון האנליזה או הסנטזה (הסימטרי) המחושב ע"י האלגוריתם,  $(c_6=1000)$ . משמש כתנאי התחלה.

לאחר קביעת תנאי ההתחלה, מחושבים החלונות האופטימליים. ציור 5.3 מתאר את חלונות האנליזה והסנטזה, עבור  $c_1=10, c_5=10, c_6=20$ . באופן נסיוני, התקבלו תוצאות עדיפות, כאשר תנאי ההתחלה משמש כחלון סנטזה, ולא כחלון אנליזה.



ציור 5.3 - תגובות ההלם והתדר של החלונות האופטימליים

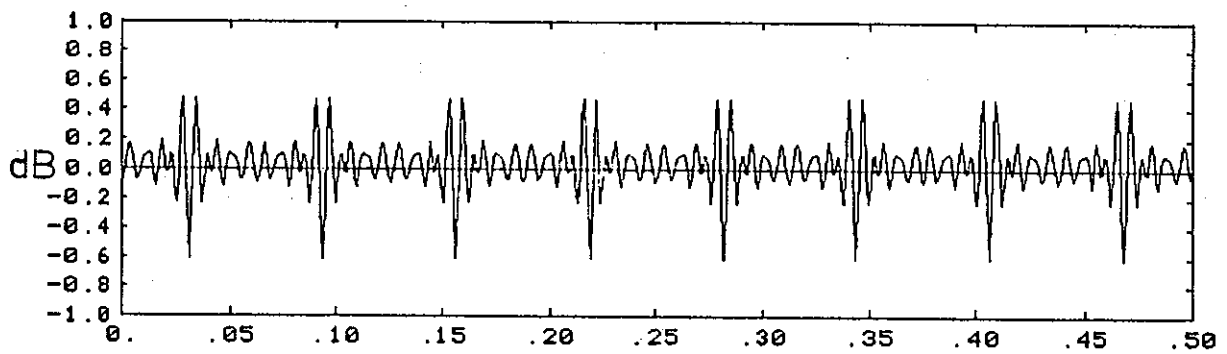
Fig 5.3 - Impulse and frequency responses of the optimal windows.

פונקצית התמסורת של מערכת האנליזה והסנטזה כולה אינה ניתנת להגדרה במובן המקובל, משום שרכיב עוות ההתחזות באות היציאה, התלוי בזמן, אינו מתבטל לחלוטין. אם נניח שרכיב ההתחזות זניח, ניתן להגדיר את פונקצית התמסורת ע"י (ראה סעיף 5.2.1):

$$\bar{X}(z)/X(z) \cong T(z) \triangleq \frac{1}{MR} \sum_{l=0}^{M-1} H(z W_M^{-l}) F(z W_M^{-l}), \quad (5.23)$$

$$W_M = e^{j2\pi/M}$$

ציור 5.4 מתאר את תגובת התדר  $T(e^{j\omega})$ , עבור המסננים המתוארים בציור 5.3. הסטיות מההגבר הרצוי הן בתחום  $\pm 0.5\text{dB}$ , ובלתי משמעותיות במערכות קדוד דבור.



ציור 5.4 - תגובת התדר  $|T(e^{j\omega})|$

Fig 5.4 - Frequency response of  $|T(e^{j\omega})|$

פרק 6 - מקודדי אותות דבור בפסי תדר - המלצות לממוש

=====

6.1 הקדמה

בפרק הקודם הוצגה שיטת תכנון חלונות עבור מערך המסננים האחיד המשמש במערכת קדוד בפסי תדר. להערכת בצועי המערכת, בוצעה סמולצית מחשב של מקודד אותות דבור, ונערכו השוואות עם מערכת קדוד המבוססת על מערך QMF, שהיא מערכת מקובלת לשדור אותות דבור בקצב בינוני ובאיכות גבוהה.

לשדור בקצב 16Kbits/sec פותחה מערכת הכוללת כימות סקלרי מסתגל (gain adaptive scalar quantization) והקצאת סיביות דינמית לאותות פסי התדר. המערכת משיגה איכות גבוהה, ובסבוכיות ממוש נמוכה ביחס למקודדים אחרים בפסי תדר, המשיגים איכות דומה.

פרק 6 מתאר את מבנה מערכת הקדוד על כל מרכיביה, ומביא המלצות לממושה בזמן אמת. בנוסף, מובאות השוואות בין המערכת המומלצת למערכות קדוד דבור בפסי תדר המוצגות בספרות.

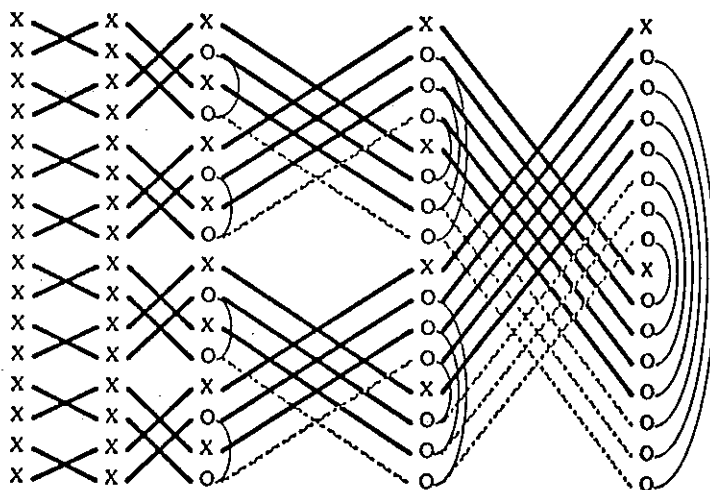
מקודד אותות דבור בקצב שדור 16Kbits/sec 6.2

מערכת הקדוד מבוססת על מערך מסננים אחיד, בשלוב החלונות המוצגים בפרק 5. אותות פסי התדר מקודדים ע"י כימות סקלרי בעל הגבר מסתגל (gain adaptive), והקצאת סיביות דינמית. תחילה יתואר מערך המסננים, ולאחר מכן סכימת הכימות ואלגוריתם הקצאת סיביות.

א. מערכי אנליזה-סנטזה

המערכת היא בת  $M=16$  פסי תדר קומפלקסיים (באופן שקול, 9 פסי תדר ממשיים - ראה פרק 3, סעיף 3.3), ודצימציה ביחס  $R=15$ . בצועי מערכת בת 8 פסים קומפלקסיים הם גרועים, ובצועי מערכת בת 32 פסים משתפרים במדה מועטה, שאינה מצדיקה את העלייה בסבוכיות הממוש.

ממוש מערכי האנליזה והסנטזה הוא בשיטת WOLA (ראה פרק 2, סעיף 2.2), עם החלונות המוצגים בסעיף 5.3.3. הממוש כולל חשוב FFT של סדרה ממשית באורך 16, ו- IFFT שתוצאתו סדרה ממשית באורך 16. חשוב ה-FFT מבוצע ע"י האלגוריתם הידוע Decimation in Time [28, chap.6], כאשר פעולות רבות הופכות למיותרות בהתחשב בכך שסדרת הכניסה ממשית. ציור 6.1 מדגים את היתירות (redundancy) הרבה שבאלגוריתם המקובל, עם הפעלתו על סדרה ממשית. לאחר הסרת הפעולות המיותרות באלגוריתם, מבוצע FFT של סדרה ממשית באורך 16 בעזרת 62 פעולות חבור ממשיות ו-12 פעולות כפל ממשיות (כפל ב-1 אינו נחשב) [29], ולממוש האלגוריתם יש לאגור 3 קבועים ממשיים:  $\sin \pi/8$ ,  $\cos \pi/8$ ,  $\cos \pi/4$ . באופן דומה, מחושב ה- IFFT, ע"י האלגוריתם Decimation in Frequency [28, chap.6].



A length-16 radix-2 FFT. The symbol X indicates a real value, and O indicates a complex value. Arcs show complex values that are conjugates of each other. Only the butterflies drawn in solid lines need be computed.[29]

ציור 6.1 - אלגוריתם FFT לסדרה ממשית

Fig 6.1 - Real valued FFT algorithm

ב. כימות סקלרי של פסי התדר

הכימות המוצע הינו מסתגל הגבר (gain adaptive), וניתן לנקוט בשתי גישות לממוש:

(1) הגבר מסתגל קדמי [16, chap.4] דגמי האות בכל פס תדר מקובצים לקבוצות בנות K דגמים, ולכל קבוצה משוערכת סטיית התקן,  $\hat{\sigma}$ , סטיית התקן משודרת כמידע צד (side information) מהמסדר למקלט, ומשמשת לקביעת גודל צעד הכימות ולהקצאת הסיביות, הן במסדר והן במקלט. K הדגמים בכל פס תדר מקודדים ע"י כימות סקלרי אחיד (uniform quantizer).

(2) הגבר מסתגל אחורי [16, chap.4] גודל צעד הכימות נקבע רקורסיבית על סמך הדגמים (המקודדים) הקודמים, ונמנע הצורך בשדור ההגבר למקלט.

מהסמולציות מסתבר שבצועי המערכת בעלת הגבר מסתגל קדמי עולים על בצועי המערכת האחורית (עבור קצב שידור כולל זהה): יחס האות לרעש גבוה בכ-2dB, והעוות הנשמע לאוזן מוחלש. קודד האותות ע"י ADPCM [16, chap.6] לא עלה בטיבו על קודד בעל הגבר אחורי ללא חזוי, וההסבר לכך טמון במידת הקורלציה הנמוכה שבין דגמי אות פס התדר.

לצורך הקודד מופרדים הרכיבים הממשיים והמדומים בכל פס תדר קומפלקסי לשני ערוצים ממשיים, ויש לקודד 16 אותות ערוצים ממשיים (ראה פרק 3, סעיף 3.3). במערכת המומלצת, דגמי האות בכל אחד מ-16 הערוצים נאספים לקבוצות בנות K=16 דגמים. לכל קבוצה משוערכת סטיית התקן  $\hat{\sigma}$ , המשמשת בסיס לקביעת גודל צעד הכימות. הכימות מבוצע ע"י uniform quantizer, אופטימלי לפלוג גאוס [16, chap.4].

סטיית התקן משוערכת כשורש הממוצע הרבועי של הדגמים, ומקודדת ע"י כימות לוגריתמי (כימות לינארי של לוגריתם סטיית התקן) ב-4 סיביות ע"י האלגוריתם הבא:

$$\sigma = \left[ \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{16} X^2(i) \right]^{1/2} \quad (1)$$

$$\tilde{I}(\sigma) = \left\lfloor \text{scale} \cdot \log_2(\sigma/g_{\min}) \right\rfloor \quad (2)$$

כאשר [ . ] מציין ערך שלם תחתון.

$$I(\sigma) = \min\{\max\{\tilde{I}(\sigma), 0\}, 15\} \quad (3)$$

$I(\sigma)$  הוא מידע הצד המשודר למקלט, ב-4 סיביות.

$$\hat{\sigma} = \begin{cases} g_{\min} \cdot 2^{I(\sigma)/\text{scale}} & , I(\sigma) > 0 \\ 0 & , I(\sigma) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$g_{\min}$ ,  $g_{\max}$ ,  $\text{scale}$  הם קבועים הנתונים בנפרד לכל ערוץ, ונקבעים באופן הבא:

כאשר  $\sigma_{LT}$  היא סטיית התקן המשוערכת לזמן ארוך של אות הערוץ,  $g_{\max} = 5\sigma_{LT}$

$$g_{\min} = g_{\max}/100$$

$$\text{scale} = 15/\log_2(g_{\max}/g_{\min})$$

### ג. הקצאת הסיביות הדינמית

הקצאת הסיביות קבועה עבור  $K=16$  דגמים בכל ערוץ, ומחושבת ע"י סטיית התקן המשוערכת. לצורך הקצאת הסיביות, יש לכפול את ערכי סטיית התקן של הערוצים השונים ב-2 פרט לערוצי התדר העליון והתחתון (ראה פרק 3 סעיף 3.3). לאחר הכפל, נתון וקטור סטיית התקן  $[\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2, \dots, \hat{\sigma}_{16}]$ . אלגוריתם הקצאת הסיביות לקוח מ-[17] (תוקנו שבושי דפוס), ומתואר להלן.

יהיו  $B$  מספר הסיביות הכולל לכימות אותות הערוצים.

נגדיר:

$$[u]^* = \begin{cases} 0 & , u < 0 \\ [u] & , 0 \leq u < b_{\max} \\ b_{\max} & , u \geq b_{\max} \end{cases}$$

$$D_1 = \frac{1}{M} [-B + \sum_{k=1}^M \log_2 \hat{\sigma}_k] \quad (1) \text{ חשב:}$$

$$b_k = [ \log_2 \hat{\sigma}_k - D_1 ]^* \quad (2) \text{ חשב:}$$

(3) נגדיר את הקבוצה  $S^+$  כקבוצת הערוצים שקבלו הקצאת סיביות חיובית בשלב (2), ונסמן ב- $M^+$  את מספר האיברים שלה:

$$S^+ = \{k \text{ such that } b_k > 0\}$$



$$D_2 = D_1 + \frac{1}{M^+} [-B + \sum_{k \in S^+} b_k] \quad \text{חשב:}$$

$$b_k = \lfloor \log_2 \hat{\sigma}_k - D_2 \rfloor * \quad \text{חשב: (4)}$$

(5) אם סכום הסיביות המוקצות גבוה מ-B הפחת את ההקצאה מערוצים שקבלו את ההקצאה הגבוהה ביותר, ואם הסכום נמוך מ-B הוסף לערוצים שקבלו הקצאת סיבית בודדת - כך שההקצאה הכוללת תהייה בת B סיביות.

כאופן נסיוני נמצא שדי בהקצאה מירבית בת  $b_{\max}=6$  סיביות לערוץ.

לשדור בקצב 16Kbits/sec, וכאשר אות הדבור דגום בקצב 8KHz, לרשותנו 30 סיביות לכימות M=16 ערוצים בכל נקודת זמן (עפ"י יחס הדצימציה, R=15). בכל ערוץ משודר ההגבר ב-4 סיביות, אחת ל-16 דגמים. נותרו B=28 סיביות לכימות M הערוצים, בכל נקודת זמן.

6.3 השוואה בין מקודדים

לצורך השוואה, מומשה בסמולציה מערכת קודד בפסי תדר, הכוללת מערך QMF בן 8 פסים, וסכימת כימות דומה לזו ששולבה במערך המסננים האידיים.

מערך ה-QMF ממומש במבנה עץ, ע"י מסננים באורך 32 דגמים. מסננים קצרים יותר גורמים ל-cross-talk ניכר בין פסי תדר סמוכים, ואם כי ההתחזות (aliasing) מתבטלת בהעדר כימות, הרי בנוכחות הקודד נגרמת ירידה משמעותית באיכות (ראה פרק 4, סעיף 4.7).

בשדור בקצב 16Kbits/sec, שני המקודדים משיגים איכות דומה-וברמה טובה מאד, כאשר ההפרעה העקרית בשניהם היא צרידות קלה מאד. במדידות יחס אות לרעש, למקודד ה-QMF עדיפות קלה, כמתואר בטבלה 6.1.

טבלה 6.1 - השוואת יחס אות לרעש בין מקודדים בפסי תדר  
 Table 6.1 - SNR comparison between sub-band coders

SNR, dB	SNR-SEG, dB	מקודד
18.9	19.5	מערך מסננים אחידים
19.8	20.9	Q M F

חשוב סבוכיות הממוש הוא כדלקמן:

- במערכת WOLA, נדרשות L פעולות כפל ו-(L-M) פעולות חבור לממוש האנליזה, פרט ל-FFT, כאשר L=256 הוא אורך החלון, ו-M=16 הוא מימד ההתמרה. חשוב ה-FFT מבוצע ע"י 12 פעולות כפל ו-62 פעולות חבור. סבוכיות פעולת הסנטזה זהה. עבור דצימציה ביחס R=15, נדרשות 36 פעולות כפל ו-40 פעולות חבור לדגם כניסה, לבצוע האנליזה והסנטזה.
- במערך QMF במבנה עץ, בן 8 פסים, נדרשות  $3L/2$  פעולות כפל ו- $3(L+1)/2$  פעולות חבור לממוש האנליזה [6], כאשר L=32 הוא אורך המסנן (הסימטרי). לבצוע האנליזה והסנטזה, נדרשות 96 פעולות כפל ו-102 פעולות חבור לדגם כניסה.

מערכי מסננים במבנים נוספים הם: מערך QMF במבנה מקבילי [7], ומערכי מסננים אחידים בעלי פסי תדר ממשיים [12],[13],[14], המתבססים על התמרת סינוס/קוסינוס, ובהם מתבטלת ההתחזות בהעדר קודד. דוגמאות למערכי QMF מקביליים בעלי איכות גבוהה לשמושי קודד ובעלי סבוכיות נמוכה, לא הוצגו במאמרים המתארים אותם.

מערך המסננים האחידים המוצג ב-[12], כולל חלונות באורך 40 דגמים, 8 פסי תדר, ודורש לממושו כ-75% מפעולות הכפל וכ-150% מפעולות החבור הנדרשות לממוש מערכת WOLA. אולם, ההפרדה בין פסי תדר סמוכים אינה מספקת, ויש לצפות שידרש להגדיל את אורך החלון (החלון ב-[12] באורך 40 דגמים) על מנת להשיג איכות דומה למקודד המוצע בעבודה שלעיל. במערך המסננים המוצג ב-[14], מידת ההפרדה בין פסי התדר בברור חלשה. המערכת המתוארת ב-[13] כוללת חלונות באורך 80 דגמים, 16 פסי תדר, ודורשת לממושה 42 פעולות כפל ו-82 פעולות חבור לדגם כניסה במבנה מסובך ביחס ל-WOLA.

בשלושת המקורות [14], [13], [12] לא מתוארות תוצאות סמולציה בקודד אותות דבור, ולא מובאות השוואות למקודד QMF או מקודד אחר.

פרק 7 - סכום ומסקנות

התוצאות העקריות שעבודה זו מציגה הן:

א. יישום ובדיקת שיטת תכן מסננים סטטיסטית, שהוצעה ע"י א. דמבו [1], נתוח תאורטי של תוצאות הסמולציה, והצעה לממוש יעיל של שיטת התכנון עבור מערכות הכוללות כימות וקטורי.

ב. פתוח שיטת תכן חלונות עבור מערך המסננים האחיד, לצורך קדוד אותות דבור.

ג. פתוח מקודד אותות דבור בקצב ביניים (16Kbits/sec), המבוסס על מערך המסננים האחיד, בעל איכות גבוהה וסבוכיות ממוש נמוכה מ-QMF. כן מובא דיון מקיף באופן שלוב הכימות הסלקטי והוקטורי במערך המסננים הקומפלקסיים.

שיטת התכנון הסטטיסטית נבדקה באופן מקיף, בשני המקרים שבהם היא מטפלת: כימות סלקטי "עדין", וכימות וקטורי חסר זכרון. המסקנות הנובעות מבדיקות הסמולציה הן:

1. ניתן לתכנן בעזרת השיטה המוצעת את החלונות במערך המסננים האחידים, לצורך שמוש במערכות קדוד, אולם יש לכלול בתהליך התכנון אלוץ על תגובת התדר של מסנן הסנטזה, כך שפריד היטב בין פסי התדר.

2. הכללת סטטיסטיקת הרעש בקריטריון העוות, בתכנון מערכות קדוד בעלות כימות עדין, מניבה שפור אפסי ביחס לתכנון עפ"י קריטריון עוות "דטרמיניסטי".

3. במערכות קדוד בעלות כימות וקטורי, בקצב שדור נמוך (8Kbits/sec), שיטת התכנון המתבססת על הקריטריון הסטטיסטי - המתחשב בפעולת הכימות, מביאה לשפור בטיב הקדוד ביחס לשיטה הדטרמיניסטית, אם כי השפור מתון (פרוט ניתן בפרק 4).

בתחילת העבודה, עלתה ההצעה להרחיב את קריטריון העוות הסטטיסטי לתכנון מערך מסננים מטפוס QMF.

לאור תוצאות הסמולציה במערך המסננים האחידים, ניתן לקבוע שהצעה זו חסרת תועלת עבור הכימות ה"עדין". במערכות הכוללות כימות וקטורי, בקצב שדור נמוך, יש לצפות לשפור מסויים ביחס האות לרעש, עם הפעלת שיטת התכנון הסטטיסטי. שפור הנשמע לאוזן, לא מובטח במקרה זה, מכיוון שמסנני הסנטזה האופטימליים עפ"י הקריטריון הסטטיסטי לא יביאו לנטול ההתחזות (aliasing), שהיא מגורמי העוות העקריים.

כדי להתגבר על מגבלות שיטת התכנון הסטטיסטית, מפותח קריטריון עוות בתחום התדר, המפריד בין גורמי העוות, ומאפשר מתן משקל שונה לגורמים השונים. מתוך בדיקות בסמולציה התקבלו התוצאות הבאות:

1. שיטת התכנון אינה מאפשרת לתכנן מערך מסננים אחיד בעל איכות מספקת, בקצב הקריטי.
2. ביחס דצימציה נמוך במעט מהקריטי ( $R/M=15/16$ ), ניתן לתכנן מערך מסננים המתאים למקודד בפסי תדר בעל איכות גבוהה, ע"י קביעת משקל מתאים לגורמי העוות בקריטריון השגיאה.
3. מערכת הקדוד שפותחה משיגה איכות דומה למקודדי QMF, ובסבוכיות נמוכה יחסית. לסכום, נצביע על שני כוונני המשך למחקר עתידי:

א. קריטריון העוות שפותח, בתחום התדר, כולל התחשבות בתהליך הכימות - עפ"י מודל הרעש האדיטיבי, המתאים לכימות סקלרי "עדין". החשיבות שיש להתחשבות בכימות במקרה זה תאורטית בלבד - היא מביאה למסקנה תאורטית שהכללת רעש הכימות בקריטריון העוות היא חסרת תועלת באופן מעשי, ולא ניתן לשפר את איכות מערכת הקדוד באופן זה. ניתן להגדיר קריטריון עוות בתחום התדר, עבור מודל הכימות הוקטורי. הפרדה בין גורמי העוות, ומתן משקל גבוה למזעור הרכיבים העקריים, עשוי להניב תוצאות קדוד משופרות ביחס לתכנון עפ"י קריטריון העוות הסטטיסטי המקורי, שהוצע ע"י א. דמבו.

ב. מערכות FDHS (Frequency Domain Harmonic Scaling) [5], מבוססות על הפרדת אות הדבור לפסי תדר רבים (באופן טפוסי - 256 פסים קומפלקסיים), ע"י מערך מסננים אחיד. בשיטות תכנון ידועות, אותות פסי התדר נדגמים בקצב גבוה ביחס לקצב הקריטי [5]. בנספח ה' מוצג בסיס למחקר בנושא תכנון חלונות אופטימליים למערכות FDHS. שמוש בחלונות אלו עשוי להוריד את קצב הדגימה, ולהקטין את סבוכיות ממוש מערכות אלו.

נספח א - חשוב משוואות תכן מסנן הסנטזה עבור הכימות הוקטורי  
 =====

בפרק 4 מתוארת שיטה לתכנון מסנן הסנטזה האופטימלי אשר פותחה ב-[1]. משוואת התכנון למקרה הוקטורי - (4.26), נתונה ב"לבוש סטטיסטי". בנספח זה מפותחת גישה שקולה המתאימה למושג בתכנה. בגישה זו, אנרי מערכת המשוואות מחושבים ישירות מתוך סדרת הלמוד בלא צורך בשערוך מפורש של הסטטיסטיקה.

הצבת שערוך הסטטיסטיקה במשוואות התכנון

נפתח את משוואות התכנון עבור כימות וקטורי אנכי (B=1), ונתייחס לכימות המטריציאלי הכללי בהמשך.

נגדיר את הגדלים הבאים:

$$N_T \triangleq \{ \text{מספר הוקטורים בסדרת הלמוד} \} = \# \{ \underline{X}(sR) \} \quad (1.א)$$

$$N^{(i)} \triangleq \{ A^{(i)} \text{ מספר הוקטורים הממופים לקבוצה} \} = \# \{ \underline{X}(sR) \in A^{(i)} \}$$

$$N^{(i,j)}(d) \triangleq \# \{ \underline{X}(sR) \in A^{(i)} \cap \underline{X}((s+d)R) \in A^{(j)} \}$$

ההסתברויות P, F משוערכות מתוך תדירות ההופעה של המאורעות המתאימים על פני סדרת למוד טכוסית ו"ארוכה":

$$P^{(i)} \triangleq \text{Prob} \{ \underline{X}(sR) \in A^{(i)} \} = N^{(i)} / N_T \quad (2.א)$$

$$F^{(i,j)}(d) \triangleq \text{Prob} \{ \underline{X}(sR) \in A^{(i)} \cap \underline{X}((s+d)R) \in A^{(j)} \} = N^{(i,j)}(d) / N_T$$

התוחלת G משוערכת ע"י ממוצע הדגם:

$$G^{(i)}(d) \triangleq E[x(sR+d) | \underline{X}(sR) \in A^{(i)}] = \quad (3.א)$$

$$= \frac{1}{N^{(i)}} \sum_s \{ x(sR+d) | \underline{X}(sR) \in A^{(i)} \}$$

לאחר הצבת גדלים אלו במשוואה (4.26) וכפל אנרי הוקטור  $\underline{b}$  והמטריצה Q ב-N<sub>T</sub> מתקבל:

$$b(t) = \sum_{l=1}^L c^{(l)}(t \bmod M) \cdot 2 \sum_s \{x(sR+t) | \underline{X}_{sR} \in A^{(1)}\} \quad (4.א)$$

$$Q(t,r) = \sum_{l=1}^L \sum_{k=1}^L c^{(l)}(t \bmod M) c^{(k)}(t \bmod M) N^{(l,k)}\left(\frac{r-t}{M}\right) \cdot$$

$$\cdot \delta((r-t) \bmod M), \\ t, r=0, 1, \dots, L_f-1$$

תהליך הרכבת משוואות התכנון

אברי  $Q$  ו- $b$  המגדרים במשוואה (4.א) מחושבים כסכומים מצטברים תוך כדי מעבר על סדרת הלמוד  $x(n)$  ובצוע אנליזה וכימות וקטורי. וקטור אותות פסי התדר  $\underline{X}(sR)$  המתקבל ע"י האנליזה עובר כימות וקטורי, ומותמר ע"י IDFT. נסמן ב- $\hat{x}(sR)$  את הוקטור המתקבל, וב- $\hat{x}_m(sR)$  את הרכיב ה- $m$ ,  $0 \leq m \leq M$ . נוסחאות עדכון ו- $b$ :

$$\bar{b}(t) \leftarrow \bar{b}(t) + 2 \hat{x}_{t \bmod M}(sR) \cdot x(t+sR) \quad (5.א)$$

$$\bar{Q}(t,r) \leftarrow \bar{Q}(t,r) + \hat{x}_{t \bmod M}(sR) \cdot \hat{x}_{t \bmod M}((s+(r-t)/M)R)$$

סבוכיות החשוב:

- לעדכון  $b$  יש לבצע  $L_f$  פעולות כפל-חבור ( $L_f$  הוא אורך חלון הסנטיזה).
- לעדכון  $Q$  יש לבצע כ- $2L_f$  פעולות כפל-חבור (מרבית אברי המטריצה  $Q$  מתאפסים כפי שנובע מנוסחה (4.א)). כן יש לעדכן טבלת pointers האוגרת את אנדקסי המילון של הוקטורים המקודדים,  $L_f/M-1$  הוקטורים הקודמים לנוכחי ו- $L_f/M-1$  הבאים אחריו.
- אם מסדרת הלימוד מפיקים  $n$  וקטורים, יש לבצע כ- $3nL_f$  פעולות. בנוסף לכך יש לבצע אנליזת WOLA וקדוד וקטורי, עבור סדרת הלמוד כולה.

כימות מטריציאלי

נפריד כל מטריצה לוקטורים אנכיים. לאחר סדור אנדקסים יתקבלו משוואות התכנון המתאימות למקרה הוקטורי האנכי, כלומר - (4.26) תצטמצם לצורה הוקטורית האנכית ( $B=1$ ).

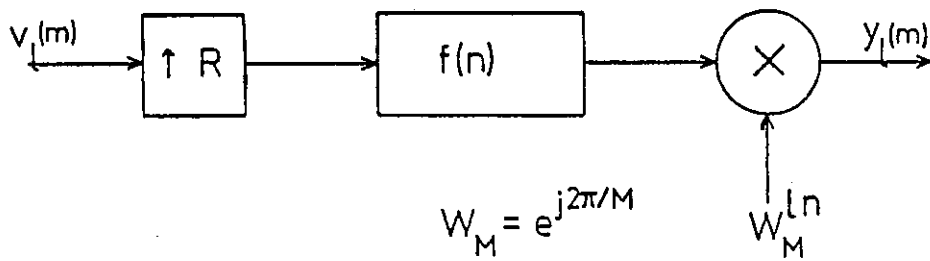
תהליך התכנון - לפיכך - אינו משתנה, פרט לעובדה שלאחר הכימות המטריציאלי (ובמקרה פרטי - קדוד וקטורי אופקי) כל מטריצה מפוצלת ל- $B$  וקטורים אנכיים.

נספח ב - פתוח בטוי להספק רעש מוצא מערך המסננים  
 =====

במערכת קדוד הממומשת בעזרת כימות עדין נניח שגיאית הכימות בכל ערוץ מאופיינת כתוספת רעש אדיטיבי וסטציונרי לאות. לאחר פעולת האנטרפולציה הרעש אינו סטציונרי, אולם בעל ספקטרום הספק מחזורי בזמן. נגדיר ספקטרום הספק שאינו תלוי בזמן כממוצע על פני מחזור. בהנחות מעשיות מתאימות יתקבל בטוי פשוט לסכום תרומות הרעש מערוצי התדר השונים.

המודל

רעש הכימות בכל פס תדר מאופיין כהליך אקראי (קומפלקסי) סטציונרי במובן הרחב, בעל ממוצע אפס (נובע מכימות סימטרי של אות בעל ממוצע אפס), פונקצית אוטוקורלציה  $\Phi_1(m)$  (בערוץ ה-1) וספקטרום הספק  $S_{v_1}(e^{j\omega})$ . ציור ב.1 מתאר את תרומת הרעש בערוץ טפוסי.



ציור ב.1 - רעש הכימות בערוץ ה-1

Fig B.1 - Quantization noise in the 1-th channel

ספקטרום ההספק לאחר האנטרפולציה

נגדיר:

$$\tilde{v}(n) = \begin{cases} v_1(\frac{n}{R}) & , n \bmod R = 0 \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases} \quad (1.2)$$

$$\tilde{\Phi}(k) = \begin{cases} \Phi_1(\frac{k}{R}) & , k \bmod R = 0 \\ 0 & , \text{אחרת} \end{cases}$$

$\tilde{v}(n)$  הוא רעש הכימות לאחר האנטרפולציה ולפני הסנון ע"י  $f(n)$ .

ספקטרום ההספק (התלוי בזמן) של מוצא הערוץ,  $y_1(n)$ :



$$\begin{aligned}
 S_{y_1}(n, e^{j\omega}) &= \mathcal{F}\{E[y_1(n) y_1^*(n+k)]\} = & (2.ב) \\
 &= \sum_k \sum_s \sum_t f(n-s) f(n+k-t) W_M^{ln} W_M^{-1(n+k)} \cdot \\
 &\cdot E[\tilde{v}(s) \tilde{v}^*(t)] e^{-j\omega k} = \\
 &= \sum_s \sum_t \sum_k f(n-sR) f(n+k-tR) W_M^{ln} W_M^{-1(n+k)} \cdot \\
 &\cdot \tilde{\Phi}(tR-sR) e^{-j\omega k}
 \end{aligned}$$

לאחר החלפות משתנים מתאימות נקבל:

$$\begin{aligned}
 S_{y_1}(n, e^{j\omega}) &= \sum_s \sum_t \sum_k f(k) W_M^{-lk} e^{-j\omega k} \cdot & (3.ב) \\
 &\cdot \tilde{\Phi}(tR) W_M^{-ltR} e^{-j\omega tR} \cdot f(n-sR) W_M^{l(n-sR)} e^{j\omega(n-sR)}
 \end{aligned}$$

מתוך משוואה (3.ב) נכר ברור שספקטרום ההספק מחזורי בזמן במחזור  $n=R$ .  
 נגדיר ספקטרום ההספק ממוצע כסכום על פני מחזור:

$$S_{y_1}(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{R-1} S_y(n, e^{j\omega}) = \left| F(e^{j\omega} W_M^1) \right|^2 S_{v_1}(e^{j\omega R} W_M^{1R}) \quad (4.ב)$$

הספק הרעש הכולל במוצא מערך המסננים

נרכיב את המודל ע"י שתי ההנחות הבאות:

1. רכיבי הרעש בערוצי התדר השונים חסרי קורלציה.
2. הרכיב הממשי והרכיב המדומה של תהליך הרעש בכל פס תדר חסרי קורלציה, ובעלי פונקציית אוטוקורלציה זהה.

הנחות אלו מתקיימות אף לגבי אותות פסי התדר עצמם, בנוסף לרעש הכימות, כפי שמאושר במדידות סמולציה.

במערך המסננים האחידים בן  $M$  פסי התדר, הערוצים  $M/2$ ,  $0$ , ממשיים, והשאר מקיימים את הקשר:

$$X_k = X_{M-k}^*, \quad k=1, 2, \dots, M/2-1 \quad (5.ב)$$

תהליכי הרעש מקיימים, כמוכר, קשר זה. נבדוק את סכום תרומת זוג ערוצים צמודים לרעש היציאה. קרוס-קורלציה בין אותות הרעש:

$$\begin{aligned} E[(y_1(n) + y_1^*(n)) (y_1(n+k) + y_1^*(n+k))] &= \quad (6.ב) \\ &= E[y_1(n) y_1^*(n+k)] + E[y_1^*(n) y_1(n+k)] + \\ &+ E[y_1(n) y_1(n+k)] + E[y_1^*(n) y_1^*(n+k)] \end{aligned}$$

המחובר הראשון תלוי ב- $E[\tilde{v}(s) \tilde{v}^*(t)]$ , השני ב- $E[\tilde{v}^*(s) \tilde{v}(t)]$ , השלישי ב- $E[\tilde{v}(s) \tilde{v}(t)]$  והרביעי ב- $E[\tilde{v}^*(s) \tilde{v}^*(t)]$ , כפי שנובע ממשוואה (ב.2). מתוך ההנחות לעיל נקבל:

$$E[\tilde{v}(s) \tilde{v}^*(t)] = E[\tilde{v}^*(s) \tilde{v}(t)] = 2E[\text{Re}\{\tilde{v}(s)\} \text{Re}\{\tilde{v}(t)\}] \quad (7.ב)$$

$$E[\tilde{v}(s) \tilde{v}(t)] = E[\tilde{v}^*(s) \tilde{v}^*(t)] = 0$$

לפיכך, הערוצים ה-1 וה- $(M-1)$ ,  $1 \leq l \leq M/2-1$ , תורמים לספקטרום ההספק במוצא מערך המסננים את הרכיב:

$$S_{v1}(e^{j\omega R} W_M^{1R}) \left| F(e^{j\omega} W_M^1) \right|^2 + S_{v1}(e^{j\omega R} W_M^{-1R}) \left| F(e^{j\omega} W_M^{-1}) \right|^2 \quad (8.ב)$$

ואת תרומות הערוצים שאינם צמודים ניתן לסכם עפ"י הנחת חוסר הקורלציה. ספקטרום ההספק הממוצע של רעש היציאה במערך:

$$S_{out}(e^{j\omega}) = \sum_{l=0}^{M-1} S_{v1}(e^{j\omega R} W_M^{-lR}) \left| F(e^{j\omega} W_M^{-l}) \right|^2 \quad (9.ב)$$

במדה והנחות חוסר הקורלציה אינן מוצדקות במערכת מסוימת, הבטוי מסתרבל עקב הכללת רכיבי cross-spectrum מתאימים.

נספח ג - פתוח בטויים לאברי העוות בתלות במקדמי המסננים

בנספח זה מובא פתוח רכיבי העוות  $E_1 - E_6$  שהגדרו בפרק 5 לתבניות רבועיות התלויות במקדמי המסננים. נעשה שמוש בזהות הבאה [28, eq.33]:

$$\sum_{k=0}^{M-1} W_M^{kn} = M \delta(n \bmod M), \quad W_M = e^{j\frac{2\pi}{M}} \quad (1.ג)$$

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n=0 \\ 0, & m \neq 0 \end{cases}$$

1.ג עוות ההתחזות (aliasing)

לפי משוואה (5.4):

$$E_1 = \frac{1}{M^2 R^2} \sum_{k=1}^{R-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{l=0}^{M-1} F(e^{j\omega} W_M^{-l}) H(e^{j\omega} W_R^k W_M^{-l}) \right|^2 d\omega \quad (2.ג)$$

נעבור לתחום הזמן בעזרת שוויון Parseval:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{1}{M^2 R^2} \sum_{k=1}^{R-1} \sum_n \left| \sum_{l=0}^{M-1} \{f(n) W_M^{ln}\} * \{h(n) W_M^{ln} W_R^{-kn}\} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{M^2 R^2} \sum_{k=1}^{R-1} \sum_n \left| \sum_{l=0}^{M-1} \sum_s f(s) W_M^{ls} h(n-s) W_M^{l(n-s)} W_R^{-k(n-s)} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{M^2 R^2} \sum_s \sum_t \sum_n f(s) h(n-s) h(n-t) f(t) \sum_{k=1}^{R-1} W_R^{k(n-s)} W_R^{-k(n-t)}. \end{aligned}$$

$$\cdot \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} W_M^{in} W_M^{-jn}$$

נעזר בזהות (1.ג):

$$E_1 = \frac{1}{R^2} \sum_s \sum_t \sum_n f(s) h(n-s) h(n-t) f(t) \cdot [R \delta((s-t) \bmod R) - 1] \delta(n \bmod M) \quad (3.ג)$$

נזכור שהחלונות  $h(n)$  ו- $f(n)$  סופיים, ולכן הסכומים סופיים. המשוואה האחרונה נתנת לרשום כתבנית רבועית:

$$E_1 = \underline{f}^T Q_1 \underline{f} \quad (4.ג)$$

כאשר:

$$\underline{f}^T = [f(0), f(1), \dots, f(L-1)]$$

$f(n)$  הם מקדמי חלון הסנטזה שאורכו  $L$ .

$$Q_1 = [Q_1(s, t)] \quad , \quad 0 \leq s, t \leq L-1$$

$$Q_1(s, t) = \frac{1}{R^2} \sum_n h(nM-s) h(nM-t) [R \delta((s-t) \bmod R) - 1]$$

המטריצה  $Q_1$  היא בברור מטריצה סימטרית, ומכיוון ש- $E_1 \geq 0$  לכל  $\underline{h}$  ו- $\underline{f}$ ,  $Q_1$  היא מטריצה אי-שלילית מגדרת (positive semi-definite).

לחלופין, נתן לרשום את המשוואה (3.ג) באופן הבא:

$$E_1 = \frac{1}{R^2} \sum_s \sum_t \sum_n h(s) f(n-s) f(n-t) h(t) \cdot \quad (5.ג)$$

$$\cdot [R \delta((s-t) \bmod R) - 1] \delta(n \bmod M)$$

וקבלנו תבנית רבועית שקולה:

$$E_1 = \underline{h}^T \bar{Q}_1 \underline{h} \quad (6.ג)$$

כאשר:

$$\underline{h}^T = [h(1), h(2), \dots, h(L)]$$

$h(n)$  הם מקדמי חלון האנליזה שאורכו  $L$ .

$$\bar{Q}_1 = [\bar{Q}_1(s, t)] \quad , \quad 1 \leq s, t \leq L$$

$$\bar{Q}_1(s, t) = \frac{1}{R^2} \sum_n f(nM-s) f(nM-t) [R \delta((s-t) \bmod R) - 1]$$

לצורך הפשטות הנחנו ששני החלונות שווי אורך, ואורכם  $L$  הוא כפולה שלמה של מימד ההתמרה  $M$ . הנחה זו תקפה לאורך כל נספח ג'.

אם נבחר את תחום החלונות השונה מאפס כ:  $f(0), \dots, f(L-1)$  לחלון הסנטזה, ו-  $h(1), \dots, h(L)$  לחלון האנליזה, השהיית מערכת ה-WOLA תהייה בשעור L דגמים.

2. ג. חשיאה הרבועית כלפי תמסורת היחידה  
לפי משוואה (5.5):

$$E_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| e^{-j\omega n_0} - \frac{1}{MR} \sum_{l=0}^{M-1} F(e^{j\omega} W_M^{-l}) H(e^{j\omega} W_M^{-l}) \right|^2 d\omega \quad (7. ג)$$

בעזרת שוויון Parseval:

$$E_2 = \sum_n \left| \delta(n-n_0) - \frac{1}{MR} \sum_{l=0}^{M-1} \{f(n) W_M^{ln}\} * \{h(n) W_M^{ln}\} \right|^2$$

בעזרת זהות (1. ג):

$$\begin{aligned} E_2 &= \sum_n \left| \delta(n-n_0) - \frac{1}{R} \sum_s f(s) h(n-s) \delta(n \bmod M) \right|^2 = \quad (8. ג) \\ &= \sum_n \left\{ \delta(n-n_0) - \frac{2}{R} \delta(n-n_0) \delta(n \bmod M) \sum_s f(s) h(n-s) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R^2} \delta(n \bmod M) \sum_s \sum_t f(s) h(n-s) h(n-t) f(t) \right\} = \\ &= 1 - \frac{2}{R} \sum_s f(s) h(n_0-s) \delta(n_0 \bmod M) + \\ &\quad + \frac{1}{R^2} \sum_s \sum_t f(s) h(nM-s) h(nM-t) f(t) \end{aligned}$$

כאמור, החלונות  $h(n)$  ו-  $f(n)$  סופיים, ולכן כל הסכומים לעיל סופיים.

המשוואה האחרונה נתנת לרשום כתכנית רבועית:

$$E_2 = 1 - 2 \underline{f}^T \underline{a} + \underline{f}^T \underline{Q}_2 \underline{f} \quad (9. ג)$$

כאשר:

$$\underline{f}^T = [f(0), f(1), \dots, f(L-1)]$$

$f(n)$  הם מקדמי חלון הסנטזה שאורכו  $L$ .

$$Q_2 = [Q_2(s, t)] \quad , \quad 0 \leq s, t \leq L-1$$

$$Q_2(s, t) = \frac{1}{R^2} \sum_n h(nM-s) h(nM-t)$$

$$\underline{q} = \frac{1}{R} \delta(n_0 \bmod M) [h(n_0-0), h(n_0-1), \dots, h(n_0-L+1)]^T$$

$h(n)$  הם מקדמי חלון האנליזה, שאורכו  $L$ .

ממשוואה (7.ג) נובע שניתן להחליף בין  $h(n)$  ו- $f(n)$ , ומתקבל רשום חלופי לתבנית הרבועית:

$$E_2 = 1 - 2 \underline{h}^T \underline{\bar{q}} + \underline{h}^T \bar{Q}_2 \underline{h} \tag{10.ג}$$

כאשר:

$$\underline{h}^T = [h(1), h(2), \dots, h(L)]$$

$$\bar{Q}_2 = [\bar{Q}_2(s, t)] \quad , \quad 1 \leq s, t \leq L$$

$$\bar{Q}_2(s, t) = \frac{1}{R^2} \sum_n f(nM-s) f(nM-t)$$

$$\underline{\bar{q}} = \frac{1}{R} \delta(n_0 \bmod M) [f(n_0-1), f(n_0-2), \dots, f(n_0-L)]^T$$

השהיות המערכת היא בשעור  $n_0=L$  דגמים כאמור, ו- $\delta(L \bmod M)=1$ .  
 המטריצה  $Q_2$  היא בברור מטריצה סימטרית.  
 ממשוואות (7.ג)-(9.ג) נקבל:

$$\underline{f}^T Q_2 \underline{f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{MR} \sum_{l=0}^{M-1} F(e^{j\omega} W_M^{-l}) H(e^{j\omega} W_M^{-l}) \right|^2 d\omega \geq 0$$

כלומר,  $Q_2$  היא מטריצה אי-שלילית מגדרת.

3.ג הספק הרעש הפנים-פסי

עפ"י המודל המתואר בפרק 5, בכל פס תדר נוסף רעש כימות בעל פונקצית אוטוקורלציה

$$\Phi_1(m_2 - m_1) = E[v_1(m_1) v_1^*(m_2)] \quad (12.ג)$$

וספקטרום הספק  $S_{v1}(e^{j\omega})$  1 מציינ את אינדקס הערוץ. נגדיר:

$$\tilde{\Phi}_1(n) = \begin{cases} \Phi_1(\frac{n}{R}), & n \text{ mod } R = 0 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases} \quad (13.ג)$$

לפי משוואה (5.6):

$$E_3 = \frac{1}{M^2} \sum_{l=0}^{M-1} \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{2\pi l}{M} - \frac{\pi}{M}}^{\frac{2\pi l}{M} + \frac{\pi}{M}} S_{v1}(e^{j\omega R} W_M^{-lR}) |F(e^{j\omega} W_M^{-l})|^2 d\omega = \quad (14.ג)$$

$$= \frac{1}{M^2} \sum_{l=0}^{M-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S_{v1}(e^{j\omega R}) |F(e^{j\omega})|^2 G(e^{j\omega}) d\omega$$

כאשר:

$$G(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & 0 < |\omega| < \pi/M \\ 0, & \pi/M < |\omega| < \pi \end{cases} \quad (15.ג)$$

$$g(n) = \mathcal{F}^{-1}\{G(e^{j\omega})\}$$

לפי שוויון Parseval:

$$E_3 = \frac{1}{M^2} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_t \{\tilde{\Phi}_1(t) * f(t) * g(t)\} f(t) = \quad (16.ג)$$

$$= \frac{1}{M^2} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_t \{\sum_s f(s) \sum_m \tilde{\Phi}_1(m) g(t-s-m)\} f(t)$$

נגדיר:

$$\Phi_{\Sigma}(m) = \sum_{l=0}^{M-1} \Phi_1(m) \quad (17.ג)$$

ונציב ב-(16.ג):

$$E_3 = \sum_s \sum_t f(s) f(t) \frac{1}{M^2} \sum_m g(s-t+mR) \Phi_{\Sigma}(m) \quad (18.ג)$$

חלון הסנטיזה  $f(t)$  סופי. סדרת האוטוקורלציה  $\Phi_1$  משוערכת מתוך מדידות, ע"י סדרה סופית. לכן, כל הסכומים סופיים.

המשוואה האחרונה ניתנת לרשום כתבנית רבועית:

$$E_3 = \underline{f}^T Q_3 \underline{f} \quad (19.ג)$$

כאשר:

$$\underline{f}^T = [f(0), f(1), \dots, f(L-1)]$$

$$Q_3 = [Q_3(s, t)] \quad , \quad 0 \leq s, t \leq L-1$$

$$Q_3(s, t) = \frac{1}{M^2} \sum_m g(s-t+mR) \Phi_{\Sigma}(m)$$

המטריצה  $Q_3$  היא בברור סימטרית, ומכיוון ש- $E_3 \geq 0$  לכל  $\underline{f}$ , המטריצה  $Q_3$  אי-שלילית מגדרת.

#### 4.ג. הספק הרעש החוץ-פסי

לפי משוואה (5.7):

$$E_4 = \frac{1}{M^2} \sum_{l=0}^{M-1} \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{2\pi l}{M} - \frac{\pi}{M}}^{\frac{2\pi l}{M} + \frac{\pi}{M}} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{M-1} S_{vk}(e^{j\omega R} W_M^{-kR}) \left| (e^{j\omega} W_M^{-k}) \right|^2 d\omega = \quad (20.ג)$$

$$= \frac{1}{M^2} \sum_{l=0}^{M-1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{M-1} S_{vk}(e^{j\omega R} W_M^{-(k-1)R}) \left| F(e^{j\omega} W_M^{-(k-1)}) \right|^2$$

$$\cdot G(e^{j\omega}) d\omega$$

כאשר  $G(e^{j\omega})$  מגדרת במשוואה (15.ג).



לפי שוויון Parseval:

(21.ג)

$$\begin{aligned}
 E_4 &= \frac{1}{M^2} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_t \{ (\bar{\Phi}_k(t) W_M^{(k-1)t}) * (f(t) W_M^{(k-1)t}) * g(t) \} W^{-(k-1)t} f(t) = \\
 &= \frac{1}{M^2} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{M-1} \sum_t \{ \sum_s f(s) W_M^{(k-1)s} \cdot \\
 &\cdot \sum_m \bar{\Phi}(m) W_M^{(k-1)mR} g(t-s-mR) \} W_M^{-(k-1)t} f(t) = \\
 &= \frac{1}{M^2} \sum_s \sum_t f(s) f(t) \sum_m g(s-t+mR) \cdot \\
 &\cdot \{ [ \sum_{k=0}^{M-1} \bar{\Phi}_k(m) W_M^{k(s-t+mR)} \sum_{l=0}^{M-1} W_M^{-l(s-t+mR)} ] - [ \sum_{l=0}^{M-1} \bar{\Phi}_1(m) ] \}
 \end{aligned}$$

לפי זהות (1.ג) והגדרה (17.ג):

(22.ג)

$$E_4 = \sum_s \sum_t f(s) f(t) \frac{1}{M^2} \sum_m g(s-t+mR) \bar{\Phi}_\Sigma(m) [M \delta((s-t+mR) \bmod M) - 1]$$

מכיוון שחלון הסנטזה סופי, סדרת האוטוקורלציה משוערכת מתוך מדידות ע"י סדרה סופית, כל הסכומים סופיים.

רשום משוואה (22.ג) כתבנית רבועית:

$$E_4 = \underline{f}^T Q_4 \underline{f}^T \tag{23.ג}$$

כאשר:

$$\underline{f}^T = [f(0), f(1), \dots, f(L-1)]$$

$$Q_4 = [Q_4(s, t)] \quad , \quad 0 \leq s, t \leq L-1$$

$$Q_4(s, t) = \frac{1}{M^2} \sum_m g(s-t+mR) \bar{\Phi}_\Sigma(m) [M \delta((s-t+mR) \bmod M) - 1]$$

המטריצה  $Q_4$  היא כרור סימטרית, ומכיוון ש- $E_4 \geq 0$  לכל  $f$ , המטריצה  $Q_4$  אי-שלילית מגדרת.

5.ג אנרגית אונות הצד של החלונות

לפי משוואה (5.9):

$$E_5 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Q_5(e^{j\omega}) |H(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (24.ג)$$

לפי משפט Parseval:

$$E_5 = \sum_s (q_5(s) * h(s)) h(s) = \sum_s \sum_t h(s) q_5(s-t) h(t) \quad (25.ג)$$

כאשר  $q_5(n) = \mathcal{F}^{-1}\{Q_5(e^{j\omega})\}$ , ו- $Q_5(e^{j\omega})$  מגדר ב-(5.9).

רשום כתבנית רבועית:

$$E_5 = \underline{h}^T Q_5 \underline{h} \quad (26.ג)$$

כאשר:

$$\underline{h}^T = [h(1), h(2), \dots, h(L)]$$

$$Q_5 = [Q_5(s, t)] \quad , \quad 1 \leq s, t \leq L$$

$$Q_5(s, t) = q_5(s-t) = q_5(t-s)$$

באופן דומה:

$$E_6 = \underline{f}^T Q_6 \underline{f} \quad (27.ג)$$

כאשר:

$$\underline{f}^T = [f(0), f(1), \dots, f(L-1)]$$

$$Q_6 = [Q_6(s, t)] \quad , \quad 0 \leq s, t \leq L-1$$

$$Q_6(s, t) = q_6(s-t) = q_6(t-s)$$

, ו- $Q_6(e^{j\omega})$  מגדר ב-(5.9) ,  $q_6(n) = \mathcal{F}^{-1}\{Q_6(e^{j\omega})\}$

מכיוון שתגובת התדר של מסנן FIR אינה מתאפסת בתחום  $-\pi \leq \omega \leq \pi$  פרט למספר נקודות סופי,  $E_5 > 0$  וגם  $E_6 > 0$ , והמטריצות הסימטריות  $Q_5$  ו- $Q_6$  הן מטריצות חיוביות מגדרות (positive definite).

6. ג גורם נרמול ההגבר

מתוך השוואה בין משוואות (5.5) ו-(5.19) והפתוח בסעיף ג.2 נסיק:

$$\bar{E}_2 = 1 - 2c \underline{f}^T \underline{q} + c^2 \underline{f}^T Q_2 \underline{f} \quad (28. ג)$$

כאשר  $\underline{f}$ ,  $\underline{q}$ ,  $Q_2$  מגדרים במשוואה (9. ג).

ע"י גזירה לפי  $c$  והשוואה לאפס נקבל:

$$c_0 = \frac{\underline{f}^T Q_2 \underline{f}}{\underline{f}^T \underline{q}} \quad (29. ג)$$

7.ג סכום נוסחות

נסמן ב-h ו-f את חלונות האנליזה והסנטזה בהתאמה.

$$\underline{f} = [f(0), f(1), \dots, f(L-1)]^T \quad (30.ג)$$

$$\underline{h} = [h(1), h(2), \dots, h(L)]^T$$

נגדיר:

$$\Phi_{\Sigma}(m) = \sum_{l=0}^{M-1} \Phi_1(m) \quad (31.ג)$$

כאשר  $\Phi_1(m)$  היא פונקציית האוטוקורלציה של רעש הכימות בערוץ ה-1.

קבלנו את הבטויים הבאים:

$$E_1 = \underline{f}^T Q_1 \underline{f} = \underline{h}^T \bar{Q}_1 \underline{h} \quad (32.ג)$$

$$E_2 = 1 - 2 \underline{f}^T \underline{a} + \underline{f}^T Q_2 \underline{f} = 1 - 2 \underline{h}^T \bar{\underline{a}} + \underline{h}^T \bar{Q}_2 \underline{h}$$

$$E_3 = \underline{f}^T Q_3 \underline{f}$$

$$E_4 = \underline{f}^T Q_4 \underline{f}$$

$$E_5 = \underline{h}^T Q_5 \underline{h}$$

$$E_6 = \underline{f}^T Q_6 \underline{f}$$

$$c_0 = [\underline{f}^T Q_2 \underline{f}] / [\underline{f}^T \underline{a}]$$

כאשר:

$$Q_1(s, t) = \frac{1}{R^2} \sum_n h(nM-s) h(nM-t) [R \delta((s-t) \bmod R) - 1], \quad (33.ג)$$

$$0 \leq s, t \leq L-1$$

$$\bar{Q}_1(s, t) = \frac{1}{R^2} \sum_n f(nM-s) f(nM-t) [R \delta((s-t) \bmod R) - 1],$$

$$1 \leq s, t \leq L$$

$$Q_2(s, t) = \frac{1}{R^2} \sum_n h(nM-s) h(nM-t), \quad 0 \leq s, t \leq L-1$$

$$\bar{Q}_2(s, t) = \frac{1}{R^2} \sum_n f(nM-s) f(nM-t), \quad 1 \leq s, t \leq L$$

$$q(t) = \frac{1}{R} h(L-t), \quad 0 \leq t \leq L-1$$

$$\bar{q}(t) = \frac{1}{R} f(L-t), \quad 1 \leq t \leq L$$

$$Q_3(s, t) = \frac{1}{M^2} \sum_m g(s-t+mR) \Phi_{\Sigma}(m), \quad 0 \leq s, t \leq L-1$$

$$Q_4(s, t) = \frac{1}{M^2} \sum_m g(s-t+mR) \Phi_{\Sigma}(m) [M \delta((s-t+mR) \bmod M) - 1],$$

$$0 \leq s, t \leq L-1$$

$$Q_5(s, t) = q_5(|s-t|), \quad 1 \leq s, t \leq L$$

$$Q_6(s, t) = q_6(|s-t|), \quad 0 \leq s, t \leq L-1$$

המטריצות  $Q_1-Q_4, \bar{Q}_1-\bar{Q}_2$  אי-שליליות מגדרות, והמטריצות  $Q_5, Q_6$  חיוביות מגדרות.

חערה: החלונות  $h$  ו- $f$  נבחרו כשווי אורך, ואורכם  $L$  הוא כפולה שלמה של מימד ההתמרה  $M$ .

8.ג תכר חלונות סימטריים

חלון אנליזה סימטרי מקיים:

$$h(t) = h(L+1-t) , t=1,2,\dots,L \quad (34.ג)$$

וחלון סנטזה סימטרי מקיים:

$$f(t) = f(L-1-t) , t=0,1,\dots,L-1 \quad (35.ג)$$

אם נתונים חלונות סימטריים, אזי המטריצות  $Q, \hat{Q}, \bar{Q}$  המגדרות במשוואות (5.11), (5.13), (5.18) מקיימות את התכונה הבאה, כפי שנובע מהבטויים המסוכמים בסעיף 7.ג:

$$\hat{Q}(s,t) = \hat{Q}(L-1-s, L-1-t) , s,t=0,1,\dots,L-1 \quad (36.ג)$$

$$Q(s,t) = Q(L-1-s, L-1-t) , s,t=0,1,\dots,L-1$$

$$\bar{Q}(s,t) = \bar{Q}(L+1-s, L+1-t) , s,t=1,\dots,L$$

מתכונה זו נובע בברור שהחלונות המתוכננים ע"י פתרון משוואות (5.18), (5.14), (5.12) אף הם סימטריים. מכאן נסיק שניתן לחשב את מחצית אנרי החלון הנדרש, ע"י פתרון מערכת משוואות מסדר  $(L/2) \times (L/2)$ , ולהשלים את שאר האיברים בהתאם לסימטריות.

מערכת המשוואות לתכנון מסנן הסנטזה:

$$P \underline{f}' = \underline{p} \quad (37.ג)$$

$$\underline{f}' = [f(0), f(1), \dots, f(L/2-1)]^T$$

$$P = [P(s,t)] , 0 \leq s,t \leq L/2-1$$

$$P(s,t) = Q(s,t) + Q(s,L-1-t)$$

$$\underline{p} = [q(0), q(1), \dots, q(L/2-1)]^T$$

מערכת המשוואות לתכנון מסנן האנליזה:

$$\bar{P} \underline{h}' = \bar{p} \quad (38. ג)$$

$$\underline{h}' = [h(1), h(2), \dots, h(L/2)]^T$$

$$\bar{P} = [\bar{P}(s, t)] \quad , \quad 1 \leq s, t \leq L/2$$

$$\bar{P}(s, t) = \bar{Q}(s, t) + \bar{Q}(s, L+1-t)$$

$$\bar{p} = [\bar{q}(1), \bar{q}(2), \dots, \bar{q}(L/2)]^T$$

נספח ד - הוכחת טענות 5.1, 5.2

הוכחת טענה 5.1

יהי  $\underline{f}^{(0)}$  תנאי התחלה (שונה מאפס) כלשהוא, ו- $c_5, c_6 > 0$ .

מסנן האנליזה האופטימלי  $\underline{h}^{(1)}$  מחושב ע"י פתרון משוואה (5.12):

$$\bar{Q} \underline{h}^{(1)} = \bar{q} \tag{1.ד}$$

כאשר:

$$\bar{Q} = c_1 \bar{Q}_1 + \bar{Q}_2 + c_5 Q_5$$

עפ"י נספח ג', המטריצות הסימטריות  $\bar{Q}_1, \bar{Q}_2$  אי-שליליות מגדרות, והמטריצה הסימטרית  $Q_5$  חיובית מגדרת. מכאן, המטריצה  $\bar{Q}$  אינה סנגולרית, ו- $\underline{h}^{(1)}$  יחיד.

מסנן הסנטזה האופטימלי  $\underline{f}^{(1)}$  מחושב ע"י פתרון משוואה (5.18):

$$Q \underline{f}^{(1)} = q \tag{2.ד}$$

כאשר:

$$Q = c_1 Q_1 + Q_2 + c_6 Q_6$$

או ע"י פתרון משוואה (5.14):

$$\bar{Q} \underline{f}^{(1)} = \bar{q} \tag{3.ד}$$

כאשר:

$$\bar{Q} = c_1 Q_1 + Q_2 + c_3 Q_3 + c_4 Q_4 + c_6 Q_6$$

עפ"י נספח ג', המטריצות הסימטריות  $Q_1-Q_4$  אי-שליליות מגדרות, והמטריצה הסימטרית  $Q_6$  חיובית מגדרת. מכאן, המטריצות  $Q, \bar{Q}$  אינן סנגולריות, ו- $\underline{f}^{(1)}$  יחיד.



באנדוקציה, הסדרה  $\{\underline{h}^{(k)}, \underline{f}^{(k)}\}$  יחידה.

5.2 הוכחת טענה

א. יהיו  $\underline{h}^{(k-1)}, \underline{f}^{(k-1)}$  חלונות הסנטזה והאנליזה שחושבו באיטרציה ה- $(k-1)$ . החלון  $\underline{h}^{(k)}$  מחושב ע"י מזעור התבנית הרבועית  $D$ :

$$\frac{\partial D(\underline{h}^{(k)}, \underline{f}^{(k-1)})}{\partial \underline{h}^{(k)}} = 0 \implies \underline{h}^{(k)} \quad (4.ד)$$

החלון  $\underline{f}^{(k)}$  מחושב ע"י מזעור התבנית הרבועית  $D$ :

$$\frac{\partial D(\underline{h}^{(k)}, \underline{f}^{(k)})}{\partial \underline{f}^{(k)}} = 0 \implies \underline{f}^{(k)}$$

מכאן:

$$D(\underline{h}^{(k)}, \underline{f}^{(k)}) \leq D(\underline{h}^{(k)}, \underline{f}^{(k-1)}) \leq D(\underline{h}^{(k-1)}, \underline{f}^{(k-1)}) \quad (5.ד)$$

כלומר:  $D$  מונוטונית לא עולה.

עפ"י טענה (5.1) סדרת החלונות  $\{\underline{h}^{(k)}, \underline{f}^{(k)}\}$  יחידה, ולכן יתקיים שוויון ב- (5.ד) אם ורק אם האלגוריתם הגיע לנקודת שבת:  $\underline{h}^{(k)} = \underline{h}^{(k-1)}, \underline{f}^{(k)} = \underline{f}^{(k-1)}$ .

ב.  $\underline{h}^{(k)}, \underline{f}^{(k)}$  היא נקודת שבת של האלגוריתם אם ורק אם  $\partial D / \partial \underline{h}^{(k)} = 0$  וגם  $\partial D / \partial \underline{f}^{(k)} = 0$ , כלומר: אם ורק אם  $\underline{h}^{(k)}, \underline{f}^{(k)}$  היא נקודה סטציונרית של  $D$ .

תהי  $\underline{h}^*, \underline{f}^*$  נקודה סטציונרית שאינה נקודת מינימום מקומי. אזי, בכל סביבה של  $\underline{h}^*, \underline{f}^*$  קיימת נקודה  $\underline{h}^{**}, \underline{f}^{**}$ , כך ש-  $D(\underline{h}^{**}, \underline{f}^{**}) < D(\underline{h}^*, \underline{f}^*)$ .

לפי סעיף א,  $D$  מונוטונית לא עולה מאיטרציה לאיטרציה, ועל כן  $\underline{h}^*, \underline{f}^*$  אינה נקודת שבת של האלגוריתם, המתחיל מתנאי ההתחלה  $\underline{f}^{**}$ .

נספח ה - תכן מערכות שנוי סקלה בתחום התדר (FDHS)

(Frequency Domain Harmonic Scaling) FDHS היא שיטה מקובלת לשנוי רוחב הפס של אותות דבור [5]. פעולה זו מוצאת שמושים רבים במערכות קדוד דבור ובמערכות המשנות את משך זמן הדבור בלא לשנות את תדרו.

מערכת ה-FDHS ממומשת בעזרת מינרך המסננים האחד. בשיטות תכנון ידועות, חלונות האנליזה והסנטזה אינם אופטימליים. על מנת להפיק דבור באיכות טובה בשיטות אלו, יש לדגום את אותות פסי התדר בקצב גבוה בהרבה מהקצב הקריטי [5], וסבוכיות הממוש עולה. מטרת נספח זה היא להציע בסיס לפתוח שיטת תכנון חלונות אופטימליים, אשר עשויים להניב מערכת FDHS באיכות טובה, ובקצב דגימה קריטי או קצב הקרוב אליו.

מערכת ה-FDHS

בפתוח המוצג להלן נתרכז בהרחבת רוחב הפס של האות ביחס שלם 1:Q. מבנה המערכת מתואר בצירור ה.1.

אות הדבור מופרד לפסי תדר צרים, באופן טפוסי M=256 פסים קומפלקסיים, בעזרת מערך האנליזה. אותות הפסים מדוללים ביחס R:1,  $R \leq M/Q$ , ומתקבלים האותות הקומפלקסיים:

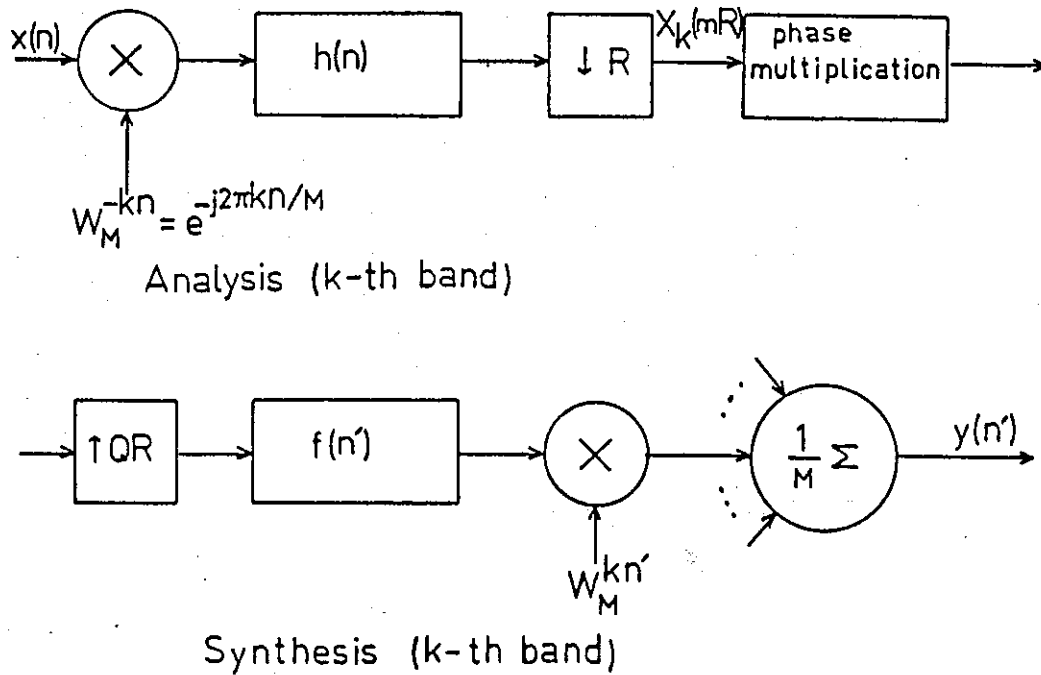
$$X_k(mR) = A_k(mR) e^{j\Phi_k(mR)} \quad (1.ה)$$

כאשר  $A_k$  היא המעטפת, ו- $\Phi_k$  היא הפזה.

פזת האות, בכל נקודת זמן, מכפלת בגורם Q, ומתקבל:

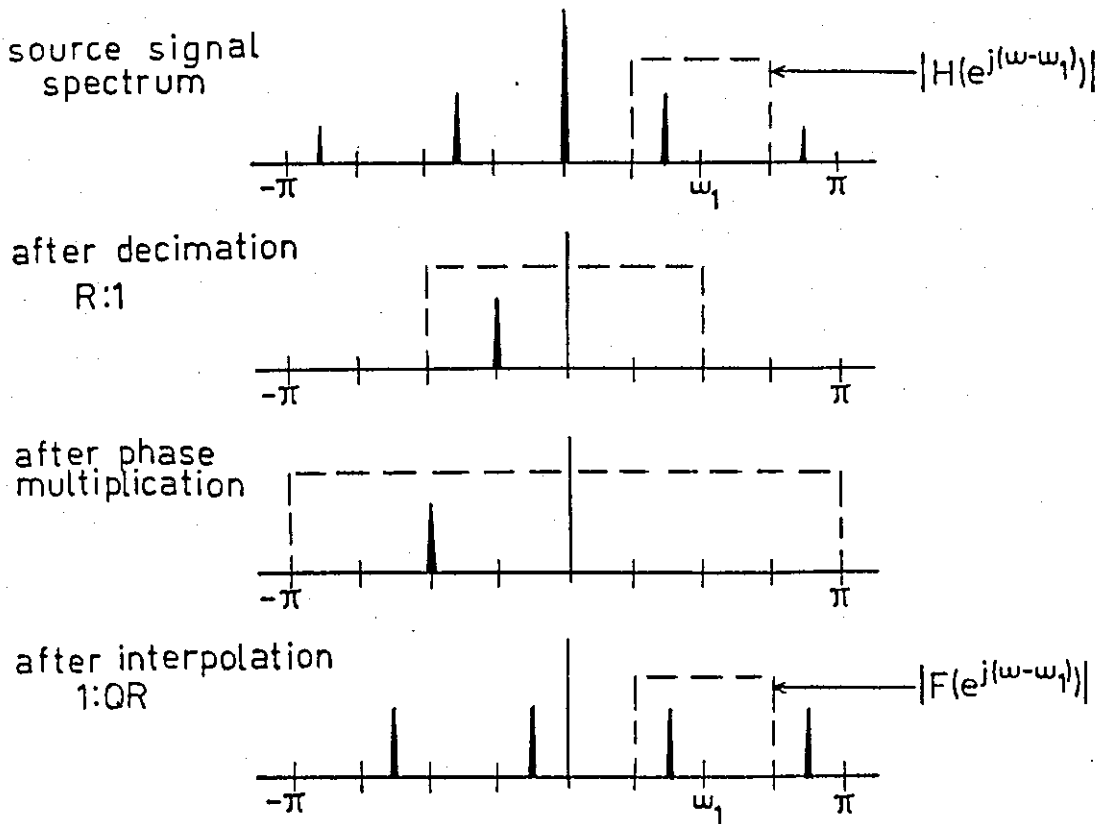
$$Y_k(mR) = A_k(mR) e^{jQ\Phi_k(mR)} \quad (2.ה)$$

מעריך הסנטזה מרכיב את אות המוצא מתוך האותות  $Y_k$ , לאחר אנטרפולציה ביחס 1:QR.



ציור ה.1 - מערכת FDHS  
 Fig E.1 - FDHS System

פעולת ה-FDHS מודגמת בציור ה.2, עבור  $M=4$  פסי תדר, יחס כפל  $Q=2$  ויחס דצימציה  $R=2$ . אות פס התדר מדולל ביחס  $R:1$ , וע"י כפל הפזה מקורבת פעולת שנוי סקלת התדר של האות (הנושא יידון בהמשך). לאחר אנטרפולציה ביחס  $1:QR$  וסנטזת אות המוצא מתקבל אות דסקרטי, בעל ספקטרום שווה (בקרווב) לאות המקור, אולם דגום בקצב דגימה גבוה פי  $Q$ .



ציור ה.2 - עקרון פעולת ה-FDHS בתחום התדר  
 Fig E.2 - Principle of FDHS in the frequency domain

שנוי סקלת התדר בעזרת כפל הפזה

האלגוריתם מתבסס על העובדה שלמרבית אותות הדבור אופי מחזורי לזמן קצר, וספקטרום לזמן קצר (STFT) המכיל שיאים מבודדים - הרמוניות של תדר יסודי המכונה Pitch [5]. שנוי סקלת התדר האנלוגי של האות מבוצע ע"י כפל תדירותו של כל רכיב הרמוני בנפרד. ההפרדה לרכיבים הרמוניים מתקבלת ע"י סנון האות למספר רב של פסי תדר צרים.

אם לספקטרום האות שלזמן קצר אופי הרמוני, אות הערוץ ה- $k$  ניתן ע"י:

$$X_k(mR) = A e^{j(mR\alpha + \theta)} \tag{3.ה}$$

כאשר  $A, \alpha, \theta$  קבועים. במקרה זה, כפל הפזה בכל נקודת זמן בגורם  $Q$  שקול להכפלת תדירות אות הערוץ פי  $Q$ .

אם אות הערוץ מכיל מספר רכיבים ספקטראליים, כשאחד מהם בעל עוצמה גבוהה ביחס לשאר, ככל פזת האות בגורם  $Q$  יוצר את התופעה הבאה [30]:  
 תדירות הרכיב בעל העוצמה הגבוהה מכפלת פי  $Q$ , ושאר הרכיבים מועתקים כך שנשמר ההפרש בין תדירותם לתדירות הרכיב הגבוהה. להדגמת תופעה זו נבחן אות המרכב מסכום של שני אותות הרמוניים:

$$s(n) = A[\cos(\omega_1 n + \theta_1) + \alpha \cos(\omega_2 n + \theta_2)] = a(n) \cos \Phi(n), \quad (4.ה)$$

$$0 < \alpha \ll 1$$

לאחר כפל הפזה בגורם  $Q$  ניתן לקרב את האות ע"י הבטוי הבא [30]:

$$s_Q(n) \triangleq a(n) \cos Q\Phi(n) \approx A\{\cos Q(\omega_1 n + \theta_1) + \frac{\alpha(1+Q)}{2} \cos[(n\omega_1 + \Delta\omega)n + n\theta_1 + \Delta\theta] + \frac{\alpha(1-Q)}{2} \cos[(n\omega_1 - \Delta\omega)n + n\theta_1 - \Delta\theta]\}, \quad (5.ה)$$

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1, \quad \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

לנתוח משוואה (5.ה) נציב בה ערך טפוסי לגורם  $Q$  [5]:  $Q=2$ . מתקבל שתדירות הרכיב הדומיננטי מכפלת; משני צידיו, בהפרש התדירות המקורי  $\Delta\omega$ , מופיעים רכיבים התלויים באמפליטודת הרכיב החלש המקורי; הרכיב שבצד המקורי חזק ביחס לרכיב הדמות (image).

מסקנה: לאופי האות, לרוחב הפס של ערוצי התדר ולמידת ההפרדה ביניהם השפעה מכרעת על טיב מערכת ה-FDHS.

#### מודל לפעולת מערכת ה-FDHS

לצורך הפשטות נדון בשנוי סקלה ביחס  $Q=2$  בלבד. אם תדירות האות מגבלת ע"י  $0 < \omega < \pi/2$ , נניח שתדירותו מכפלת כתוצאה מכפל הפזה. אם תדירות האות היא בתחום  $\pi/2 < \omega < \pi$ , יתקבל - לאחר כפל הפזה - קפול בתדר (aliasing). נתאר את פעולת כפל הפזה במשור  $z$  בעזרת המודל הבא, הכולל את תופעת הקפול:

$$X(z) \rightarrow \frac{1}{2} [X(z^{1/2}) + X(-z^{1/2})] \quad (6.ה)$$

נפתח את הקשר שבין אות מוצא המערכת (המתוארת בציור ה-1) לאות המבוא. התמרת אותות פסי התדר ניתנת ע"י:

$$X_k(z) = \frac{1}{R} \sum_{l=0}^{R-1} X(z^{1/R} W_M^k W_R^{-l}) H(z^{1/R} W_R^{-l}), \quad (7.ה)$$

$k=0,1,\dots,M-1$

לאחר הכפלת הפזה מתקבל אות בעל ההתמרה:

$$\frac{1}{2R} \sum_{l=0}^{R-1} \{X((z^{1/2})^{1/R} W_M^k W_R^{-l}) H((z^{1/2})^{1/R} W_R^{-l}) + X((-z^{1/2})^{1/R} W_M^k W_R^{-l}) H((-z^{1/2})^{1/R} W_R^{-l})\} \quad (8.ה)$$

במוצא מסנן הסנטזה של הערוץ ה-k יתקבל אות בעל ההתמרה:

$$F(z W_M^{-k}) = \frac{1}{2R} \sum_{l=0}^{R-1} \{X(z W_R^{-l}) H(z W_R^{-l} W_M^{-k}) + X(z W_R^{-l} (-1)^{1/(2R)}) H(z W_R^{-l} W_M^{-k} (-1)^{1/(2R)})\} =$$

$$= F(z W_M^{-k}) \frac{1}{2R} \sum_{l=0}^{2R-1} X(z W_{2R}^{-l}) H(z W_{2R}^{-l} W_M^{-k}), \quad k=0,1,\dots,M-1$$

(9.ה)

תפוקות מסנני הסנטזה מסוכמות ומתקבל אות מוצא בעל ההתמרה:

$$Y(z) = \frac{1}{2R} \sum_{l=0}^{2R-1} X(z W_{2R}^{-l}) \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} F(z W_M^{-k}) H(z W_{2R}^{-l} W_M^{-k}) \quad (10.ה)$$

הקשר בין אות המבוא  $X(z)$  לאות המוצא  $Y(z)$  זהה לקשר המתקבל במערך המסננים ה"רגיל", שאינו כולל את כפל הפזה (ראה למשל משוואה (5.1)), ועם יחס דצימציה בשעור  $2R$ .  $R=M/2$  הוא יחס הדצימציה הקריטי במערכת FDHS, עקב הכפלת רוחב הפס של אותות פסי התדר.

### סכום

מהפתוח לעיל נצפה ששיטת תכנון מערך המסננים, אשר הוצגה בפרק 5, נתנת ליישום במערכות FDHS. בשיטה זו מושם דגש על הנחתת גורמי העוות העקריים באות היציאה, אשר - במערכת FDHS הם, כפי הנראה:

- התחזות (aliasing) בתחום התדר;
- חדירת אותות בין פס תדר למשנהו במערך האנליזה, אשר פוגעת בהנחה שאותות פסי התדר מכילים, בקרוב, הרמוניה בודדת.

References

\*\*\*\*\*

- [1] A. Dembo and D. Malah, "Statistical Design of Analysis/Synthesis Systems with Quantization", *IEEE trans. on ASSP*, vol. 36, no. 3, March 1988, pp. 328-341.
- [2] A. Dembo, "Design of Digital FIR Filter Arrays", *D.Sc. Thesis, Technion - Israel Institute of Technology*, May 1986.
- [3] J.M. Tribolet and R.E. Crochiere, "Frequency Domain Coding of Speech", *IEEE trans. on ASSP*, vol. 27, no. 5, October 1979, pp. 512-530.
- [4] L.S. Lee, G.C. Chon and C.S. Chang, "A New Frequency Domain Speech Scrambling System which Does not Require Frame Synchronization", *IEEE trans. on Comm.*, vol. 32, no. 4, April 1984, pp. 444-457
- [5] D. Malah and J.L. Flanagan, "Frequency Scaling of Speech Signals by Transform Techniques", *BSTJ*, vol. 60, no. 9, November 1981, pp. 2107-2156.
- [6] R.E. Crochiere and L.R. Rabiner, *Multirate Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.
- [7] P.P. Vaidyanathan, "Theory and Design of M-Channel Maximally Decimated Quadrature Mirror Filters with Arbitrary M, Having the Perfect-Reconstruction Property", *IEEE trans. on ASSP*, vol. 35, no. 4, April 1987, pp. 476-492.
- [8] L.R. Rabiner and R.W. Schafer, *Digital Processing of Speech Signals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1978.
- [9] M.R. Portnoff, "Time-Frequency Representation of Digital Signals and Systems Based on Short Time Fourier Analysis", *IEEE trans. on ASSP*, vol. 28, February 1980, pp. 55-69.

- [10] Z. Shpiro, "Analog Speech Scrambling by Means of Discrete Short Time Fourier Transform", M.Sc. thesis, Technion - Israel Institute of Technology, November 1983.
- [11] K. Swaminathan and P.P. Vaidyanathan, "Theory and Design of Uniform DFT, Parallel, Quadrature Mirror Filter Banks", *IEEE trans. on Circuits and Systems*, vol. 33, no. 12, December 1986, pp. 1170-1191.
- [12] J.H. Rothweiler, "Polyphase Quadrature Filters - A New Subband Coding Technique", *proc. IEEE Int. Conf. on ASSP, Boston, 1983*, pp. 1280-1283.
- [13] P.L. Chu, "Quadrature Mirror Filter Design for an Arbitrary Number of Equal Bandwidth Channels", *IEEE trans. on ASSP*, vol. 33, no. 1, February 1985, pp. 203-218.
- [14] J.P. Princen and A.B. Bradley, "Analysis/Synthesis Filter Bank Design Based on Time Domain Aliasing Cancellation", *IEEE trans. on ASSP*, vol. 34, no. 5, October 1986, pp. 1153-1161.
- [15] M.J.T. Smith and T.P. Barnwell, "A procedure for Designing Exact Reconstruction filter Banks for Tree-Structured Subband Codes", *proc. IEEE Int. Conf. on ASSP, 1984*, pp. 27.1.1-27.1.4
- [16] N.S. Jayant and P. Noll, *Digital Coding of Waveforms*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1984.
- [17] R.V. Cox and R.E. Crochiere, "Real Time Simulation of Adaptive Transform Coding", *IEEE trans. on ASSP*, vol. 29, no. 2, April 1981, pp. 147-154.
- [18] R.G. Gallager, *Information Theory and Reliable Communication*, John Wiley and Sons, 1968.
- [19] J. Makhoul, S. Roucoux and H. Gish, "Vector Quantization in Speech Coding", *Proc. IEEE*, vol. 73, no. 11, November 1985, pp. 1551-1588.
- [20] R.M. Gray, J.C. Kieffer and Y. Linde, "Locally Optimal Block Quantizer Design", *Information and Control* 45, 1980, pp. 178-198.



- [21] Y. Linde, A. Buzo, R.M. Gray, "An Algorithm for Vector Quantizer Design", *IEEE trans. on Comm.*, vol. 28, no. 1, January 1980, pp. 84-95.
- [22] J.H. Chen and A.L. Gersho, "Gain-Adaptive Vector Quantization with Application to Speech Coding", *IEEE trans. on Comm.*, vol. 35, no. 9, September 1987, pp. 918-930.
- [23] R.M. Gray, "Vector Quantization", *IEEE ASSP Magazine*, April 1984, pp. 4-29.
- [24] R. Arad, "Scalar and Vector Quantization in Subband Coding of Speech", M.Sc. thesis, Technion - Israel Institute of Technology, October 1986.
- [25] S.A. Tretter, *Introduction to Discrete-Time Signal Processing*, John Wiley and Sons, 1976.
- [26] M.A. Krasner, "The Critical Band Coder - Digital Encoding of Speech Signal Based on the Perceptual Requirements of the Auditory Systems", *Proc. IEEE Int. Conf. on ASSP*, 1980, pp. 327-331.
- [27] M.R. Schroeder, B.S. Atal and J.L. Hall, "Optimizing Digital Speech Coders by Exploiting Masking Properties of the Human Ear", *J. of the Acoust. Soc. of Am.*, vol. 66(6), December 1979, pp. 1647-1652.
- [28] A.V. Oppenheim and R.W. Schaffer, *Digital Signal Processing*, Prentice - Hall, 1975.
- [29] H.V. Sorensen et al, "Real-Valued Fast Fourier Transform Algorithms", *IEEE trans. on ASSP*, vol. 35, no. 6, June 1987, pp. 849-863.
- [30] R.E. Bogner and J.L. Flanagan, "Frequency Multiplication of Speech Signals", *IEEE trans. on Audio and Electroacous.*, vol. 17, no. 3, September 1969, pp. 202-208.

DESIGN OF UNIFORM DFT FILTER BANKS  
OPTIMIZED FOR SUB-BAND CODING OF SPEECH

RESEARCH THESIS  
SUBMITTED IN PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS  
FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE  
IN ELECTRICAL ENGINEERING

B Y

AHARON SATT

SUBMITTED TO THE SENATE OF THE TECHNION - ISRAEL INSTITUTE OF TECHNOLOGY  
SIVAN 5748 H A I F A JUNE 1988

*This research was carried out in the faculty of Electrical Engineering under the supervision of Prof. David Malah*

*The generous support of the Guttwirth Fund is gratefully acknowledged.*

*I wish to express my deep gratitude to Prof. David Malah, for proposal of the research subject and for dedicated guidance throughout the research. Also, I would like to thank Dr. Amir Dembo for helpfull comments, Mr. Yoram Or-Chen and Mrs. Ziva Avni for their help and encouragement, and the signal-processing lab staff.*

## Contents

\*\*\*\*\*

	Page
Abstract . . . . .	1
List of Abbreviations . . . . .	3
Chapter 1 - Introduction . . . . .	4
Chapter 2 - Filter Banks - Theory Review . . . . .	7
2.1 Introduction . . . . .	7
2.2 The Uniform DFT Filter Bank . . . . .	8
2.3 Properties of the Uniform DFT Filter Bank . . . . .	13
2.4 The QMF Bank . . . . .	20
2.5 Generalized QMF Banks with Perfect-Reconstruction . . . . .	22
Chapter 3 - Sub-Band Coding of Signals . . . . .	26
3.1 Introduction . . . . .	26
3.2 Scalar Quantization . . . . .	27
3.3 Scalar Quantization of the Sub-Band Signals . . . . .	29
3.4 Vector quantization . . . . .	33
3.5 Vector Quantization of the Sub-Band Signals . . . . .	38
Chapter 4 - Design of Analysis/Synthesis Systems via Statistical Error Criterion . . . . .	40
4.1 Introduction . . . . .	40
4.2 The Analytical Model of Quantization . . . . .	41
4.3 The Statistical Error Criterion . . . . .	45
4.4 Design of Optimal Synthesis Filters . . . . .	47
4.5 An Iterative Algorithm for Designing the Analysis/ Synthesis Filters . . . . .	50
4.6 Simulation Results . . . . .	52
4.7 Conclusions . . . . .	62
Chapter 5 - Filter Banks Design based on Frequency Domain Criteria . . . . .	65
5.1 Introduction . . . . .	65
5.2 The Frequency Domain Error Criteria . . . . .	66

Contents (Cont.)

=====

	Page
5.2.1 The Analytical Model and the Distortion Components . . . . .	66
5.2.2 Definition of the Distortion Function . . . . .	68
5.3 Analysis/Synthesis Filter Design . . . . .	71
5.3.1 The Design Equations . . . . .	71
5.3.2 Discussion on White Quantization Noise . . . . .	72
5.4 An Iterative Design Algorithm . . . . .	74
5.4.1 The Iterative Algorithm . . . . .	74
5.4.2 Design Example . . . . .	77
Chapter 6 - Implementation of Sub-Band Speech Coders . . . . .	80
6.1 Introduction . . . . .	80
6.2 A 16Kbits/sec Sub-Band Coder . . . . .	81
6.3 comparison Between Sub-Band Coders . . . . .	85
Chapter 7 - Summary and Conclusions . . . . .	87
Appendix A - Constructing the Synthesis Filter Design Equations for Vector Quantization . . . . .	89
Appendix B - The Power Spectrum of the Filter-Bank Output Noise . . . . .	91
Appendix C - Expressions for the Filter Design Equations . . . . .	94
Appendix D - Proof of Arguments 5.1, 5.2 . . . . .	107
Appendix E - Design of Frequency Domain Harmonic Scaling Systems . . . . .	109
References . . . . .	114

**Abstract**

\*\*\*\*\*

This research deals with sub-band coding of speech signals using Uniform DFT Filter-Banks, and techniques for designing the filters. The work is divided into two parts:

- a. Applying the statistical filter design approach presented by A. Dembo, and evaluating its performance.
- b. Developing a filter design technique based on a spectral error criterion, which yields high quality sub-band coders (SBC). This SBC effects substantial reduction in arithmetic operations required for its implementation as compared to commonly used Quadrature Mirror Filter (OMF)-based SBC.

Sub-band coding is a widely used method for transmission of digital speech signals at the rates of 9.6-16Kbits/sec. In an SBC, the signal is divided into separate bands (typically eight), by using an analysis filter-bank. The band-signals are decimated, and are typically quantized by scalar quantizers (at the higher rate) or by vector quantizer (at the lower one). The speech is reconstructed from the quantized band-signals using a synthesis filter-bank.

The filter bank has a major effect on the quality of the synthesized speech. Usually, the filter-bank is required to cancel the aliasing (due to the decimation of the sub-band signals) in the output signal, and approximate a unity system (in the absence of quantization). The filter-bank which is the most complex part of a medium-rate SBC using scalar quantization, is also required to be of low complexity.

Partial solutions to these problems were obtained using FIR filter-banks. Two common types of filter banks are The OMF bank and the uniform DFT filter-bank. The OMF bank is designed to completely cancel the aliasing, and to provide a close approximation to the unity system. Its drawback is its relatively high implementation complexity. On the other hand, the DFT filter bank can be implemented in much lower complexity than the OMF bank, for similar band separation.

However, the subjective quality of the DFT based SBC, obtained by known filter design techniques, is much lower.

The statistical filter design approach aims to design low-distortion and low-complexity SBC, using the uniform DFT filter bank. It address the two following problems:

- a. Designing optimal filters, which minimize the overall distortion, including the quantization effect.
- b. The usual mean-square-error criterion is not applicable, since the output error signal is not stationary (due to the decimation and interpolation).

Overcoming these problems, a statistical error criterion was developed, which is used to define the optimal filters.

In the first part of this work, the statistical design method was applied, and an SBC which utilizes the optimal filters was simulated. Design examples and simulation results are presented.

From the simulations, it was found that the subjective quality of the synthesized speech for medium rate (e.g. 16Kbits/sec) is not adequate. The causes for the quality degradation are explained, and recomendations for improvement are given.

In the second part of the work, a spectral error criterion is developed, which separates between the error terms, and enables to reduce the subjective distortion by assigning appropriate weights to the error terms.

Based on the spectral error criterion, a filter design method is presented. A 16Kbits/sec SBC based on uniform DFT filter bank, which utilizes the improved filters was simulated. It was found to have similar performance to QMF-based SBC, but effecting about 60% reduction in computations as compased to the QMF bank.

Concluding this work, subjects for further research are proposed, in particular the design of optimal filters for Frequency Domain Harmonic Scaling systems, used for change the time or frequency scale of speach signals.