

עיבוד ספרתי של אותות – 046745

Digital Signal Processing

קובץ שקפים להרצאות

מרצה: פרופ' דוד מלאך (חורף תש"ע)

malah@ee.technion.ac.il

חורף תש"ע

ד. מלאך עיבוד ספרתי של אותות – 046745

פירוט נושאי הקורס

1. השפעת אורך מלה סופי (קוונטיזציה) במסננים ספרתיים

מקורות שגיאה, מודלים סטטיסטיים להעגלה/קיצוץ באריתמטיקות של נקודה קבועה ונקודה צפה, חישוב שונות השגיאה, התאמת התחום הדינמי למניעת גלישה, תופעת ה-Limit Cycle, כימוי מקדמי המסנן וההשפעה על תגובת המסנן ויציבותו.

2. שערך ספקטרום ההספק של אותות אקראיים

מושגי יסוד בשערך פרמטרים, אנליזה ספקטרלית של אותות אקראיים, קווריאנס הדגם, שיערוך הקווריאנס, פריודוגרמה ותכונותיה הסטטיסטיות, מיצוע פריודוגרמות (Bartlett) פריודוגרמת Welch, פריודוגרמה מוחלקת, שערך פרמטרי של ספקטרום ההספק.

3. עיבוד רב-קצבים (Multirate) של אותות

דצימציה, אינטרפולציה, מערכות דואליות, דצימציה/אינטרפולציה ביחסים רציונליים, מסנני פוליפאזה, תכן של מסנני דצימציה/אינטרפולציה, מערכות מרובות דרגות למימוש יעיל של מערכות דצימציה/אינטרפולציה ומסננים צרי סרט, שימוש במסנני Half-band.

פירוט נושאי הקורס - המשך

4. מערכי מסננים (Filter Banks)

מערך מסננים דו-ערוצי, ביטול קיפולים ושחזור מושלם, מסנני quadrature mirror (QMF), מסנני conjugate quadrature (CQF) לשחזור מושלם, מערכי מסננים במבנה עץ, מערך אחיד של מסנני DFT, מערכי מסננים בעלי M פסים (M-band).

5. התמרת פוריה לזמן קצר (STFT - Short-time Fourier transform)

הגדרה, מוטיבציה, אינטרפרטציות, התמרת פוריה לזמן-קצר הדיסקרטית (DSTFT), אנליזה/סינתזה באמצעות ה-DFT (FFT), דצימציה ואינטרפולציה, מודיפיקציה של ה-DSTFT, תנאי Portnoff לשחזור מדויק, אנליזה/סינתזה בשיטת WOLA (weighted-overlap-add), קשר למערך אחיד של מסנני DFT, ייצוג Gabor.

6. מבוא ל-Wavelets

אנליזה זמן-תדר, פונקציות Wavelet ותכונותיהן, התמרת Wavelet דיסקרטית (DWT), אנליזה מרובת רזולוציות, מערך מסנני Wavelet, שימושים.

מקורות ספרות

1. B. Porat, *A Course in Digital Signal Processing*, J. Wiley & Sons, 1997.
2. S. J. Mitra, *Digital Signal Processing*, 2nd/3rd ed., McGraw Hill Int'l ed., 2001/2006.
3. J.G. Proakis and D. G. Manolakis, *Digital Signal Processing*, 3rd/4th ed., Prentice Hall, 1996/2007.
4. A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-time Signal processing*, 2nd ed., Prentice Hall, 1999.
5. C. S. Burrus, R. A. Gopinath, and H. Guo, *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms – A Primer*, Prentice Hall, 1998.

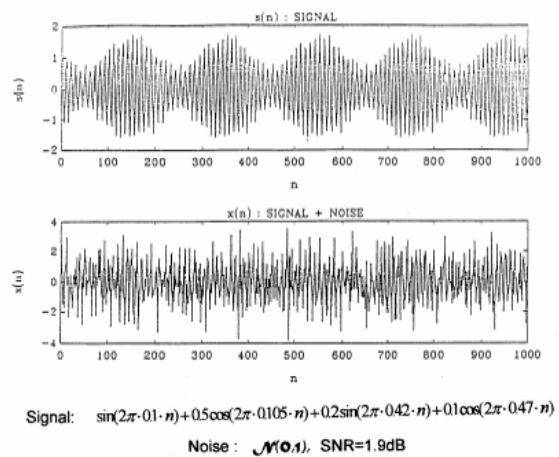
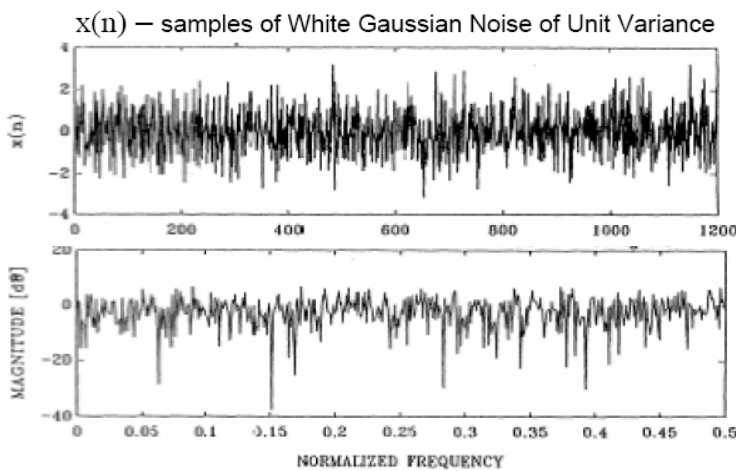
046745 – עיבוד ספרתי של אותות

Digital Signal Processing

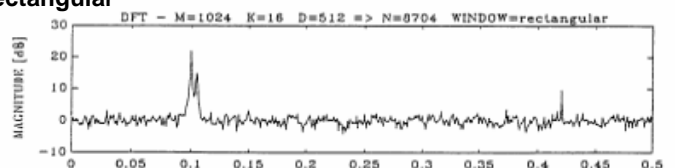
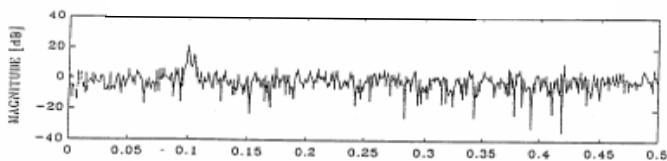
Application Examples

Examples - 1

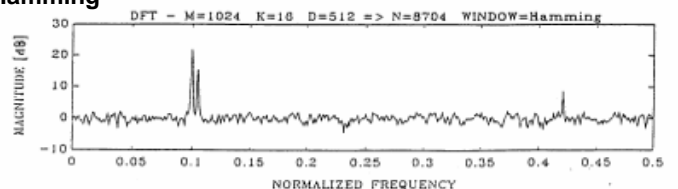
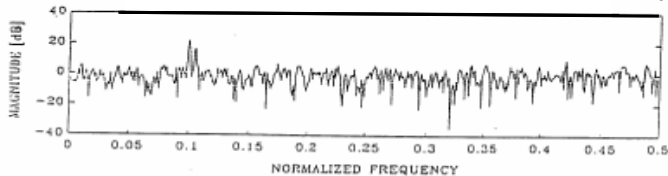
Power Spectrum Estimation



Window = Rectangular

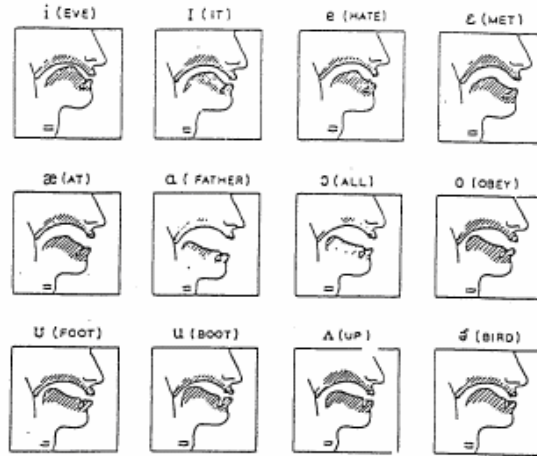


Window = Hamming

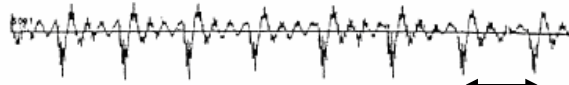


Examples - 2

אות דיבור כדוגמה לאות שתכונותיו הספקטרליות משתנות בזמן

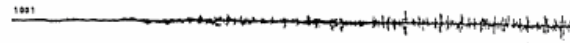


אות דיבור קולי
(Voiced – a,e,u,o,i)

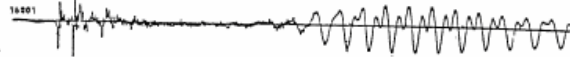


מחזור Pitch

אות דיבור א-קולי
(Un-Voiced – s,f,sh)



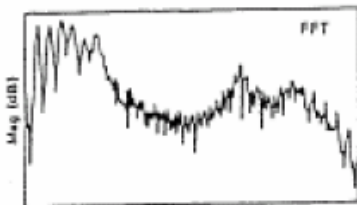
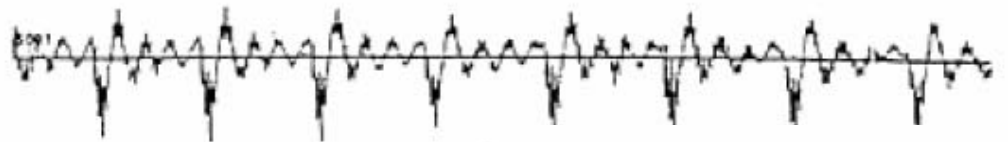
"פוצץ"
(Plosive – p,k,t,b)



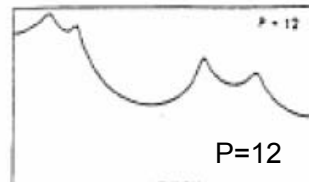
Examples - 3

Example: Analysis of a Speech Signal

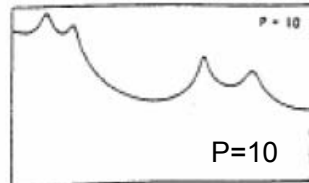
אות דיבור קולי
(Voiced – a,e,u,o,i)



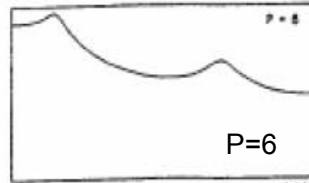
FFT



P=12

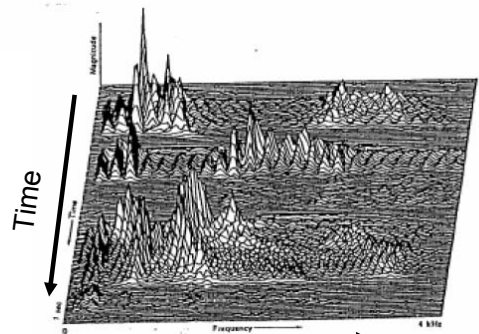


P=10

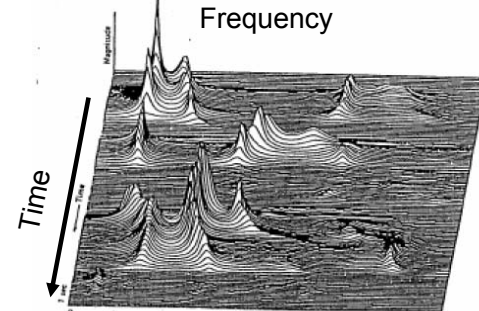


P=6

LPC



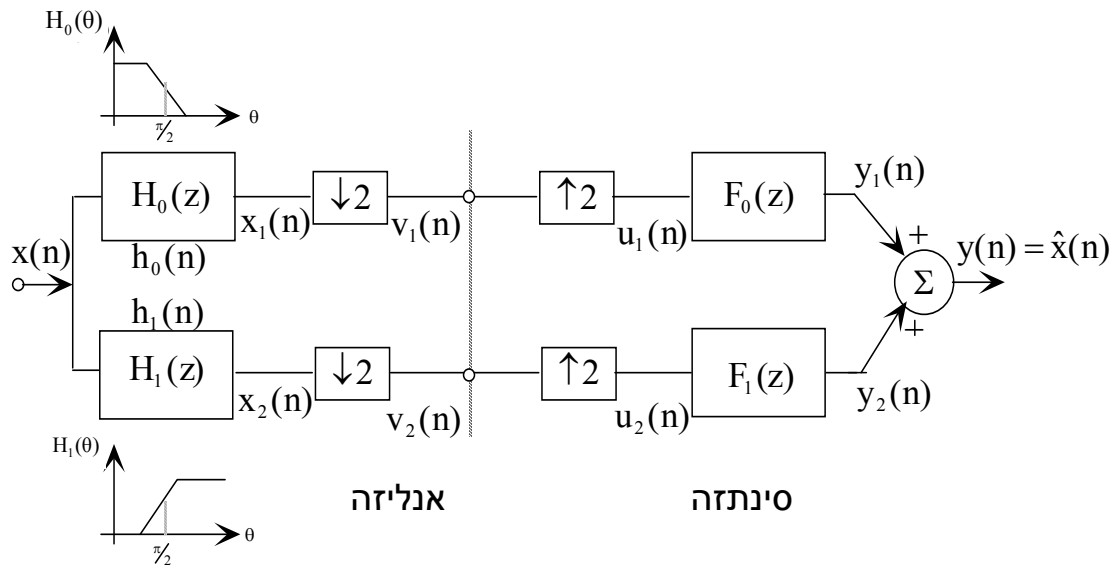
FFT



LPC

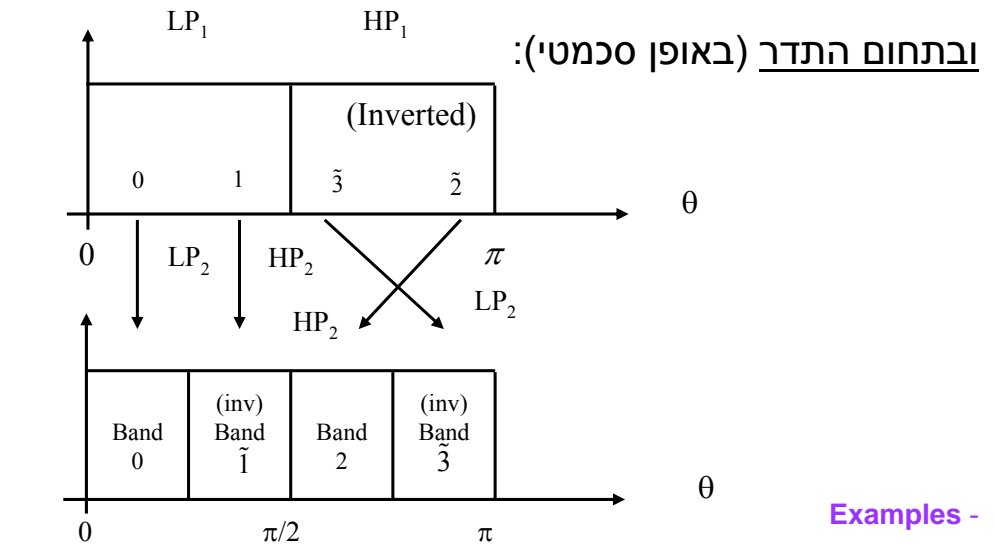
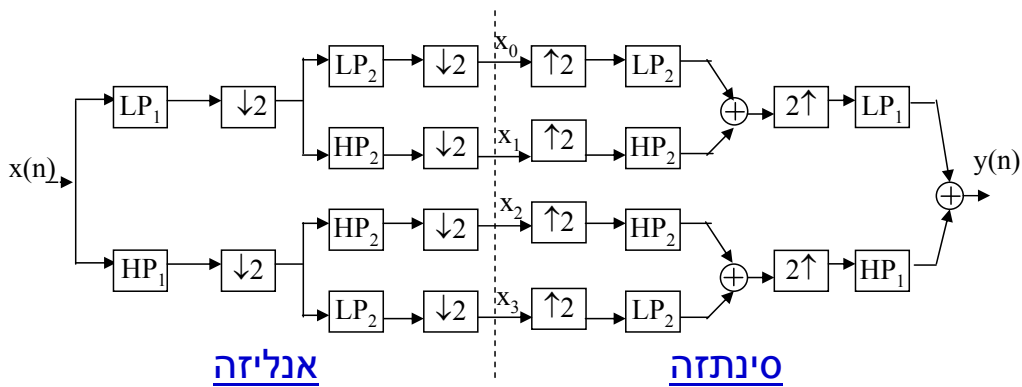
Examples - 4

מערך מסננים דו-ערוצי



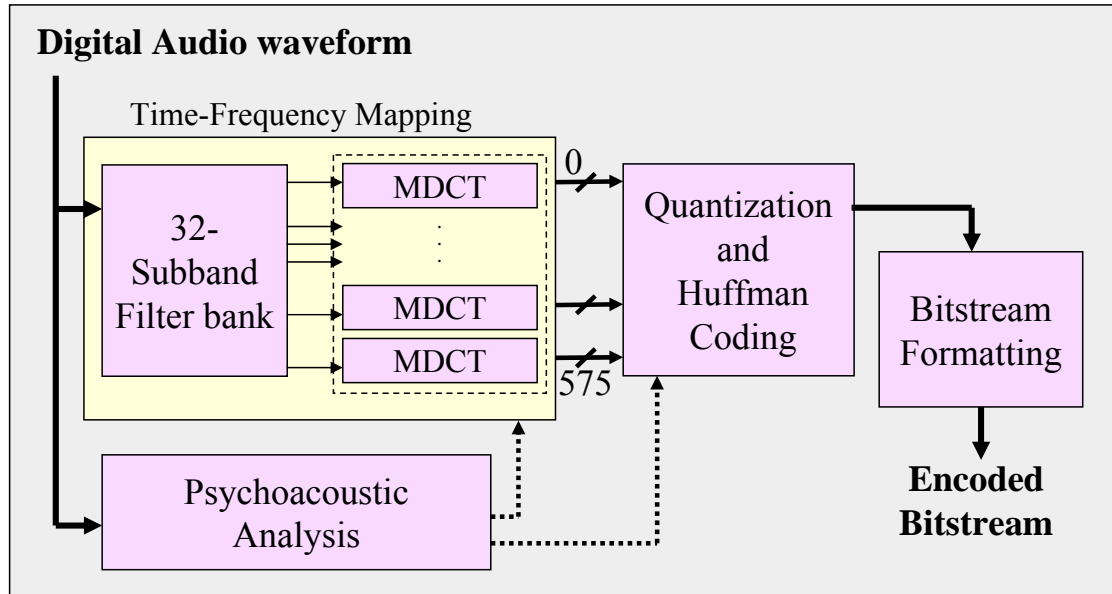
Examples - 5

מערכי מסננים במבנה עץ



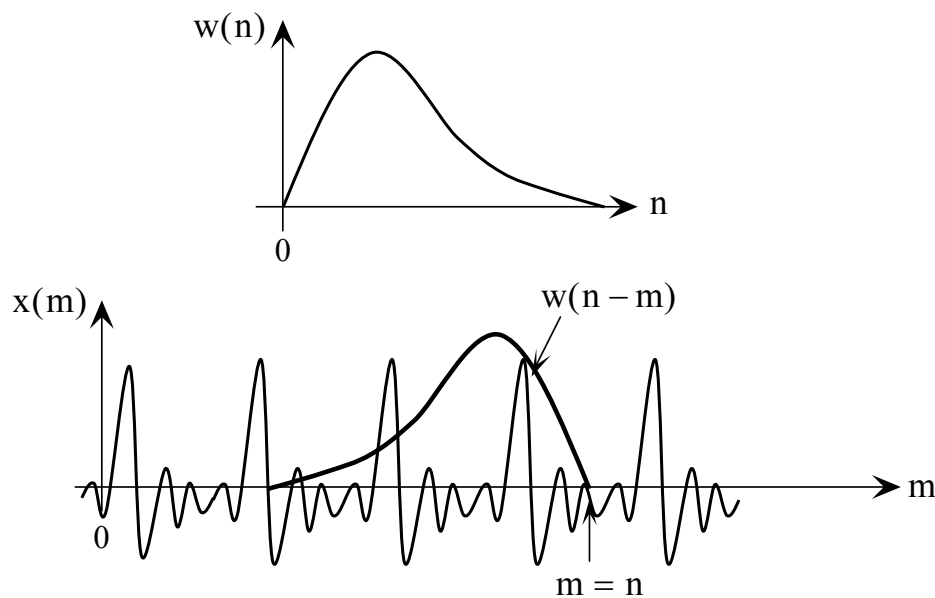
Examples - 6

MP3 Audio Encoder



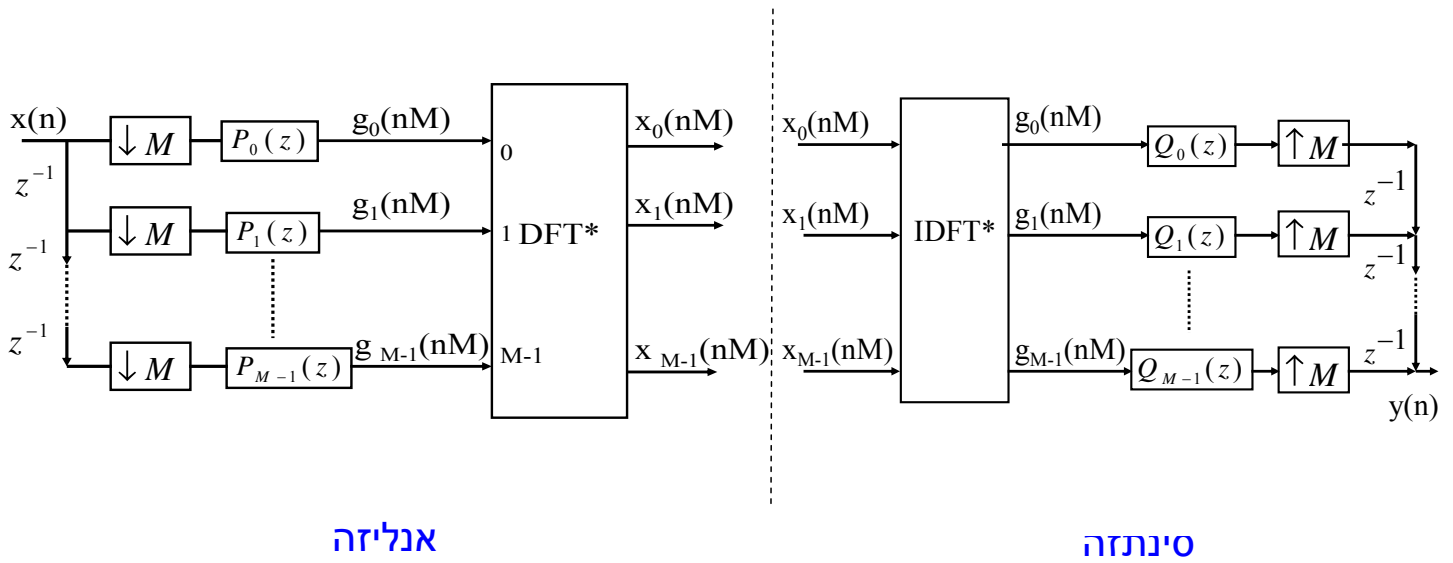
Examples - 7

Short-time Fourier Transform (STFT)



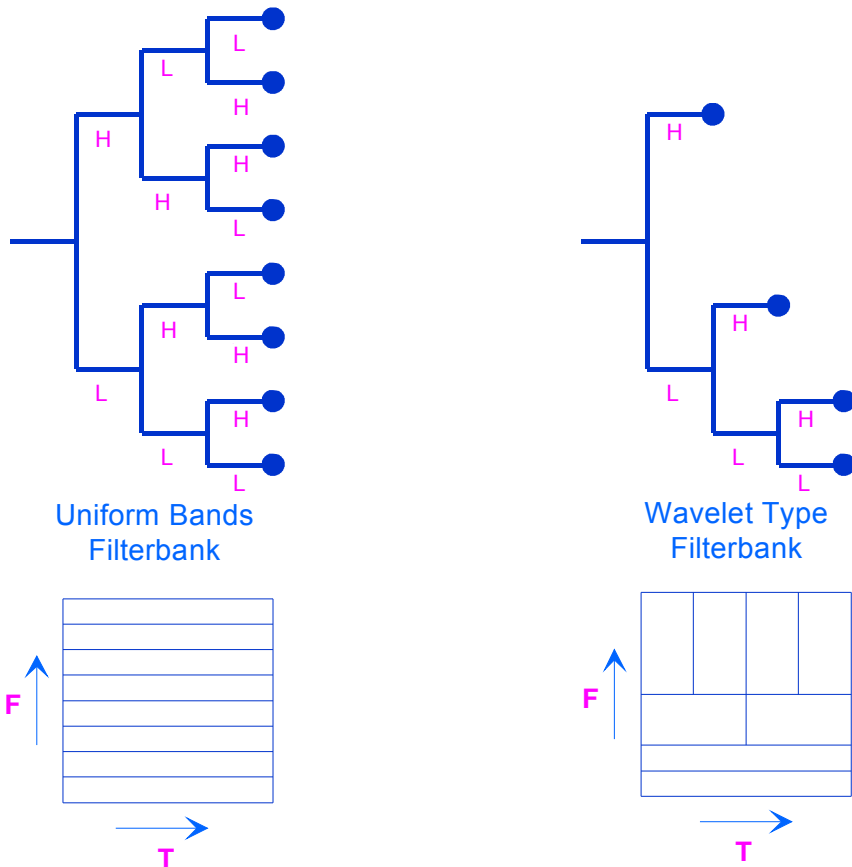
Examples - 8

DSTFT as a Uniform DFT Filter-bank



Examples - 9

Tree Structured Filter-Banks



Examples - 10

Wavelet Filter-Bank

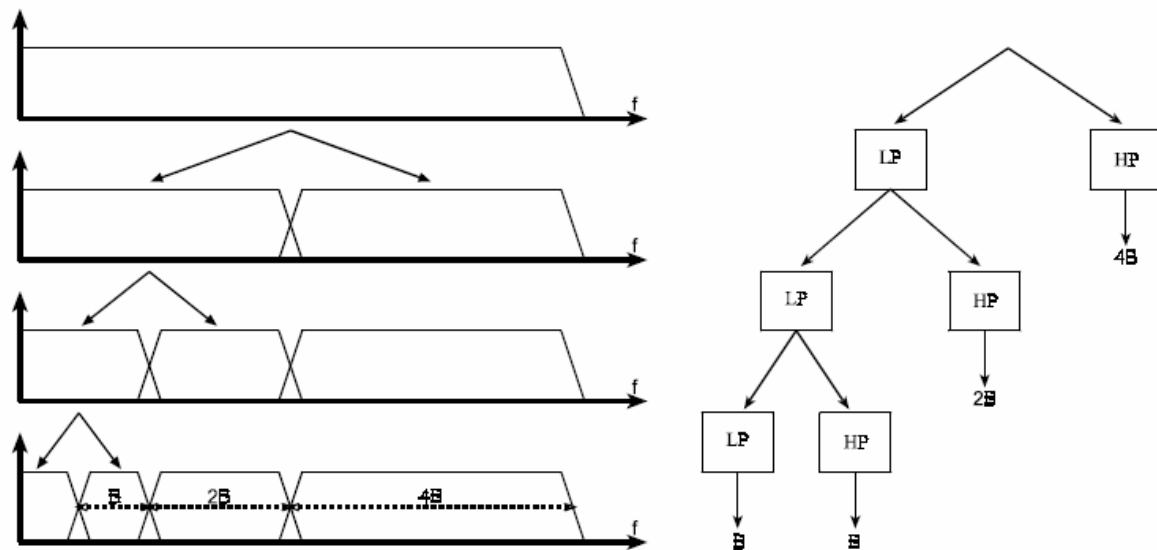
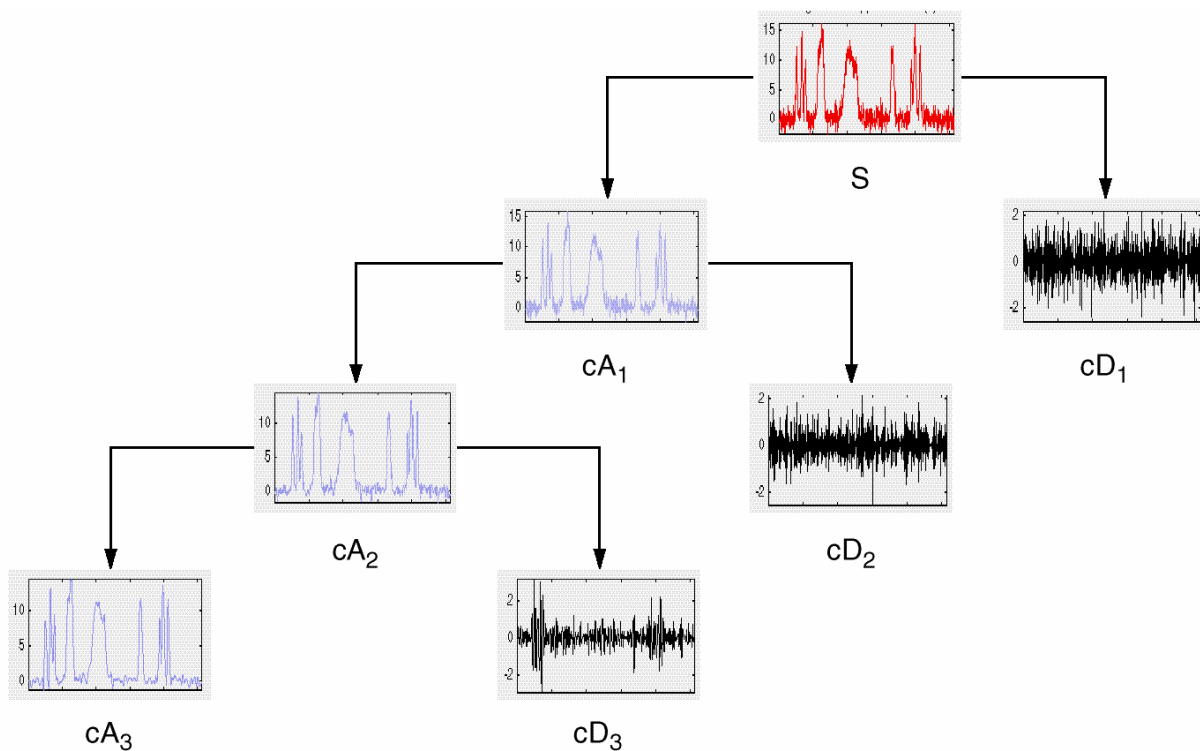


Figure 4
Splitting the signal spectrum with an iterated filter bank.

Examples - 11

Wavelet Decomposition



Examples - 12

Separable 2-D Wavelet Analysis

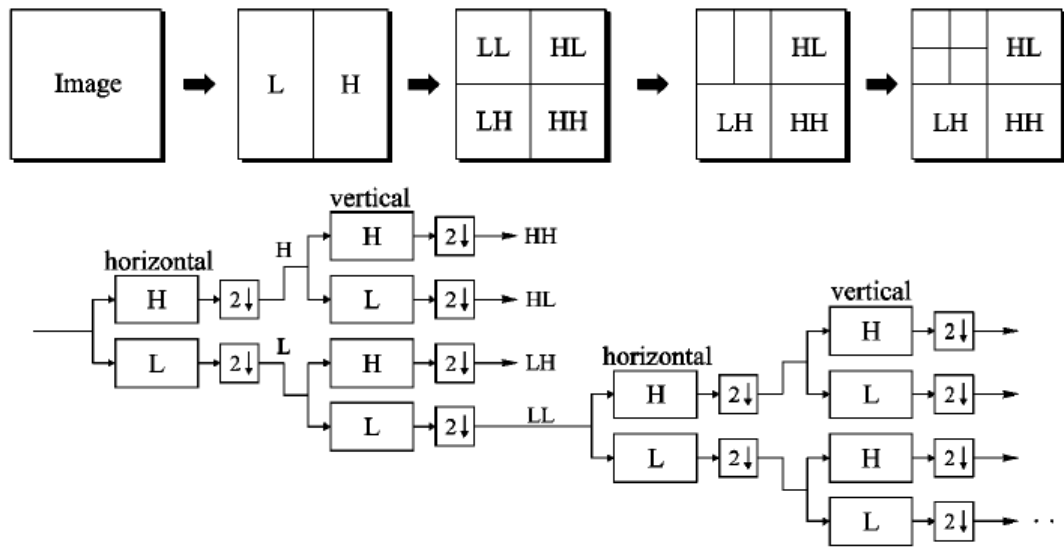
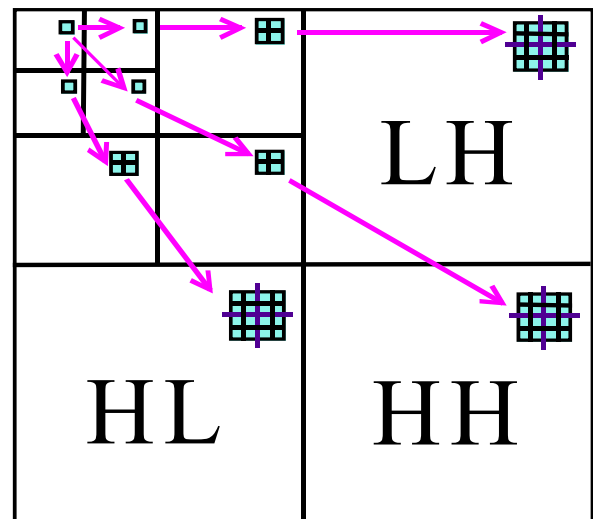
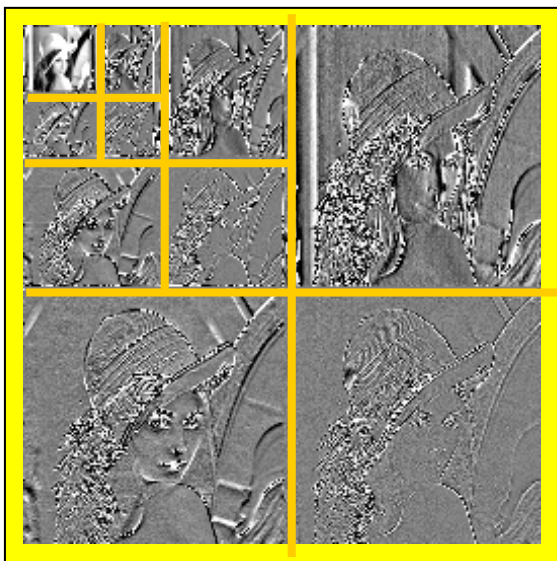


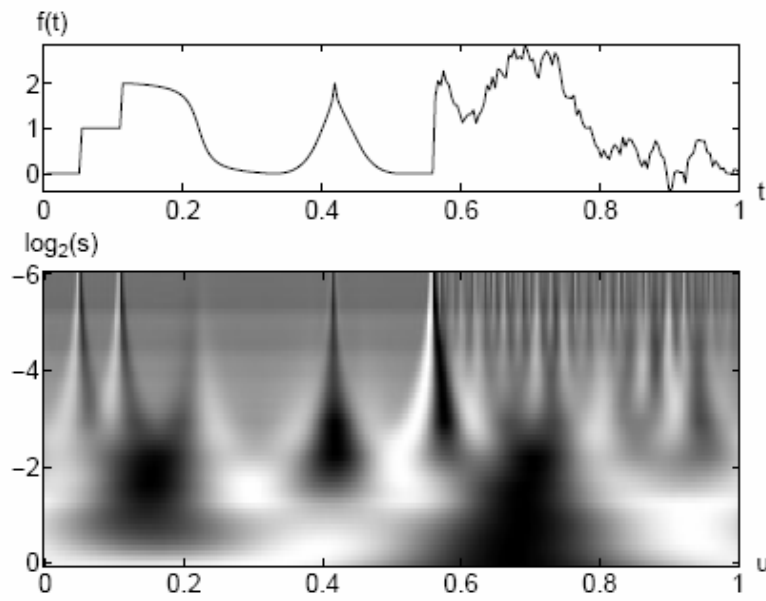
Figure 6.31. Separable two-dimensional octave-band filter bank.

A. Mertins, *Signal Analysis: Wavelets, Filter Banks, Time-Frequency Transforms and Applications*, J. Wiley, 1999.

Wavelet Transform in 2D



Wavelet Analysis



האיור מהספר: S. Mallat: *A Wavelet Tour* Academic Press 1998

Examples - 15

END

Examples - 16

1. השפעת אורך מלה סופי (קוונטיזציה)

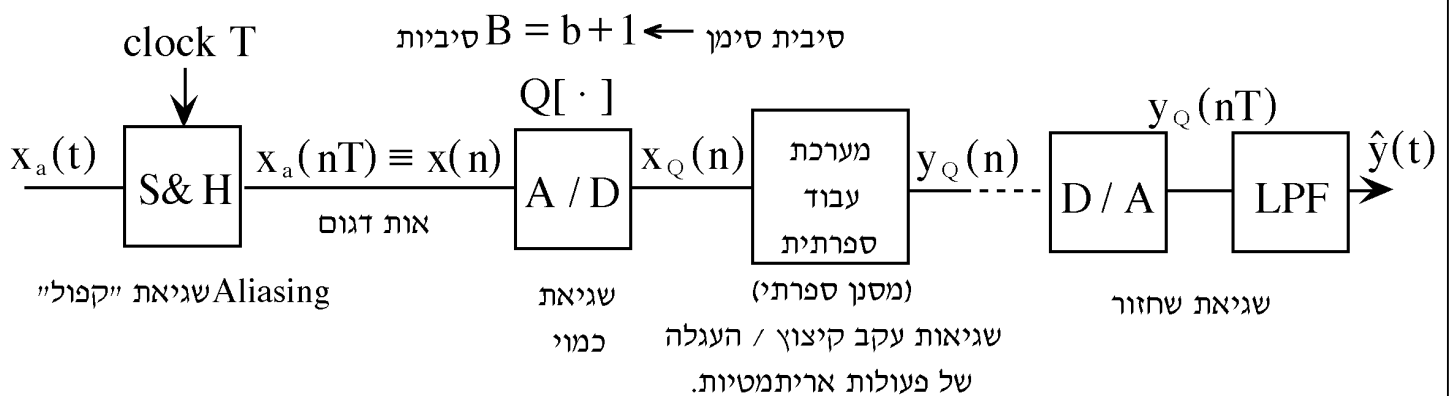
במסננים ספרתיים

Finite word-length Effects in Digital filters

- מקורות שגיאה.
- מודלים סטטיסטיים להעגלה/קיצוץ.
- נקודה קבועה.
- נקודה צפה.
- חישוב שונות השגיאה.
- התאמת התחום הדינמי למניעת גלישה.
- תופעת ה-Limit Cycle.
- כימוי מקדמי המסנן וההשפעה על תגובת המסנן ויציבותו.

מקורות ספרות: 1 – Ch. 11 Porat 2 – Ch. 9/12 Mitra 3 – Ch. 79/ Proakis 4 – Ch. 6 Oppenheim

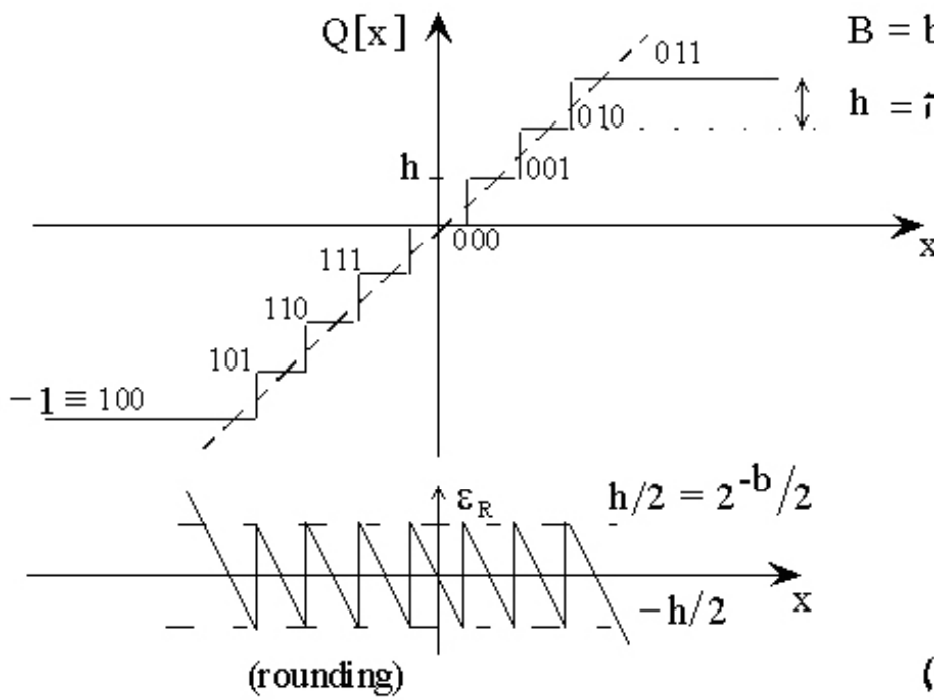
מערכת טיפוסית ומקורות שגיאה



מקורות שגיאה הקשורים לאורך מלה סופי

- (1) קוונטיזציה (כימוי) בכניסה (A/D) - ייצוג ב- 2^B רמות בלבד.
- (2) קיצוץ/העגלה של פעולות אריתמטיות+שגיאות עקב גלישה (נמנע ע"י Scaling).
- (3) אי דיוק במקדמי המסנן ← סטייה מהתגובה המתוכננת ובעיות יציבות.

אפייני קוונטיזציה



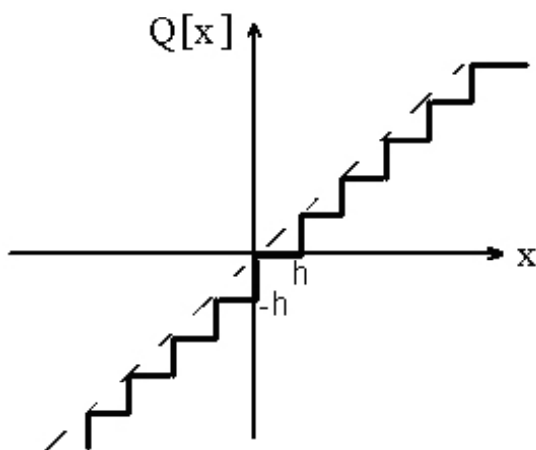
בדוגמה: $B = b + 1 = 3$

$h = 2^{-b}$ צעד קוונטיזציה

$$\varepsilon_R \triangleq x_Q(n) - x(n)$$

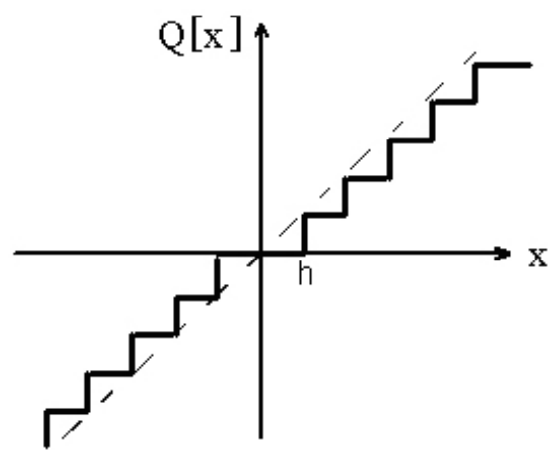
$$-\frac{1}{2}2^{-b} < \varepsilon_R \leq \frac{1}{2}2^{-b}$$

(ייצוג - המשלים ל-2)



קצוץ ערך (Value truncation)
(ייצוג - המשלים ל-2)

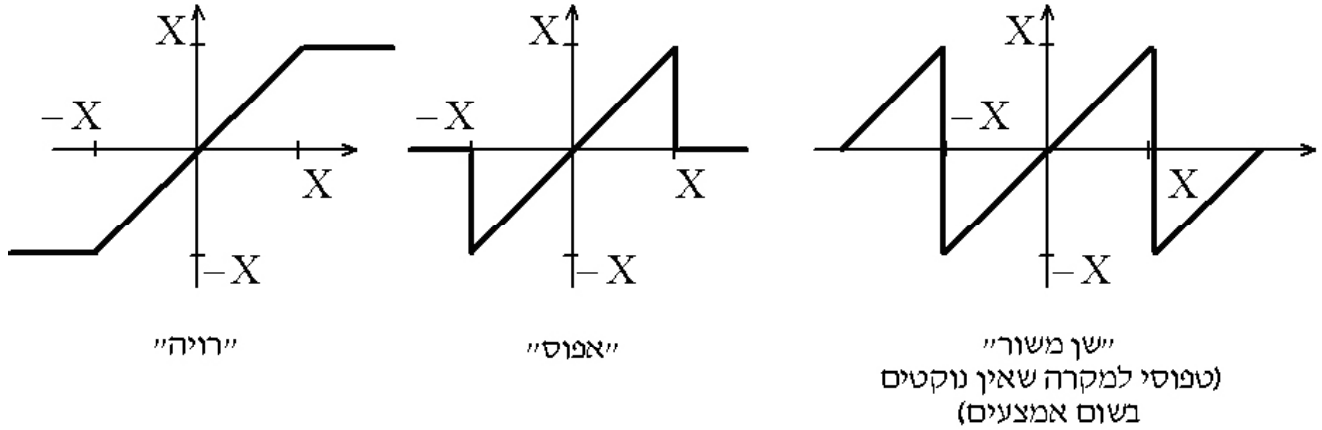
$$-2^{-b} < \varepsilon_T \leq 0$$



קצוץ אופליטודה (Mag. truncation)
(sign & Mag. - ייצוג)

$$|\varepsilon_T| < 2^{-b}$$

אפייני גלישה של פעולות אריתמטיות



שיטת המשלים ל-2 (Two's complement)

• נוחה במיוחד לבצוע פעולות אריתמטיות עם מספרים חיוביים ושליילים.

• ייצוג מספר: $d_0.d_{-1}d_{-2}...d_{-m}$; $d_i \in \{0,1\}$

$$N = -d_0 r^0 + \sum_{i=-1}^{-m} d_i r^i ; \quad r = 2 \text{ - radix}$$

$$-1 \leq N \leq 1 - 2^{-m}$$

• היפוך סימן: $(-X)_2 = (2 - X)_2$

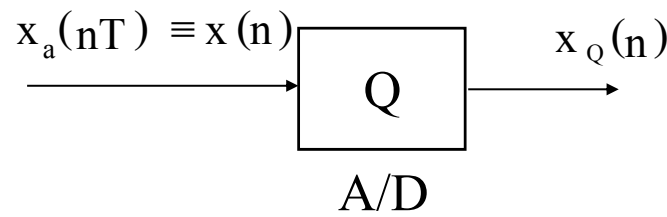
$$0.0 \overset{2^{-1}}{0} \overset{2^{-2}}{0} \overset{2^{-3}}{1} \overset{2^{-4}}{1} = 3/16 \quad \text{למשל:}$$

$$1.1 \ 1 \ 0 \ 1 = -3/16$$

• תכונה חשובה לשימושי סינון ספרתי

אם סכום n מספרים הוא קטן מיחידה (בערך מוחלט) אזי מותר שתהיה גלישה בסכומים החלקיים.

כימוי אות הכניסה



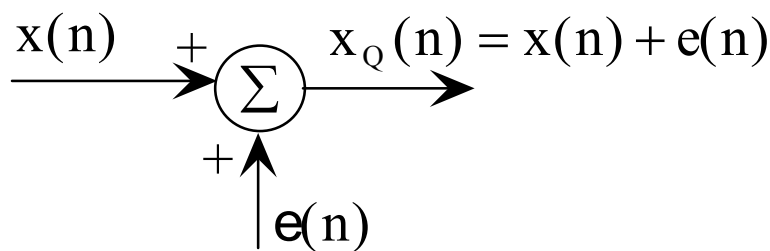
• נניח ייצוג 2's-comp. עם b סיביות + סיבית סימן:

$$B = b + 1 ; \quad h = 2^{-b}$$

$$\varepsilon_R^\Delta = Q[x] - x ; \quad -2^{-B} = \frac{-h}{2} < \varepsilon_R \leq \frac{h}{2} = 2^{-B}$$

$$|\varepsilon_R| \leq \frac{h}{2} = 2^{-B}$$

מודל סטטיסטי לחישוב השגיאה



הנחות המודל

- $x(n)$ אות אקראי סטציונרי (במובן הרחב) בעל ממוצע אפס.
- $e(n)$ היא סדרה מתוך תהליך אקראי סטציונרי (סמ"ר).
- אין קורלציה בין סדרת הרעש לסדרת הכניסה $x(n)$:

$$E \{e(n)x(n+k)\} = 0 \quad \forall k$$

הנחות המודל - המשך

• פונקצית הקווריאנס:

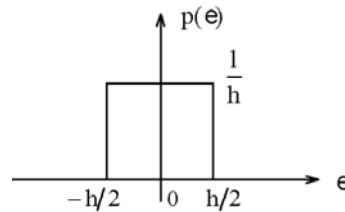
$$C_{ee}(k) \triangleq E\{(e(n) - \bar{e})(e(n+k) - \bar{e})\} = R_{ee}(k) - m_e^2 = \sigma_e^2 \delta(k)$$

כאשר, $R_{ee}(k) \triangleq E\{e(n)e(n+k)\}$ - פ' האוטוקורלציה

$$\delta(k) \triangleq \begin{cases} 0, & k \neq 0 \\ 1, & k=0 \end{cases}; \quad \sigma_e^2 \triangleq E\{(e - m_e)^2\} = E\{e^2\} - m_e^2;$$

כלומר, עבור $m_e = 0$, $e(n)$ היא סדרת רעש לבן.

• $e(n)$ מפולג אחיד על פני אינטרוול הקוונטיזציה:



עבור העגלה (Roundoff):

$$m_e = E\{e\} = 0$$

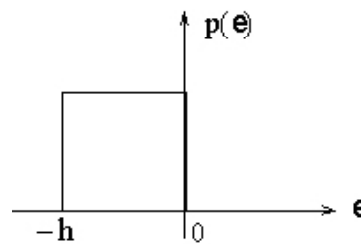
$$\sigma_e^2 = E\{(e - m_e)^2\} = \int_{-h/2}^{h/2} e^2 p(e) de = h^2 / 12 = 2^{-2b} / 12$$

1 - 9

עבור קיצוץ (Truncation):

$$m_e = -h/2$$

$$\sigma_e^2 = h^2 / 12 = \frac{2^{-2b}}{12}$$



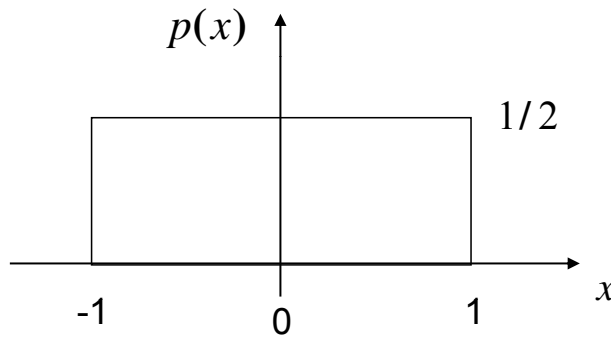
התאמה טובה עם מדידות SNR מתקבלות בתנאים הבאים:

- מס' רמות קוונטיזציה גדול מספיק ($b \geq 4$).
- אות הכניסה משתנה במידה מספקת מדגם לדגם.

יחס אות לרעש (SNR)

$$SNR \triangleq 10 \log_{10} \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \quad [\text{dB}]$$

1 - 10

הדגמת חישוב SNRא. אות כניסה מפולג אחיד

$$\implies \sigma_x^2 = 1/3$$

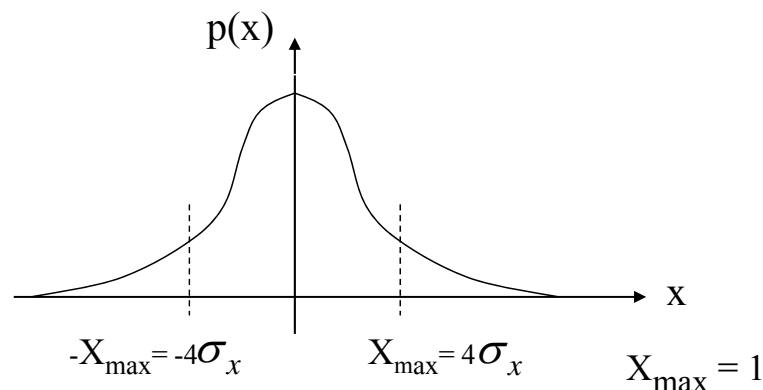
$$h = 2^{-b}; \quad \sigma_e^2 = \frac{h^2}{12} = \frac{2^{-2b}}{12}$$

$$SNR = 10 \log_{10} \left(\frac{1/3}{h^2/12} \right) = 20(b+1) \log_{10}(2) \cong 6B; \quad B = b+1$$

1-11

ב. אות כניסה גאוס

$$\sigma_x^2 = 1/16$$



$$\text{Overload Factor } \gamma \triangleq \frac{X_{\max}}{\sigma_x} = 4$$

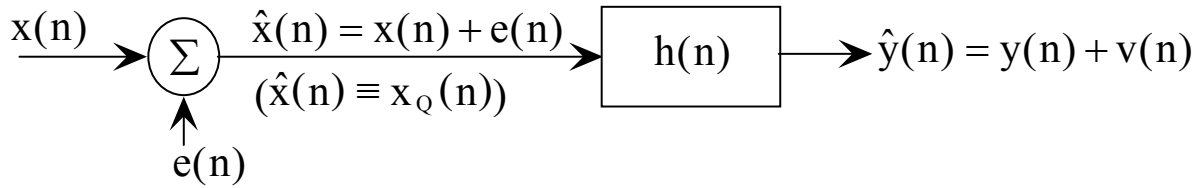
ובהזנת שגיאת overload:

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{1/16}{h^2/12} = 10 \log_{10} 3 + (b-1)(20 \log_{10} 2) \cong 6B - 7.2 \text{ [dB]}$$

$$\text{הצבת } \sigma_x = \frac{1}{\gamma} \text{ נותנת: } SNR = 6B - 10 \log_{10} \frac{\gamma^2}{3} \text{ (בהזנת overload)}$$

1-12

חישוב השגיאה במוצא מסנן ספרתי עקב כימוי אות הכניסה



$$v(n) = \sum_k h(k)e(n-k) \quad ; \quad m_v = E\{v(n)\} = m_e \sum_k h(k) = m_e H(e^{j\theta})|_{\theta=0}$$

$$\sigma_v^2 = E\{v^2(n)\} - m_v^2$$

$$E\{v^2(n)\} = E\left\{\left(\sum_k h(k)e(n-k)\right)^2\right\} = \sigma_e^2 \sum_k h^2(k) + m_e^2 \left(\sum_k h(k)\right)^2$$

$$\therefore \sigma_v^2 = \sigma_e^2 \sum_k h^2(k)$$

1-13

חישוב $\sum_k h^2(k)$

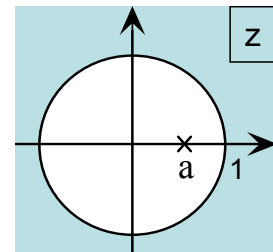
א. חישוב ישיר

דוגמה 1:

$$H(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}a} = \frac{z}{z - a} \quad \Leftrightarrow \quad h(n) = a^n \cdot 1(n)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} h^2(n) = \sum_{n=0}^{\infty} (a^2)^n = \frac{1}{1 - a^2}$$

$$\sigma_v^2 = \sigma_e^2 \frac{1}{1 - a^2}$$



$$0 < \varepsilon \ll 1 \quad , \quad |a| = 1 - \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma_v^2}} \approx \sigma_e^2 \frac{1}{2\varepsilon} = \underline{\underline{\frac{h^2}{24\varepsilon}}}$$

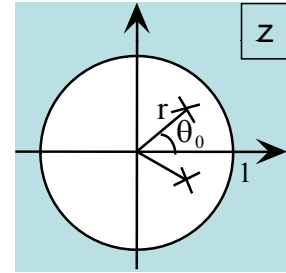
1-14

דוגמה 2:

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - 2r \cos \theta_0 z + r^2}$$

$$\Rightarrow \sum_n h^2(n) = \frac{1+r^2}{1-r^2} \cdot \frac{1}{r^4 + 1 - 2r^2 \cos(2\theta_0)}$$

$$r = 1 - \varepsilon \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \Rightarrow \sigma_v^2 \cong \sigma_e^2 \frac{1}{4\varepsilon \sin^2 \theta_0}$$

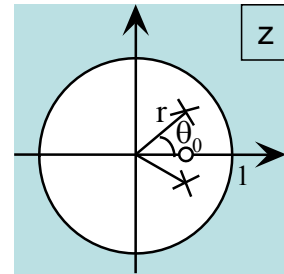


• לכן, ככל ש- θ_0 קטן יותר, כלומר, קצב דגימה גדול יותר למסנן עם תדר קטעון נתון, נקבל יותר רעש ביציאה.

דוגמה 3:

$$H(z) = \frac{z(z - r \cos \theta_0)}{z^2 - 2r \cos \theta_0 z + r^2}$$

$$r = 1 - \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \Rightarrow \sigma_v^2 \cong \sigma_e^2 \frac{1}{4\varepsilon} = \frac{h^2}{48\varepsilon}$$



• שים לב: כאן אין תלות ב- θ_0

ב. חישוב בעזרת משפט פרסוול

ממשפט הקונבולוציה הקומפלכסית:

$$\sum_k h^2(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_c H(z)H(z^{-1}) \frac{dz}{z}$$

כאשר c - קונטור המקיף את קטבי $H(z)$ (נגד כוון השעון) אך לא את קטבי $H(z^{-1})$.

בהצגת $z = e^{j\theta}$ (סדרה יציבה), נקבל את משפט פרסוול:

$$\sum_k h^2(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\theta})|^2 d\theta$$

חישוב ה-SNR במוצא המסנן

$$(S/N)_{\text{out}} \triangleq \frac{\sigma_y^2}{\sigma_v^2}; \quad \text{SNR}_{\text{out}} \triangleq 10 \log_{10} (S/N)_{\text{out}}$$

א. מקרה פרטי

$$R_{xx}(k) = \sigma_x^2 \delta(k) \quad \text{סדרה מתוך תהליך סמ"ר לבן: } \{x(n)\}$$

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_n h^2(n) \Rightarrow \underline{\underline{(S/N)_{\text{out}}}} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_v^2} = \frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2} \frac{\sum h^2(n)}{\sum h^2(n)} = \underline{\underline{(S/N)_{\text{in}}}}$$

1-17

ב. מקרה כללי

$\{x(n)\}$ סדרה מתוך תהליך אקראי סטציונרי (במובן הרחב), עם ממוצע אפס, בעל פ' אוטוקורלציה $R_{xx}(k)$ וצפיפות הספק ספקטרלית $\Phi_{xx}(z) = Z\{R_{xx}(k)\}$

$$\Phi_{yy}(z) = \Phi_{xx}(z)H(z)H(z^{-1}) \quad \text{אזי קיים:}$$

ואם מעגל היחידה נמצא בתחום ההתכנסות, נציג $z = e^{j\theta}$ ונקבל:

$$\Phi_{yy}(\theta) = \Phi_{xx}(\theta)|H(\theta)|^2$$

$$R_{xx}(0) = \sigma_x^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(\theta) d\theta$$

$$R_{yy}(0) = \sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{yy}(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(\theta)|H(\theta)|^2 d\theta$$

$$(S/N)_{\text{out}} = (S/N)_{\text{in}} \cdot \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(\theta)|H(\theta)|^2 d\theta}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(\theta) d\theta \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\theta)|^2 d\theta} = (S/N)_{\text{in}} \cdot \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{xx}(\theta)|H(\theta)|^2 d\theta}{\sigma_x^2 \sum_n h^2(n)}$$

1-18

שגיאת הכימוי ביציאת מסנן ספרתי עקב פעולות אריתמטיות עם אורך מילה סופי

הנחות המודל הסטטיסטי

- אין קורלציה בין דגמי השגיאה.
- אין קורלציה בין האות לשגיאה.

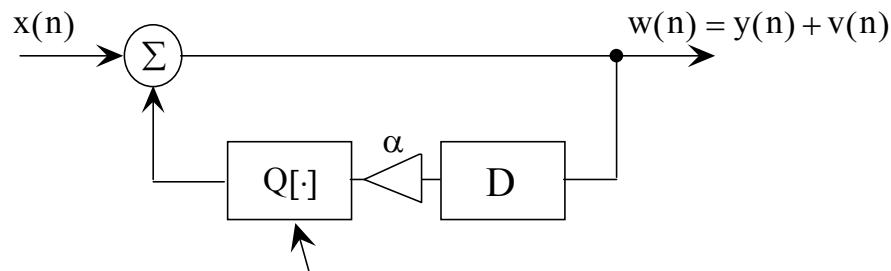
הנחות אלו מתקיימות בקירוב טוב עבור אורך מלה גדול מספיק בחישובים ואת כניסה מורכב מספיק.

1. אריתמטיקה בייצוג נק' קבועה – Fixed Point

א. מסנן IIR

(1) מערכת מסדר ראשון:

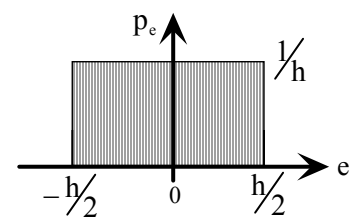
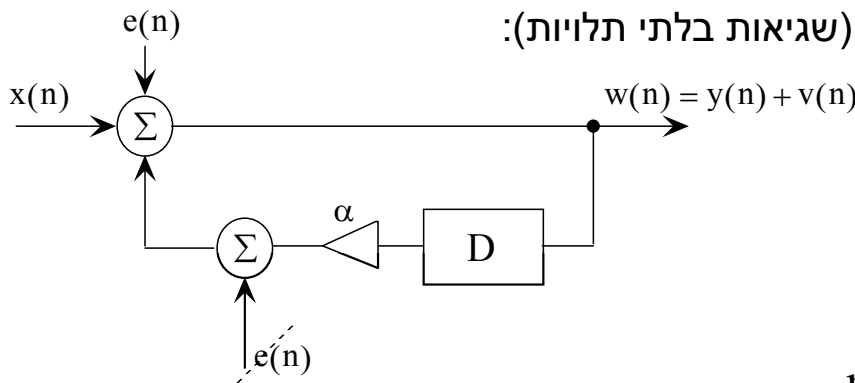
$$H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} = \frac{z}{z - \alpha}$$



פעולת העגלה

ממילה באורך $B_w + B_\alpha - 1$ לאורך $B = b + 1$

בהנחה שאין קוונטיזציה בכניסה (שגיאות בלתי תלויות):



$$m_e = 0 \Rightarrow m_v = 0$$

$$\sigma_v^2 = \sigma_e^2 \sum_n h_e^2(n) = \sigma_e^2 \sum_n h^2(n)$$

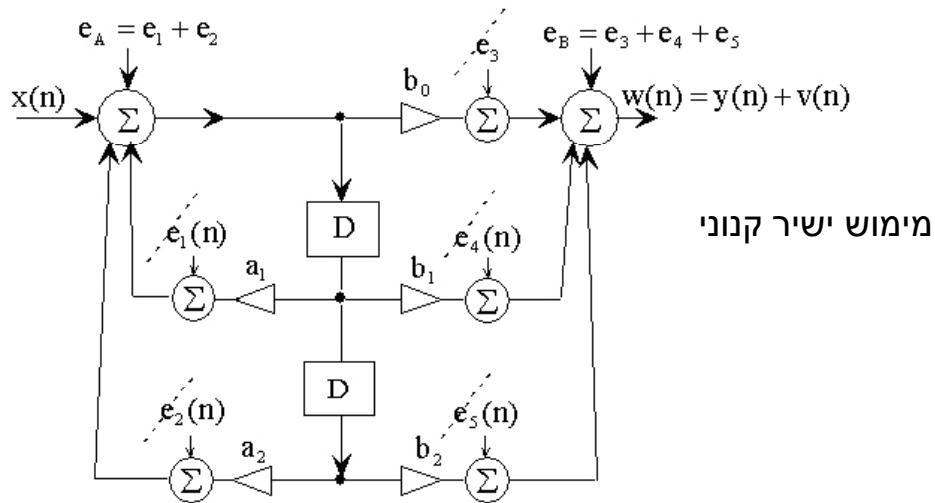
$$\sigma_e^2 = \frac{h^2}{12} = \frac{2^{-2b}}{12} \quad \text{בהנחת פילוג רציף } (2^{(B_\alpha + B_w - 1)} \gg 2^B)$$

$$\sigma_v^2 = \frac{h^2}{12} \sum_n (\alpha^n)^2 = \frac{h^2}{12} \frac{1}{1 - \alpha^2}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_v^2} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_e^2} (1 - \alpha^2) = 2^{2b} \cdot 12 \cdot (1 - \alpha^2) \sigma_y^2$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{out} = 2^{2b} \cdot 12 \cdot \sigma_x^2 \quad \text{ועבור אות "לבן" בכניסה עם שונות } \sigma_x^2$$

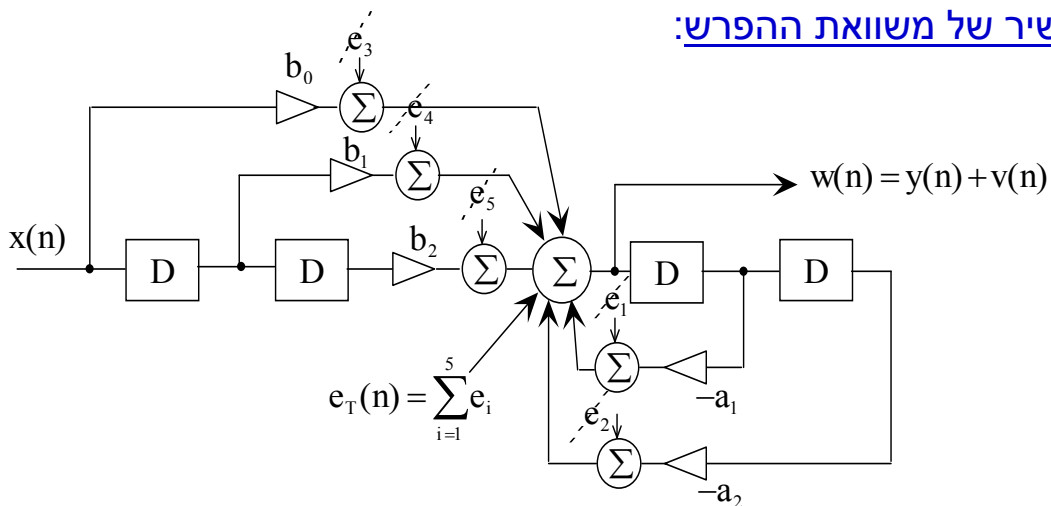
$$H(z) = \frac{b_0 + b_1z^{-1} + b_2z^{-2}}{1 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2}} \quad z^{-1} \leftrightarrow h(n) \quad \text{(2) מערכת כללית מסדר שני:}$$



$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sigma_v^2}} &= \sigma_{e_A}^2 \sum_n h_{e_A}^2(n) + \sigma_{e_B}^2 \\ &= 2\sigma_e^2 \sum_n h^2(n) + 3\sigma_e^2 \quad ; \quad \sigma_e^2 = \frac{2^{-2b}}{12} \\ &= \underline{\underline{2\sigma_e^2 \left[\frac{3}{2} + \sum_n h^2(n) \right]}} \end{aligned}$$

תלות שגיאת הכימוי במבנה הטופולוגי של המסנן מודגמת להלן עבור מימוש אחר –

מימוש ישיר של משוואת הפרש:



$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad z^{-1} \leftrightarrow h(n)$$

$$\sigma_v^2 = \sigma_{e_T}^2 \cdot \sum h_a^2(n) = 5\sigma_e^2 \cdot \sum h_a^2(n)$$

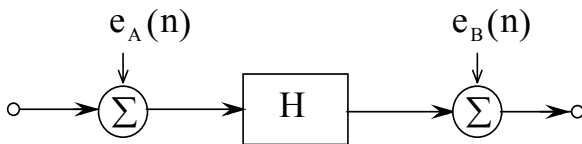
כאן מתקבל:

$$h_a(n) = Z^{-1} \left\{ \frac{1}{A(z)} \right\} \quad \text{כאשר,}$$

כלומר, במקרה זה פ' התמסורת הקובעת היא רק של ה"קטבים".

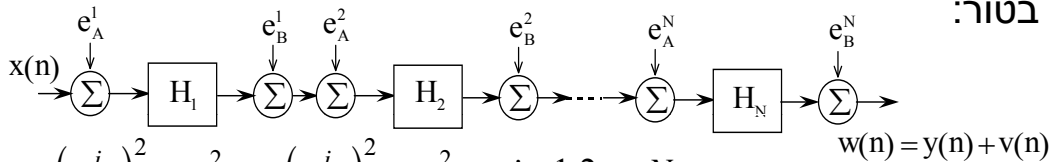
חבור חוליות מסדר שני בטור (3)

• חוליה מסדר שני במימוש קנוני:



$$\sigma_{e_A}^2 = 2\sigma_e^2 \quad ; \quad \sigma_{e_B}^2 = 3\sigma_e^2 \quad ; \quad \sigma_e^2 = 2^{-2b}/12$$

N חוליות בטור:



$$(\sigma_{e_A^i}^2) = \sigma_{e_A}^2 \quad ; \quad (\sigma_{e_B^i}^2) = \sigma_{e_B}^2 \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, N$$

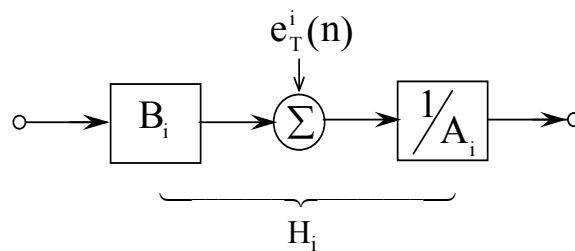
$$\sigma_v^2 = \sigma_{e_A}^2 \left\{ \sum_n h_{1,N}^2(n) + \sum_n h_{2,N}^2(n) + \dots + \sum_n h_{N,N}^2(n) \right\} + \sigma_{e_B}^2 \left\{ \sum_n h_{2,N}^2(n) + \sum_n h_{3,N}^2(n) + \dots + \sum_n h_{N,N}^2(n) + 1 \right\}$$

$$h_{k,N}(n) = Z^{-1} \left\{ \prod_{i=k}^N H_i(z) \right\} \quad \text{כאשר,}$$

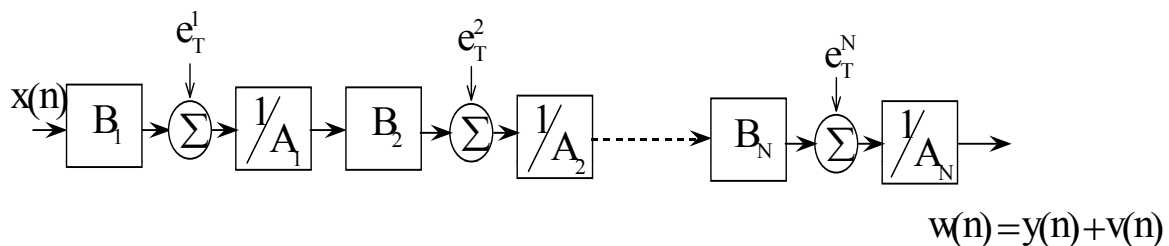
ואם $b_0=1$, אזי: $\sigma_{e_A}^2 = \sigma_{e_B}^2 = 2\sigma_e^2$, ונקבל:

$$\sigma_v^2 = 2\sigma_e^2 \sum_n \left\{ h_{1,N}^2(n) + 2h_{2,N}^2(n) + \dots + 2h_{N,N}^2(n) + 1 \right\}$$

• חוליה מסדר שני במימוש ישיר של משוואת ההפרש:



N חוליות בטור:

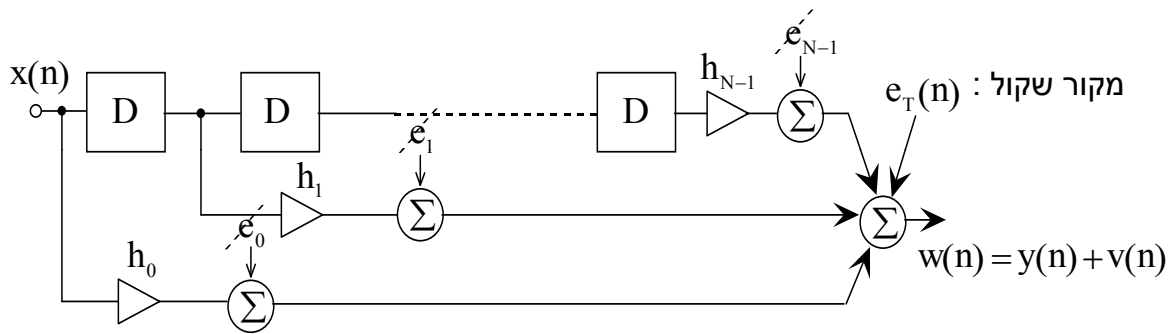


הערה כללית: בכל המקרים סדר החוליות יכול להשפיע על התוצאה!

ב. מסנן FIR

$$y(n) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k)x(n-k)$$

מימוש ישיר:



$$v(n) = e_T(n) = \sum_{i=0}^{N-1} e_i(n)$$

$$\sigma_v^2 = N\sigma_e^2 = N \frac{2^{-2b}}{12}$$

2. אריתמטיקה בייצוג נק' צפה – Floating Point

$$X = M \cdot 2^E \quad \text{: ייצוג מספר בנקודה צפה}$$

M – מנטיסה - שבר המיוצג ב-Fixed-point (Sign & Mag.) ומנורמל לתחום $1/2 \leq |M| < 1$
 E – אקספוננט - מספר שלם (חיובי, שלילי או אפס).

M – מיוצג ב-t+1 סיביות (כולל סימן) (Sign & Magnitude).
 E – מיוצג ב-r+1 סיביות (כולל סימן).

$$X_1 = M_1 \cdot 2^{E_1} \quad \text{: } (X > 0) \text{ בצוע כפל}$$

$$X_2 = M_2 \cdot 2^{E_2}$$

$$Y = X_1 X_2 = M_1 M_2 2^{(E_1 + E_2)} = M_Y 2^{E_Y}$$

כך שקיים: $1/2 \leq |M_Y| < 1$ ו-M_Y מיוצג ע"י t+1 סיביות.
 E_Y שלם (r+1 סיביות).

הערה: אם המנטיסה (בערך מוחלט) מתקבלת כקטנה מ-1/2 (היא תמיד גדולה או שווה ל-1/4), מנרמלים אותה ע"י הזזה בסיבית אחת שמאלה ומפחיתים 1 מהאקספוננט. עתה מעגלים ל-t+1 סיביות.

ב. ביצוע חיבור $(X > 0)$:

$$X_1 = M_1 2^{E_1}$$

$$X_2 = M_2 2^{E_2}$$

$$Y = X_1 + X_2 = M_Y 2^{E_Y}$$

- מזיזים המנטיסה של המספר בעל האקספוננט הקטן ימינה עד לשוויון אקספוננטים.
- מחברים המנטיסות
- מנרמלים המנטיסה המתקבלת לתחום $[1, 1/2)$ ע"י הזזה ימינה או שמאלה ומעדכנים האקספוננט בהתאם.
- מעגלים המנטיסה המנורמלת ל $(t+1)$ סיביות.

ג. שגיאת הקוונטיזציה:

- מתקבלת שגיאה עקב העגלה הן בפעולות כפל והן בפעולות חבור.
- השגיאה היא במנטיסה, עפ"י המודל הבא $(\varepsilon(n) - \text{שגיאה יחסית})$:

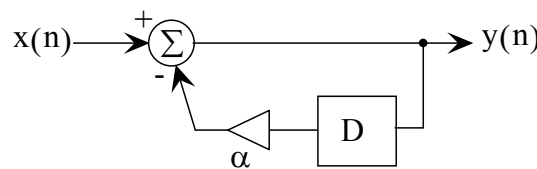
$$Q[x(n)] = x(n)(1 + \varepsilon(n)) = x(n) + x(n)\varepsilon(n)$$

$$= x(n) + e(n)$$

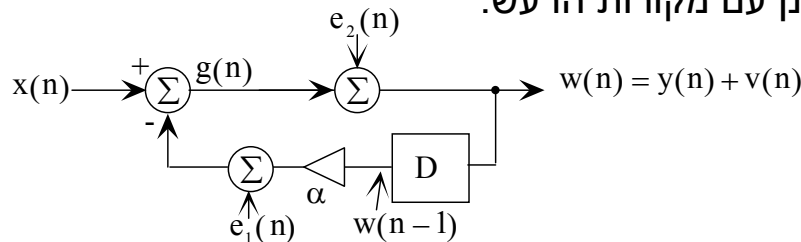
$$\therefore \underline{e(n) = x(n)\varepsilon(n)}$$

• השגיאה במנטיסה חסומה ע"י $2^{-t} / 2$ ולכן השגיאה היחסית מקיימת: $\underline{|\varepsilon(n)| \leq 2^{-t}}$

אנליזת שגיאה במסנן ספרתי מסדר ראשון



דיאגרמת המסנן עם מקורות הרעש:



שגיאות הקוונטיזציה:

$$e_1(n) = \alpha w(n-1) \cdot \varepsilon_1(n)$$

$$e_2(n) = g(n) \cdot \varepsilon_2(n)$$

$$g(n) \approx y(n)$$

$$w(n-1) \approx y(n-1)$$

ובהנחה,

מתקבל בקירוב:

$$e_1(n) = \alpha y(n-1) \cdot \varepsilon_1(n)$$

$$e_2(n) = \varepsilon_2(n) \cdot y(n)$$

הנחות

1. $\varepsilon_1(n), \varepsilon_2(n)$ לבנים, חסרי קורלציה ביניהם ועם כל שאר האותות במסן ומפולגים אחיד בתחום $\pm 2^{-t}$, כך ש:

$$\underline{\underline{\sigma_{\varepsilon_1}^2 = \sigma_{\varepsilon_2}^2 = \frac{2^{-2t}}{3}}}$$

ולכן גם $e_1(n), e_2(n)$ הם "לבנים" וחסרי קורלציה ביניהם.

2. $x(n)$ סטציונרי בעל ממוצע אפס $\leftarrow y(n)$ סטציונרי בעל ממוצע אפס וכן:

$$\underline{\underline{\sigma_{e_1}^2 = \alpha^2 \sigma_{\varepsilon_1}^2 \sigma_y^2}}, \quad \underline{\underline{\sigma_{e_2}^2 = \sigma_{\varepsilon_2}^2 \sigma_y^2}}$$

תרומת מקורות הרעש $e_1(n), e_2(n)$ לרעש ביציאה:

$$\sigma_{f_1}^2 = \sigma_{e_1}^2 \sum_n h_1^2(n) = \sigma_{e_1}^2 \frac{1}{1-\alpha^2} = \sigma_y^2 \frac{2^{-2t}}{3} \frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

$$\sigma_{f_2}^2 = \sigma_{e_2}^2 \sum_n h_2^2(n) = \sigma_{e_2}^2 \frac{1}{1-\alpha^2} = \sigma_y^2 \frac{2^{-2t}}{3} \frac{1}{1-\alpha^2}$$

$$h_2(n) = h_1(n) = \alpha^n 1(n) \quad , \text{ כאשר}$$

1-29

סה"כ שונות הרעש ביציאה:

$$\sigma_v^2 = \sigma_{f_1}^2 + \sigma_{f_2}^2 = \sigma_y^2 \frac{2^{-2t}}{3} \frac{1+\alpha^2}{1-\alpha^2}$$

יחס האות לרעש ביציאה:

$$\text{Floating Point: } \left(\frac{S}{N} \right)_{\text{OUT}} = \frac{\sigma_y^2}{\sigma_v^2} = \frac{3}{2^{-2t}} \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} = \underline{\underline{3 \cdot 2^{2t} \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}}}$$

לעומת מסן מסדר ראשון ואריתמטיקה Fixed Point:

$$\text{Fixed Point: } \left(\frac{S}{N} \right)_{\text{OUT}} = 12 \cdot 2^{2b} \cdot \sigma_y^2 (1-\alpha^2)$$

ובמקרה המיוחד: $1-\alpha^2 \cong 2\delta \leftarrow |\alpha| = 1-\delta, 0 < \delta \ll 1$

$$\text{Floating Point: } \left(\frac{S}{N} \right)_{\text{out}} \cong 3 \cdot 2^{2t} \cdot \delta \quad \text{מקבלים:}$$

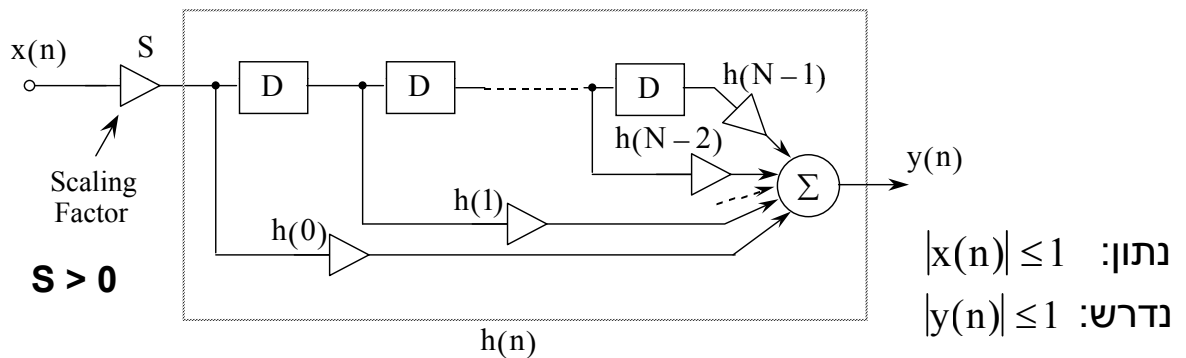
$$\text{Fixed Point: } \left(\frac{S}{N} \right)_{\text{out}} \cong 24 \cdot 2^{2b} \cdot \sigma_y^2 \cdot \delta$$

1-30

מניעת גלישה ע"י Scaling

נדון במסננים ספרתיים הממומשים ב-Fixed point (בייצוג 2's complement). על מנת למנוע שגיאת גלישה (overflow), יש להבטיח שתוצאת הסיכום בכל צומת סיכום במסנן, לא תגלוש.

א. מסנן FIR במימוש ישיר (צומת סיכום אחד)



$$|y(n)| \leq S \sum_k |h(k)x(n-k)| \leq S|x_{\max}| \sum_k |h(k)|$$

תנאי מספיק לקיום הדרישה: $S|x_{\max}| \sum_k |h(k)| \leq 1$

ועבור $|x_{\max}| = 1$ מתקבל תנאי מספיק למניעת גלישה:

$$S \leq \frac{1}{\sum_k |h(k)|}$$

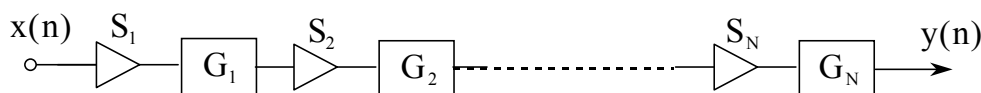
הבטחה
אבסולוטית

ב. מסנן בעל מספר צמתי סיכום

יש להבטיח אי-גלישה בכל אחד מהצמתים.

- שימוש במנחת (S) יחיד בכניסה.
- מימוש ע"י מספר תת-יחידות (טור/מקביל) עם מנחת נפרד לכל יחידה.

חיבור חוליות בטור

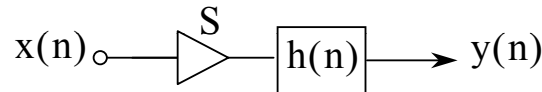


המנחת S_i נקבע כך שבכל צומת סיכום בחוליה G_i וביציאתה לא תהיה גלישה.

הערות:

1. ניתן לחשב כל אחד מהמנחתים S_i בנפרד כי מובטח שהיציאה מהחוליה הקודמת אינה גולשת, אך זו לעיתים נותנת תוצאה פסימית.
2. שימוש במנחת יחיד בכניסה $S = \prod_{i=1}^N S_i$ יבטיח אי-גלישה, אך זו בד"כ נותנת ערך S קטן מדי.
3. סדר החוליות יכול להשפיע על התוצאה (יודגם בהמשך).

גישה כללית לקביעת S



$$Y(e^{j\theta}) \equiv Y(\theta) = SX(\theta)H(\theta)$$

$$H(\theta) = \mathcal{F}\{h(n)\} \triangleq \sum_n h(n)e^{-jn\theta}$$

מגדירים L_p -norm של פונקציה $X(\theta)$ (קומפלכסית ומחזורית ב- θ במחזור 2π) ע"י:

$$\|X(\theta)\|_p \equiv \|X\|_p \triangleq \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\theta)|^p d\theta \right]^{1/p}, \quad \infty > p \geq 1$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} |X(\theta)|^p d\theta < \infty \quad \text{ונורמה זו מוגדרת אם}$$

• אם $X(\theta)$ רציפה ב- θ , אזי הגבול כאשר $p \rightarrow \infty$ קיים וניתן ע"י:

$$\|X(\theta)\|_{\infty} = \max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |X(\theta)|$$

אי-שוויון Hölder

$$Y = U \cdot H \Rightarrow \|Y\|_1 \leq \|U\|_p \|H\|_q; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

המקרים המעניינים במיוחד: $p = \infty, q = 1$; $p = 1, q = \infty$; $p = 2, q = 2$

$$\|Y\|_1 = \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |Y(\theta)| d\theta \right] \geq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} Y(\theta) e^{jn\theta} d\theta \right| = |y(n)|$$

$$Y = U \cdot H \longrightarrow |y(n)| \leq \|U\|_p \|H\|_q; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$U = S \cdot X \longrightarrow |y(n)| \leq S \|X\|_p \|H\|_q; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

ותנאי מספיק לקבלת $|y(n)| \leq 1$ הוא:

$$S \leq \frac{1}{\|X\|_p \|H\|_q}; \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

נבחן שני מקרים:

(1) $p=q=2$

$$S \leq \frac{1}{\|X\|_2 \|H\|_2} = \frac{1}{\left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\theta)|^2 d\theta \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(\theta)|^2 d\theta \right]^{1/2}}$$

ומתוך משפט Parseval:

$$S \leq \frac{1}{\left[\sum_n x^2(n) \cdot \sum_n h^2(n) \right]^{1/2}}$$

(2) $p = 1, q = \infty$

$$S \leq \frac{1}{\max_{-\pi \leq \theta \leq \pi} |H(\theta)| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\theta)| d\theta}$$

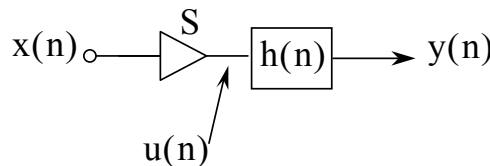
ואם נתון: $\|X\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(\theta)| d\theta \leq 1$ (מבטיח ש $|x(n)| \leq 1$),

נקבל התנאי המספיק:

$$S \leq \frac{1}{\max_{\theta} |H(\theta)|} ; \|X\|_1 \leq 1$$

נוח במיוחד עבור אותות כניסה סינוסואידליים

ניתוח מקביל עבור אותות אקראיים:



בהנחת אותות סטציונריים בעלי ממוצע אפס:

$$\Phi_{yy}(\theta) = \Phi_{uu}(\theta) |H(\theta)|^2 = S^2 \Phi_{xx}(\theta) |H(\theta)|^2$$

עפ"י אי שיוון Holder:

$$\|\Phi_{yy}\|_1 \leq S^2 \|\Phi_{xx}\|_p \|H^2\|_q ; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\|\Phi_{yy}\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi_{yy}(\theta) d\theta = \sigma_y^2$$

ומתוך:

$$\sigma_y^2 \leq S^2 \|\Phi_{xx}\|_p \|H^2\|_q$$

מקבלים:

$$\|H^2\|_q = \|H\|_{2q}^2$$

מכיון ש:

מתקבל:

$$\sigma_y^2 \leq S^2 \|\Phi_{xx}\|_p \|H\|_{2q}^2 ; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

נבחן שני מקרים:

(1) $p = \infty, q = 1$

$$\sigma_y^2 \leq S^2 \|\Phi_{xx}\|_\infty \|H\|_2^2 = S^2 \max_\theta \Phi_{xx}(\theta) \cdot \|H\|_2^2$$

עבור אות כניסה לבן בעל שונות σ_x^2 : $\Phi_{xx}(\theta) = \sigma_x^2 \quad \forall \theta$

$$\sigma_y^2 \leq S^2 \|H\|_2^2 \sigma_x^2$$

כאן מסתפקים בדרישה: $\sigma_y^2 \leq \sigma_x^2$

ותנאי מספיק לכך הוא:

$$S^2 \leq \frac{1}{\|H\|_2^2} = \frac{1}{\sum_n h^2(n)} ; \quad \sigma_y^2 \leq \sigma_x^2$$

(2) $p = 1, q = \infty$

$$\sigma_y^2 \leq S^2 \|H\|_\infty^2 \|\Phi_{xx}\|_1 = S^2 \max_\theta |H(\theta)|^2 \cdot \sigma_x^2$$

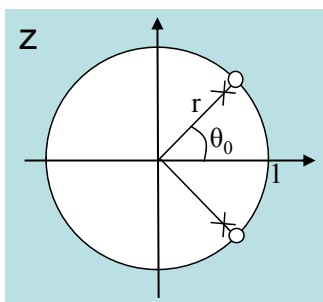
כאן, עבור כניסה סטציונרית כלשהי (לאו דווקא לבנה) והדרישה $\sigma_y^2 \leq \sigma_x^2$:

$$S^2 \leq \frac{1}{\max_\theta |H(\theta)|^2} ; \quad \sigma_y^2 \leq \sigma_x^2$$

השפעת המבנה הפנימי של המסנן על מקדם הניחות

למבנה הפנימי (דיאגרמת המימוש) של המסנן (או החוליה) יש בד"כ השפעה רבה על מקדם הניחות, כמודגם להלן:

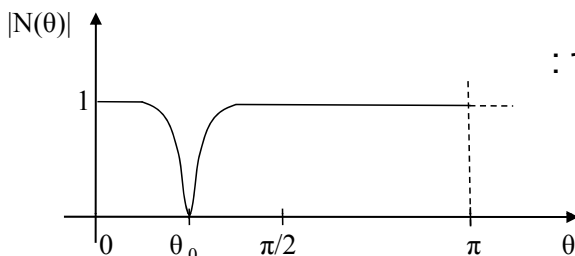
ניתוח מימוש מסנן Notch מסדר שני



מיקום הקטבים והאפסים:
 $(r = 1 - \epsilon, \quad 0 < \epsilon \ll 1)$

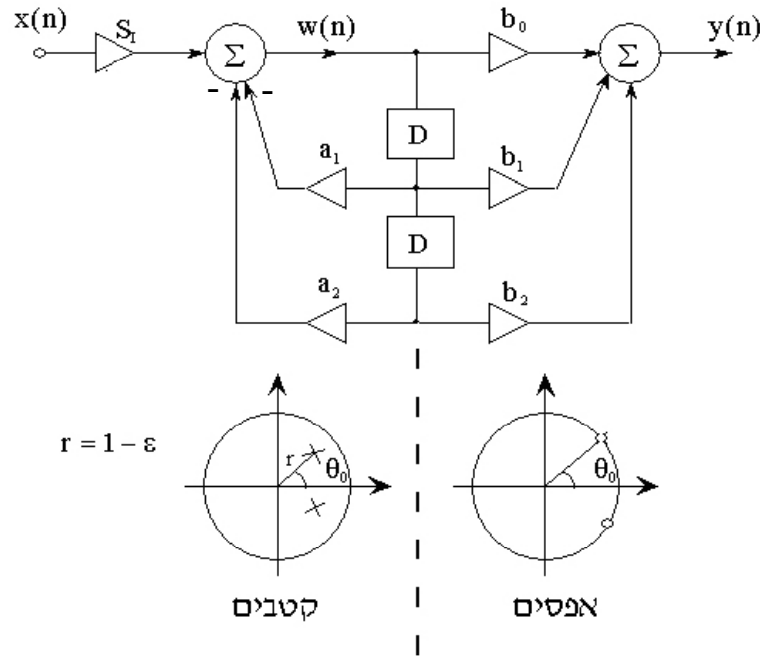
פ' התמסורת:

$$N(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}$$



תגובת התדר:

מימוש א' - מימוש ישיר קבובי

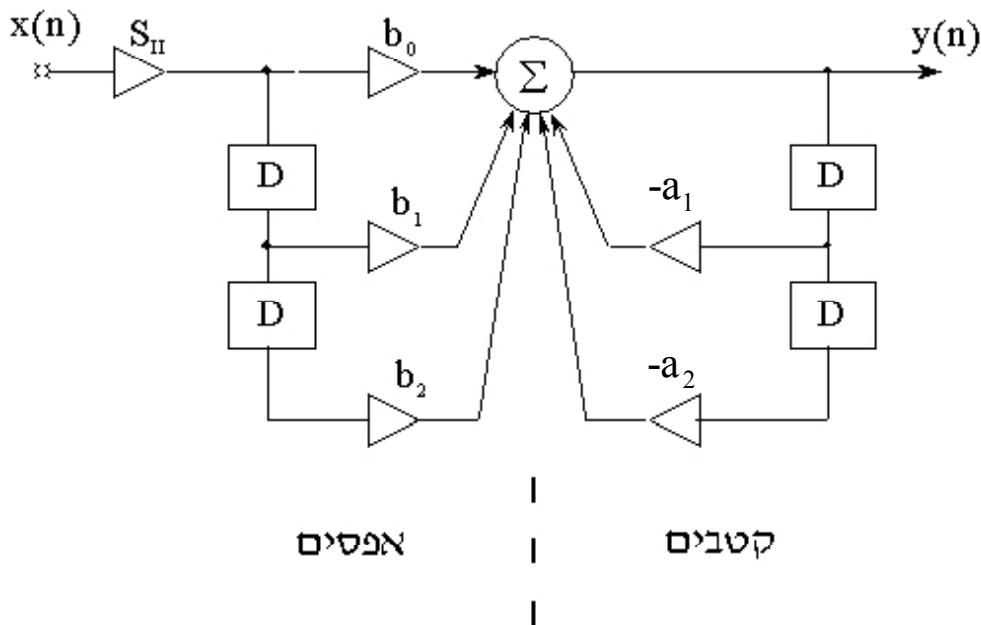


יש לדאוג רק למוצא צומת הסיכום משמאל:

$$S \leq \frac{1}{\max_{\theta} |H_A(\theta)|} \longrightarrow S_1 \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon \cdot \beta}} = \varepsilon \cdot \beta \quad ; \quad \beta \cong 2r \sin \theta_0$$

1-39

מימוש ב' - מימוש ישיר של משוואת ההפרש

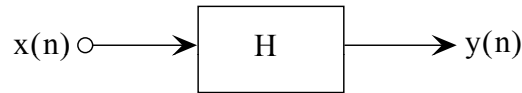


$$\max_{\theta} |N(\theta)| = 1 \longrightarrow S_{II} = 1$$

לפיכך, מימוש ב' עדיף.

1-40

תופעת ה-Limit cycle במסננים ספרתיים



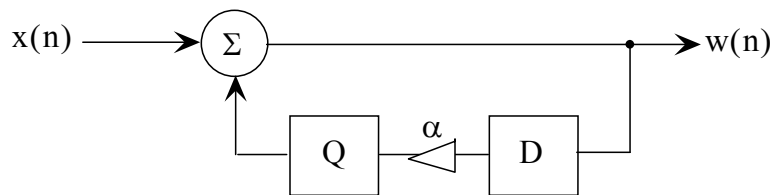
• במסנן יציב ואריתמטיקה ללא הגבלת אורך מלה :

$$x(n)=0, n>n_0 \Rightarrow y(n)|_{n \rightarrow \infty} = 0 \quad (\text{דעיכת "תנאי התחלה"})$$

• במסנן רקורסיבי עם אורך מלה סופי היציאה עלולה שלא לדעוך לאפס

("נתקעת" בערך קבוע או מתנדנדת) \Leftarrow **Limit Cycle**.

הדגמת התופעה במסנן מסדר ראשון:



- ללא קוונטיזציה: $y(n) = \alpha y(n-1) + x(n)$

- עם קוונטיזציה: $w(n) = Q[\alpha w(n-1)] + x(n)$

1-41

הדגמה מספרית (אריתמטיקה במספרים שלמים):

n	$\alpha = 0.94$		$\alpha = -0.94$	
	y(n)	w(n)	y(n)	w(n)
-1	13.0	13.0	13.0	13.0
0	12.22	12	-12.22	-12
1	11.49	11	+11.49	11
2	10.79	10	-10.79	-10
3	10.14	9	10.14	9
4	9.54	8	-9.54	-8
5	8.97	8	8.97	8
6	8.43	8	-8.43	-8
:	:	:	:	:

$$[9 \times 0.94] = [8.46]_R = 8$$

$$[8 \times 0.94] = [7.52]_R = 8$$

בדוגמה זו תחום ה-"Dead-band" הוא $[-8,8]$.

1-42

מציאת ה- Dead-band באופן אנליטי

א. מע' מסדר ראשון

$$|W(n-1)| = |Q[\alpha W(n-1)]| \quad |\alpha| < 1$$

$$|W(n-1)| - |\alpha W(n-1)| \leq h/2 \quad h \triangleq 2^{-b}$$

$$\therefore |W(n-1)| [1 - |\alpha|] \leq h/2$$

$$|W(n-1)| \leq \frac{h/2}{1 - |\alpha|}$$

$$\text{Dead-band} = \left[-h \left| \frac{1/2}{1 - |\alpha|} \right|, h \left| \frac{1/2}{1 - |\alpha|} \right| \right]$$

למשל, עבור $h = 1$ (מספרים שלמים), $\alpha = \pm 0.94$

$$\text{Dead-band} = [-8.33, 8.33] = [-8, 8]$$

קוטב "אפקטיבי" ב $z = 1$ או $z = -1$

ב. מע' מסדר שני

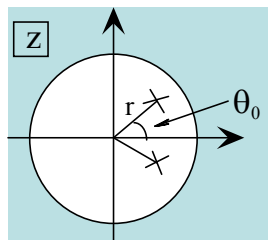
$$H(z) = \frac{1}{1 + \beta_1 z^{-1} + \beta_2 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + \beta_1 z + \beta_2}$$

$$y(n) = -\beta_1 y(n-1) - \beta_2 y(n-2) + x(n)$$

מיקום הקטבים:

$$\beta_2 = r^2$$

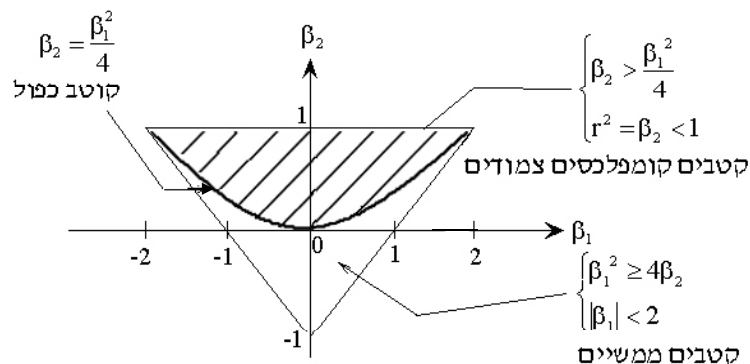
$$\beta_1 = -2r \cos \theta_0$$



$$P^2 + \beta_1 P + \beta_2 = 0$$

$$P_{1,2} = -\frac{\beta_1}{2} \pm \sqrt{\frac{\beta_1^2}{4} - \beta_2}$$

תחום ערכי β_1, β_2 המבטיח יציבות המערכת:



במערכת מסדר שני עם קוונטיזציה קיים:

$$w(n) = x(n) - Q[\beta_1 w(n-1)] - Q[\beta_2 w(n-2)]$$

ומתקבל Limit Cycle בעל מספר "modes":

(1) קיימים שני קטבים קומפלכסיים צמודים – המערכת "אפקטיבית לא יציבה"

כאשר $r^2 = \beta_{2\text{eff}} = 1$, וזה קורה כאשר:

$$|w(n-2)| - |\beta_2 w(n-2)| \leq h/2$$

$$\therefore |w(n-2)| \leq \frac{h/2}{1 - |\beta_2|}$$

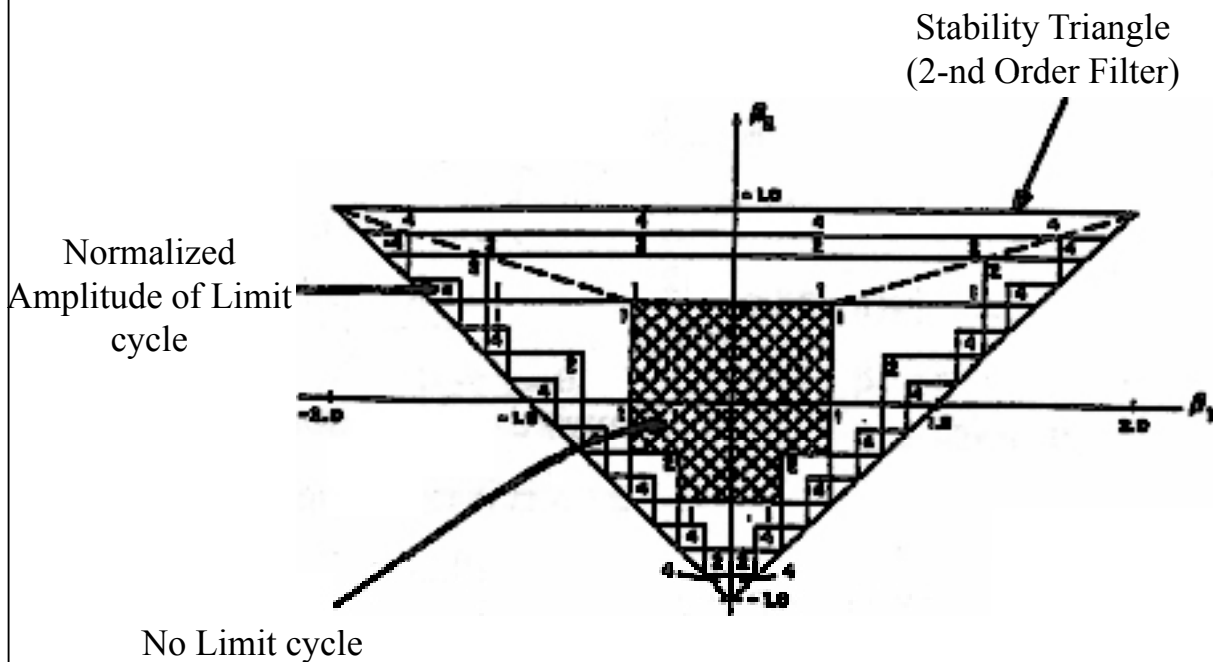
(2) קיימים שני קטבים ממשיים (שוניים):

"הקטבים האפקטיביים" הם ± 1

$$(P \pm 1)^2 = P^2 \pm 2P + 1 \Rightarrow \begin{cases} \beta_{1\text{eff}} = \pm 2 \\ \beta_{2\text{eff}} = 1 \end{cases}$$

$$|w(n)| \leq \frac{h}{1 - |\beta_1| + \beta_2} \quad \text{ומתקבל [Jackson]:}^1$$

¹Jackson, L.B. ,“An Analysis of Limit Cycles ...”, Proc. 7th Allerton Conf. Cir. Sys. Th., 1969, pp. 69-78.



Taken From:

Oppenheim & Weinstein, Proc. IEEE. Vol. 60, No.8, Aug 1972, pp. 957-976)

כימוי מקדמי המסנן

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$\hat{a}_k = a_k + \Delta a_k ; \hat{b}_k = b_k + \Delta b_k \longrightarrow \hat{H}(z) = H(z, \hat{a}_k, \hat{b}_k)$$

$$E(z) \triangleq H(z) - \hat{H}(z) \quad \text{פ' השגיאה:}$$

$$|E(\theta)| = |H(\theta) - \hat{H}(\theta)| \quad \text{בתחום התדר:}$$

$$|E(\theta)| \leq (N+1)h_c/2 ; \quad h_c = 2^{-b_c} \quad \text{עבור מסנן FIR מסדר N:}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |E(\theta)|^2 d\theta = \sum_n (h(n) - \hat{h}(n))^2 \quad \text{ועפ"י Parseval:}$$

הבעיה העקרית במסנני IIR היא בעיית היציבות.
יש להבטיח שעקב כימוי המקדמים לא תפגע יציבות המסנן.

השפעת כימוי המקדמים על תזוזת הקטבים

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$A(z, \underline{a}') \triangleq 1 + \sum_{k=1}^N a'_k z^{-k}$$

$$= \prod_{k=1}^N (1 - p'_k z^{-1}) = A(z, \underline{p}')$$

$$\underline{a}' = \underline{a} \Rightarrow \underline{p}' = \underline{p} \Rightarrow A(z, \underline{a}') = A(z, \underline{p}') = A(z)$$

$$\Delta p_i \cong \sum_{k=1}^N \frac{\partial p'_i(a'_1, a'_2, \dots, a'_N)}{\partial a'_k} \Big|_{\underline{a}' = \underline{a}} \cdot \Delta a_k$$

ניתן להראות ש:

$$\left| \frac{\partial p'_i}{\partial a'_k} \right| = \frac{|p_i^{N-k}|}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^N |p_i - p_m|}$$

ועל כן, ניתן לחשב **חסם על תזוזת הקוטב** p_i ע"י:

$$\underline{\underline{|\Delta p_i| \leq \sum_{k=1}^N \left| \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \right| \cdot |\Delta a_k|}}$$

ומתוך: $\max |\Delta a_k| = |\Delta a| = \frac{h_c}{2}$

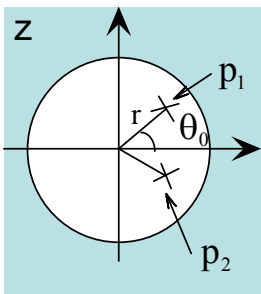
(כאשר h_c הוא צעד הכימוי של המקדמים)

$$\Rightarrow \boxed{|\Delta p_i| \leq |\Delta a| \cdot \sum_{k=1}^N \left| \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \right|}$$

מסקנות

- ככל שהקטבים קרובים זה לזה התזוזה גדולה יותר (רגישות גבוהה יותר לכימוי).
- שימוש במימוש טורי או מקבילי מונע ההשפעה הדדית של הקטבים בחוליות שונות.

הדגמה עבור מערכת מסדר שני



$$H(z) = \frac{1}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{1}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})}$$

$$= \frac{1}{1 - 2r \cos \theta_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$

$$p_1 = r e^{j\theta_0} \quad ; \quad p_2 = r e^{-j\theta_0}$$

$$\left| \frac{\partial p_1}{\partial a_1} \right| = \left| \frac{p_1}{p_1 - p_2} \right| = \frac{r}{2r |\sin \theta_0|} = \frac{1}{2 |\sin \theta_0|}$$

$$\left| \frac{\partial p_1}{\partial a_2} \right| = \left| \frac{1}{p_1 - p_2} \right| = \frac{1}{2r |\sin \theta_0|}$$

$$\left| \frac{\partial p_2}{\partial a_1} \right| = \left| \frac{p_2}{p_1 - p_2} \right| = \frac{1}{2 |\sin \theta_0|}$$

$$\left| \frac{\partial p_2}{\partial a_2} \right| = \left| \frac{1}{p_2 - p_1} \right| = \frac{1}{2r |\sin \theta_0|}$$

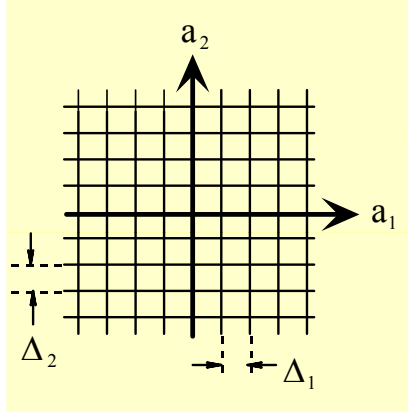


$$|\Delta p_1| \leq |\Delta a| \cdot \frac{1}{2 |\sin \theta_0|} \left(1 + \frac{1}{r} \right)$$

$$|\Delta p_2| \leq |\Delta a| \cdot \frac{1}{2 |\sin \theta_0|} \left(1 + \frac{1}{r} \right)$$

המקום הגיאומטרי של הקטבים כאשר מבצעים כימוי של של המקדמים

השאלה: מהו המיפוי של הסריג האחיד (במרחקים $\Delta_{1,2}$) במישור הפרמטרים (a_1, a_2) למישור שרשי $A(z)$ (הקטבים)?



$$a_1 = -2r \cos \theta_0 \quad ; \quad a_2 = r^2$$

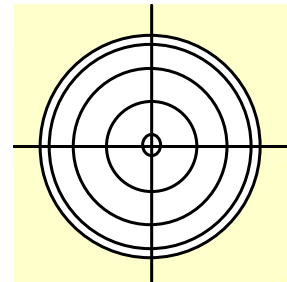
1. נתון ומשנים את a_2 בצעדים Δ_2 :

$$a_2 + \Delta_2 = (r + \Delta r)^2 \cong r^2 + 2r\Delta r$$

$$\Rightarrow |\Delta_2| \approx 2r|\Delta r|$$

$$|\Delta r| \cong \frac{|\Delta_2|}{2r}$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial r} = 2r \quad \text{או ישירות מתוך}$$



1-51

2. נתון ומשנים את a_1 בצעדים Δ_1 :

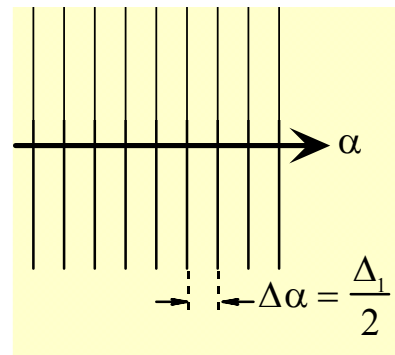
ההיטל על הציר הממשי: $\alpha \triangleq r \cos \theta_0$

$$\therefore a_1 = -2\alpha$$

$$(a_1 + \Delta_1) = -2(\alpha + \Delta\alpha)$$

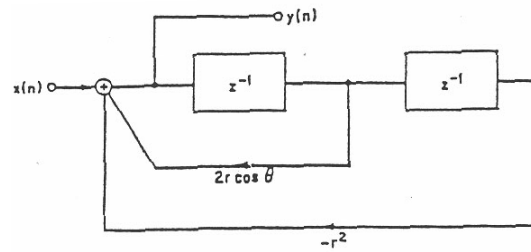
$$\Rightarrow |\Delta\alpha| = \frac{|\Delta_1|}{2}$$

$$\left(\frac{\partial a_1}{\partial \alpha} = -2 \quad \text{או ישירות מתוך}\right)$$

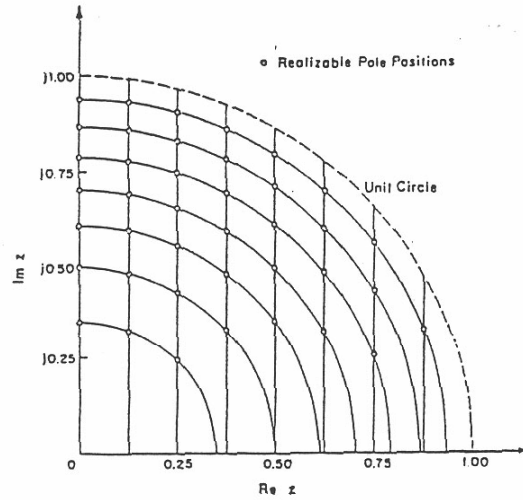


כלומר, סריג אחיד ב- a_1 מתאים לסריג אחיד בהיטל α .

1-52



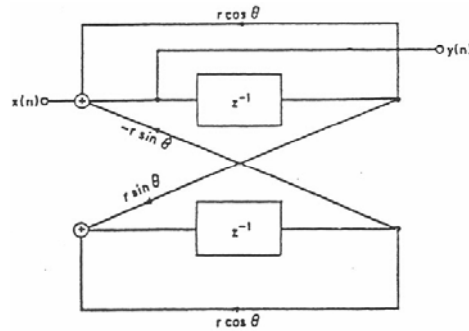
(a)



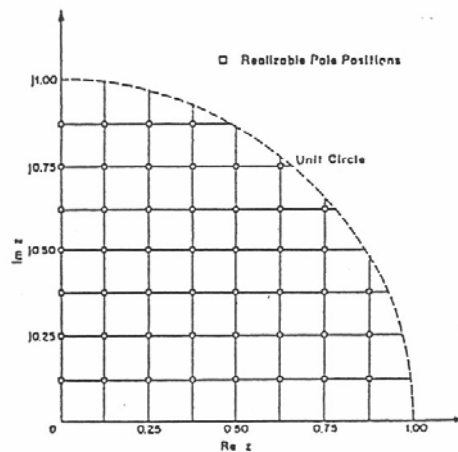
(b)

(a) Direct form implementation of a pole pair.
 (b) Grid of allowable pole positions—direct form.

(From Oppenheim & Weinstein, Proc. IEEE. Aug 1972)



(a)



(b)

(a) Coupled form implementation of a pole pair.
 (b) Grid of allowable pole positions—coupled form.

(From Oppenheim & Weinstein, Proc. IEEE. Aug 1972)

פירוט חישוב השפעת כימוי המקדמים על תזוזת הקטבים

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$A(z, \underline{a}') \triangleq 1 + \sum_{k=1}^N a'_k z^{-k}$$

$$= \prod_{k=1}^N (1 - p'_k z^{-1}) = A(z, \underline{p}')$$

$$\underline{a}' = \underline{a} \Rightarrow \underline{p}' = \underline{p} \Rightarrow A(z, \underline{a}') = A(z, \underline{p}') = A(z)$$

$$\Delta p_i \cong \sum_{k=1}^N \frac{\partial p'_i(a'_1, a'_2, \dots, a'_N)}{\partial a'_k} \Big|_{\underline{a}' = \underline{a}} \cdot \Delta a_k$$

שימוש בכלל השרשרת:

$$\frac{\partial A(z, \underline{p}')}{\partial a'_k} \Big|_{\underline{a}' = \underline{a}} = \sum_{l=1}^N \left\{ \frac{\partial A(z, \underline{p}')}{\partial p'_l} \cdot \frac{\partial p'_l(\underline{a}')}{\partial a'_k} \right\} \Big|_{\underline{a}' = \underline{a}}$$

$$\frac{\partial A(z, \underline{p}')}{\partial p'_i} = (-z^{-1}) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^N (1 - p_m z^{-1})$$

ולכן

$$\frac{\partial A(z, \underline{p}')}{\partial p'_i} \Big|_{z=p_i} = 0 \quad (i \neq 1)$$

$$\therefore \frac{\partial A(z, \underline{p}')}{\partial a'_k} \Big|_{\substack{\underline{a}' = \underline{a} \\ z = p_i}} = \frac{\partial A(z, \underline{p}')}{\partial p'_i} \cdot \frac{\partial p'_i(\underline{a}')}{\partial a'_k} \Big|_{\substack{\underline{a}' = \underline{a} \\ z = p_i}}$$

$$\therefore \frac{\partial p'_i(\underline{a}')}{\partial a'_k} \Big|_{\underline{a}' = \underline{a}} = \frac{\frac{\partial A(z, \underline{p}')}{\partial a'_k}}{\frac{\partial A(z, \underline{p}')}{\partial p'_i}} \Big|_{\substack{\underline{a}' = \underline{a} \\ z = p_i}}$$

$$A(z, \underline{a}') = 1 + \sum_{k=1}^N a'_k z^{-k} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial A(z, \underline{p}')}{\partial a'_k} \Big|_{\substack{\underline{a}' = \underline{a} \\ z = p_i}} = \underline{p_i^{-k}}$$

$$A(z', \underline{p}') = \prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial A(z, \underline{p}')}{\partial p'_i} \Big|_{\substack{\underline{p}' = \underline{p} \\ z = p_i}} = (-p_i^{-1}) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^N (1 - p_m p_i^{-1}) = \underline{\underline{(-p_i^{-N}) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^N (p_i - p_m)}}$$

$$(\underline{a}' = \underline{a} \Rightarrow \underline{p}' = \underline{p})$$

$$\therefore \frac{\partial p'_i(\underline{a}')}{\partial a'_k} \Big|_{\underline{a}' = \underline{a}} = \frac{p_i^{-k}}{(-p_i^{-N}) \prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^N (p_i - p_m)} = \frac{-p_i^{N-k}}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^N (p_i - p_m)}$$

$$\therefore \boxed{\left| \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \right| = \frac{|p_i^{N-k}|}{\prod_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^N |p_i - p_m|}}$$

על כן, החסם על תזוזת הקוטב p_i :

$$\underline{\underline{|\Delta p_i| \leq \sum_{k=1}^N \left| \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \right| \cdot |\Delta a_k|}}$$

ומתוך $(h_c - \text{Coeff. quant. step.}) \max |\Delta a_k| = |\Delta a| = h_c/2$

$$\Rightarrow \boxed{|\Delta p_i| \leq |\Delta a| \cdot \sum_{k=1}^N \left| \frac{\partial p_i}{\partial a_k} \right|}$$

שערוך ספקטרום ההספק של אותות אקראיים

Power Spectrum Estimation of Random Signals

- מושגי יסוד בשערוך פרמטרים
- שערוך לא פרמטרי של ספקטרום ההספק
 - שיערוך פ' האוטוקורלציה
 - פריודוגרמה ותכונותיה הסטטיסטיות
 - מיצוע פריודוגרמות (Bartlett).
 - פריודוגרמת Welch.
 - פריודוגרמה מוחלקת (Blackman-Tukey)
- שערוך פרמטרי של ספקטרום ההספק

מקורות ספרות: 1 – Ch. 13 Porat 3 – Ch. 12/14 Proakis 4 – Ch. 11 Oppenheim

2 - 1

מושגי יסוד בשערוך

נתייחס לבעית השערוך הסקלרית של פרמטר דטרמיניסטי θ מתוך סדרת מדידות $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$.

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}_N = g(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad \text{המשערך:}$$

$\hat{\theta}$ הוא משתנה אקראי אשר לגביו ניתן להגדיר את התכונות הבאות:

תכונות משערכים

• תוחלת: $E\{\hat{\theta}\}$

כאשר התוחלת מתבצעת עפ"י הפלוג הסגולי המשותף $p_{\underline{x}}(\underline{x}; \theta) \equiv p_{\theta}(\underline{x})$:

$$E\{\hat{\theta}\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(\underline{x}) p_{\theta}(\underline{x}) d\underline{x}$$

$$\text{Var}\{\hat{\theta}\} = \sigma_{\hat{\theta}}^2 = E\{(\hat{\theta} - E\{\hat{\theta}\})^2\}$$

• שונות:

2 - 2

$$B(\theta) \triangleq \theta - E\{\hat{\theta}\} \quad \bullet \text{ הטיה (Bias):}$$

אם $B=0$ לכל θ \Leftarrow המשערך בלתי-מוטה (Unbiased estimator).

$$MSE \triangleq E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} = \sigma_{\hat{\theta}}^2 + B^2 \quad \bullet \text{ שגיאה ריבועית ממוצעת (MSE):}$$

עקביות (Consistency):

המשערך נקרא עקבי (consistent) אם:

א. המשערך הוא בלתי מוטה, או לפחות בלתי מוטה אסימפטוטית:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{\hat{\theta}_N\} = \theta$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} Var\{\hat{\theta}_N\} = 0 \quad \bullet \text{ מתקיים:}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{(\hat{\theta}_N - \theta)^2\} = 0 \quad \bullet \text{ לפיכך, עבור משערך עקבי מתקיים:}$$

2 - 3

יעילות (Efficiency):

– משערך חסר הטיה נקרא יעיל (efficient) אם שונות המשערך מתלכדת עם ערך החסם התחתון של שונות שגיאת השערור עפ"י קרמר-ראו (Cramer-Rao bound - CRB), הנתון בהמשך.

– המשערך נקרא יעיל אסימפטוטית אם שונות המשערך שואפת ל- CRB כאשר $N \rightarrow \infty$.

Cramer-Rao bound (CRB)

בהנחה שהמשערך בלתי-מוטה, חסם זה נתון (בתנאים מתאימים על פ' הפילוג) ע"י:

$$Var\{\hat{\theta}\} \geq \frac{1}{E\left\{\left(\frac{\partial \ln p_{\theta}(x)}{\partial \theta}\right)^2\right\}} = -\frac{1}{E\left\{\left(\frac{\partial^2 \ln p_{\theta}(x)}{\partial \theta^2}\right)\right\}}$$

2 - 4

הוכחת ה-CRB

$$\underline{\gamma} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\theta} - \theta \\ \partial \ln p_{\theta} / \partial \theta \end{bmatrix} \quad \text{נגדיר הוקטור האקראי:}$$

$$\Gamma \triangleq E\{\underline{\gamma} \underline{\gamma}^T\} \quad \text{ואת המטריצה:}$$

אזי, בהנחה ש $p_{\theta}(\underline{x}) > 0$ לכל θ ולכל \underline{x} (ותנאים נוספים):

$$\Gamma = \begin{bmatrix} E\{(\hat{\theta} - \theta)^2\} & 1 \\ 1 & E\{(\partial \ln p_{\theta}(\underline{x}) / \partial \theta)^2\} \end{bmatrix}.$$

מכיון ש- Γ היא מטריצה PSD (Positive Semi-definite), כל הערכים העצמיים, λ_i , של Γ הם אי-שליליים ולכן $\det(\Gamma) = \prod_i \lambda_i \geq 0$ ומקבלים:

$$0 \leq \det(\Gamma) = \text{Var}(\hat{\theta}) \cdot E\{(\partial \ln p_{\theta}(\underline{x}) / \partial \theta)^2\} - 1$$

ומכאן הביטוי ל-CRB לעיל.

2 - 5

הערות

1. האינפורמציה של פישר (Fisher Information) מוגדרת ע"י:

$$I(\theta) \triangleq E \left[\frac{\partial \ln p_{\theta}(\underline{x})}{\partial \theta} \right]^2$$

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I(\theta)} \quad \text{ולפיכך, ה-CRB נתון ע"י:}$$

2. קיימת הרחבה של ה-CRB למקרה של משערכים מוטים (עם הטיה $B(\theta)$):

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{[1 + dB(\theta)/d\theta]^2}{I(\theta)}$$

3. ניתן להראות שבהנחות מתאימות על $p_{\theta}(\underline{x})$ קיים:

$$E \left\{ \left(\frac{\partial \ln p_{\theta}(\underline{x})}{\partial \theta} \right)^2 \right\} = -E \left\{ \left(\frac{\partial^2 \ln p_{\theta}(\underline{x})}{\partial \theta^2} \right) \right\}$$

2 - 6

משערך סבירות מירבית (Maximum Likelihood Estimator)

משערך הסבירות המירבית (משערך ML) של θ מתוך סדרת המדידות \underline{x}

$$\hat{\theta}_{ML} = \arg \max_{\theta \in \Theta} p_{\theta}(\underline{x}) \quad \text{מוגדר ע"י:}$$

כאשר Θ מגדיר את תחום ערכי θ .

$$\frac{\partial p_{\theta}(\underline{x})}{\partial \theta} = 0 \quad \text{אם המכסימום מושג בתחום } \Theta, \text{ תנאי הכרחי לקיומו נתון ע"י:}$$

הערות

1. ההרחבה למקרה הוקטורי של M פרמטרים כרוכה בד"כ בפתרון סט המשוואות:

$$\frac{\partial p_{\theta}(\underline{x})}{\partial \theta_k} = 0 ; \quad k = 1, 2, \dots, M$$

2. במקרים רבים מעדיפים להשתמש ב- $\log p_{\theta}(\underline{x})$ (log-likelihood function).

3. במקרים רבים משערך ML הם חסרי הטיה, עקביים, יעילים (לפחות אסימפטוטית) ושגיאת השערוך היא אסימפטוטית נורמלית. כמו כן, אם קיים משערך בלתי מוטה יעיל, הוא מתלכד עם משערך ML.

2 - 7

שערוך פונקציית האוטוקורלציה של תהליך אקראי סטציונרי

הנחה: התהליך האקראי $\{x(n)\}$ הוא סמ"ר עם ממוצע אפס.

$$\phi_{xx}(m) \triangleq E\{x(n)x^*(n+m)\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ממשיות}}}{=} E\{x(n)x(n+m)\} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{ממוצע אפס}}}{=} \gamma_{xx}(m)$$

כאשר, $\phi_{xx}(m)$ - פי האוטוקורלציה ; $\gamma_{xx}(m)$ - פי האוטוקווריאנס

נתון דגם של התהליך בעל N דגימות ומבקשים לשערך ממנו את פי האוטוקורלציה.

המשערך המוצע (קרוי "אוטוקורלצית הדגם" - Sample autocorrelation function):

$$\hat{\phi}_{xx}(m) = C_{xx}(m) \triangleq \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x(n)x^*(n+m), & 0 \leq m \leq N-1 \\ C_{xx}^*(-m), & -(N-1) \leq m < 0 \end{cases}$$

עבור סדרה ממשית נוח לרשום:

$$\hat{\phi}_{xx}(m) = C_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+|m|), \quad |m| \leq N-1$$

2 - 8

תכונות המשערך• הטיה

$$E\{C_{xx}(m)\} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} E\{x(n)x(n+|m|)\} = \frac{N-|m|}{N} \phi_{xx}(m), \quad |m| \leq N-1$$

$$\text{הטיה} \quad B = \phi_{xx}(m) - E\{C_{xx}(m)\} = \frac{|m|}{N} \phi_{xx}(m) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

לכן, המשערך מוטה אך בלתי מוטה אסימפטוטית (לכל m סופי).

• שונות ועקביות

החישוב מורכב, אך בהנחה שהתהליך הוא גאוסי ועבור $|m| \ll N$ קיים הקירוב הבא:

$$\text{שונות} \quad \text{Var}\{C_{xx}(m)\} \cong \frac{1}{N} \sum_{r=-\infty}^{\infty} [\phi_{xx}^2(r) + \phi_{xx}(r-m)\phi_{xx}(r+m)] \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

ולכן המשערך עקבי (לכל m סופי).

שערוך ספקטרום ההספק

$$\text{ספקטרום ההספק} \quad P_{xx}(\theta) \triangleq \sum_{m=-\infty}^{\infty} \phi_{xx}(m) e^{-jm\theta}, \quad |\theta| \leq \pi$$

נבחן מספר משערכים לשערוך $P_{xx}(\theta)$ מתוך N הדגימות הנתונות של $x(n)$:

1. "פריודוגרמה" - Periodogram

$$I_N(\theta) \triangleq \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} C_{xx}(m) e^{-jm\theta}$$

ניתן להראות שקיים:

$$I_N(\theta) = \frac{1}{N} |X(e^{j\theta})|^2$$

כאשר,

$$X(e^{j\theta}) \triangleq \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-jn\theta}$$

תכונות המשערך

• הטיה:

$$B = P_{xx}(\theta) - E\{I_N(\theta)\}$$

$$E\{I_N(\theta)\} = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right) \phi_{xx}(m) e^{-jm\theta}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\varphi) W_B(e^{j(\theta-\varphi)}) d\varphi$$

כאשר, $W_B(\theta)$ היא התמרת פוריה של חלון משולש – חלון Bartlett - באורך $2N+1$

$$w_B(m) \triangleq \begin{cases} \left(1 - \frac{|m|}{N}\right), & |m| < N \\ 0, & |m| \geq N \end{cases} \quad \overset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} \quad W_B(\theta) = \frac{1}{N} \left(\frac{\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right)^2$$

ולכן, המשערך מוטה, אך בלתי מוטה אסימפטוטית:

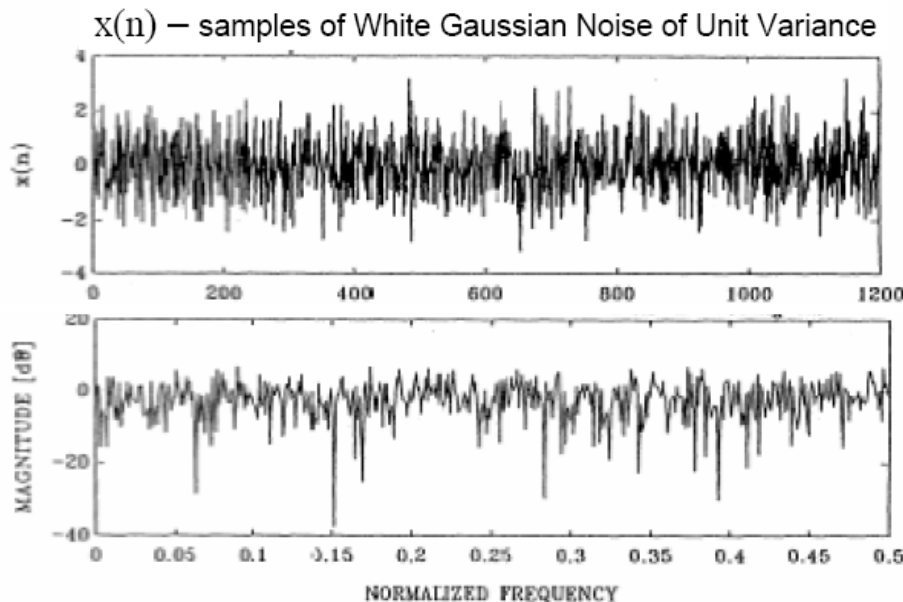
$$\lim_{N \rightarrow \infty} E\{I_N(\theta)\} = P_{xx}(\theta)$$

• שונות ועקביות

עבור תהליך גאוסי לבן, כלומר: $P_{xx}(\theta) = \sigma_x^2 \quad \forall \theta$, מתקבל:

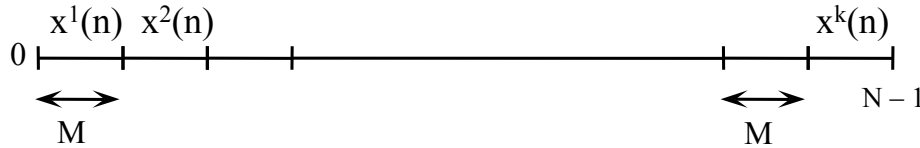
$$Var\{I_N(\theta)\} = \sigma_x^4 \left[1 + \left(\frac{\sin(N\theta)}{N \sin \theta} \right)^2 \right] \quad \begin{matrix} 0 < \theta < \pi \\ N \rightarrow \infty \end{matrix} \sigma_x^4 \neq 0$$

ניתן גם להראות כי: $Cov[I_N(\theta_k), I_N(\theta_\ell)]_{k \neq \ell} = 0$; $\theta_\ell = \frac{2\pi\ell}{N}$, $\theta_k = \frac{2\pi k}{N}$



2. שיטת Bartlett - מיצוע פריודוגרמות (Averaging Periodograms)

א. חלוקה לקטעים



$$x^i(n) \triangleq x(n + (i-1)M) \quad N = M \cdot K$$

$$I_M^i(\theta) = \frac{1}{M} |X^i(e^{j\theta})|^2 \quad 1 \leq i \leq K$$

ב. מיצוע פריודוגרמות

$$B_{xx}(\theta) \triangleq \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K I_M^i(\theta)$$

$$B = P_{xx}(\theta) - E\{B_{xx}(\theta)\} \quad \bullet \text{ הטיה:}$$

$$E\{B_{xx}(\theta)\} = E\{I_M^i(\theta)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\varphi) W_B(e^{j(\theta-\varphi)}) d\varphi$$

כאשר כאן, $W_B(\theta)$ היא התמרת חלון משולש (Bartlett) באורך $2M+1$, ולכן $B_{xx}(\theta)$ בלתי מוטה אסימפטוטית (הגדלת M ו- N יחדיו ל- ∞)

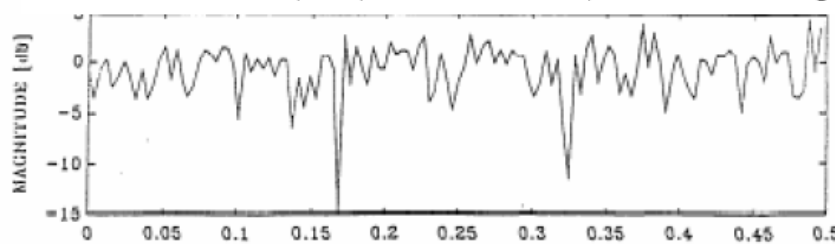
• שונות ועקביות

בהנחה ש- $\{I_M^i(\theta)\}$ בלתי תלויים סטטיסטית:

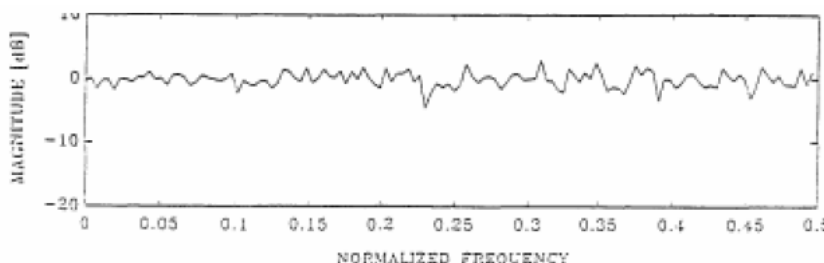
$$\text{Var}\{B_{xx}(\theta)\} = \frac{1}{K} \text{Var}\{I_M^i(\theta)\}$$

והמשערך עקבי [הגדלת K ו- M (ולכן N) ל- ∞ משאיפה את ההטיה ואת השונות לאפס]

Bartlett - PSD estimate for white Gaussian noise input



N=1024
M=256 ; K=4



N=4096
M=256 ; K=16

3. שיטת Welch - Averaging Modified Periodogram

מקור ספרות

P.D. Welch, "The use of fast fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms," IEEE Trans. Audio and Electroacoustics, June 1967, pp. 70-73.

א. קטעים לא חופפים



Modified Periodogram

$$J_M^i(\theta) \triangleq \frac{1}{MU} \left| \tilde{X}^i(e^{j\theta}) \right|^2 ; \quad \tilde{x}^i(n) = x^i(n)w(n)$$

$$U \triangleq \frac{1}{M} \sum_{n=0}^{M-1} w^2(n)$$

$$B_{xx}^w(\theta) \triangleq \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K J_M^i(\theta)$$

2 - 15

• הטיה

$$B = P_{xx}(\theta) - E \{ B_{xx}^w(\theta) \}$$

$$E \{ B_{xx}^w(\theta) \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{xx}(\varphi) W_w(e^{j(\theta-\varphi)}) d\varphi$$

כאשר,

$$W_w(e^{j\theta}) = \frac{1}{MU} \left| \sum_{n=0}^{M-1} w(n)e^{-j\theta n} \right|^2 = \frac{1}{MU} \left| W(e^{j\theta}) \right|^2$$

ומקבלים ש- $B_{xx}^w(\theta)$ בלתי מוטה אסימפטוטית.

מקרה פרטי: Bartlett - Averaging Periodograms

$$w(n) = 1, \quad n \in [0, M-1] \Rightarrow U = 1$$

$$W_w(e^{j\theta}) = \frac{1}{M} \left(\frac{\sin(M\theta/2)}{\sin(\theta/2)} \right)^2 = W_B(e^{j\theta})$$

2 - 16

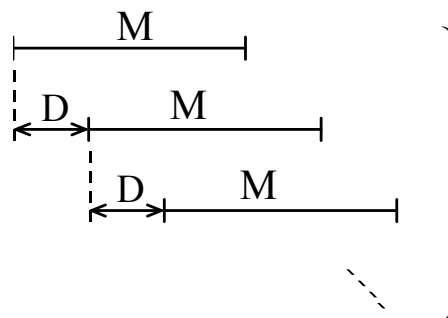
שונות ועקביות

בהנחה ש- $\{J_M^i(\theta)\}$ בלתי תלויים סטטיסטית:

$$\text{Var}\{B_{xx}^w(\theta)\} = \frac{1}{K} \text{Var}\{J_M(\theta)\}$$

וכמו B_{xx} , המשערך B_{xx}^w עקבי.

ב. חפיפה בין קטעים - Overlapping of Segments



K Segments

$$N = (K - 1)D + M$$

נגדיר:

$$c(j) \triangleq \text{Cov}\{J_M^i(\theta), J_M^{i+j}(\theta)\}$$

$$\rho(j) \triangleq \frac{c(j)}{c(0)} \quad (\text{correlation}) \quad ; \quad c(0) = \text{Var}\{J_M^i(\theta)\}$$

אזי,

$$\text{Var}\{B_{xx}^w(\theta)\} = \frac{\text{Var}\{J_M^i(\theta)\}}{K} \left\{ 1 + 2 \sum_{j=1}^{K-1} \frac{K-j}{K} \rho(j) \right\}$$

ועבור תהליך גאوسي לבן:

$$\rho(j) = \frac{\left[\sum_{n=0}^{M-1} w(n)w(n+jD) \right]^2}{\left[\sum_{n=0}^{M-1} w^2(n) \right]^2}$$

4. החלקת הפרידוגרמה עם חלון קורלציה (שיטת Blackman-Tukey)

$$S_{xx}(\theta) \triangleq \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} C_{xx}(m) w_c(m) e^{-jm\theta}$$

כאשר $w_c(m)$ הוא "חלון קורלציה" המופעל על סדרת אוטוקורלציה הדגם $C_{xx}(m)$:

$$\hat{\phi}_{xx}(m) = C_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x(n)x(n+|m|), \quad |m| \leq N-1$$

$$I_N(\theta) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} C_{xx}(m) e^{-jm\theta} \quad \text{ומכיון ש:}$$

מתקבל:

$$S_{xx}(\theta) = I_N(\theta) * W_c(e^{j\theta})$$

ויש להקפיד לבחור חלון שהתמרתו ממשית ואי שלילית (כמו חלון Bartlett).

תכונות המשערך

$$\begin{aligned} E\{S_{xx}(\theta)\} &= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} E\{\hat{\phi}_{xx}(m)\} w_c(m) e^{-jm\theta} \\ &= \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \phi_{xx}(m) \left(\frac{N-|m|}{N} \right) w_c(m) e^{-jm\theta} \\ &\stackrel{\substack{\approx \\ \uparrow \\ M \ll N}}{\cong} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} \phi_{xx}(m) w_c(m) e^{-jm\theta} \end{aligned}$$

ומכאן (עבור $M \ll N$),

$$E\{S_{xx}(\theta)\} \cong P_{xx}(\theta) * W_c(e^{j\theta})$$

והמשערך $S_{xx}(\theta)$ הוא אסימפטוטית לא מוטה אם חלון הקורלציה w_c מקיים:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_c(e^{j\theta}) d\theta = w_c(0) = 1$$

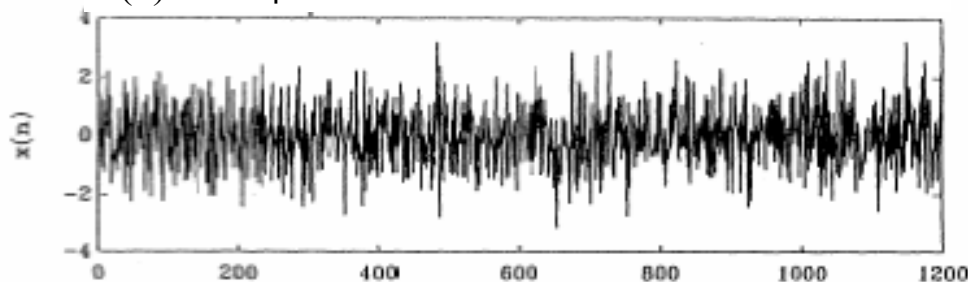
עבור תהליך גאוסי ניתן להראות:

$$\text{Var}\{S_{xx}(\theta)\} \cong \left[\frac{1}{N} \sum_{m=-(M-1)}^{M-1} w_c^2(m) \right] P_{xx}^2(\theta) \quad 0 < |\theta| < \pi$$

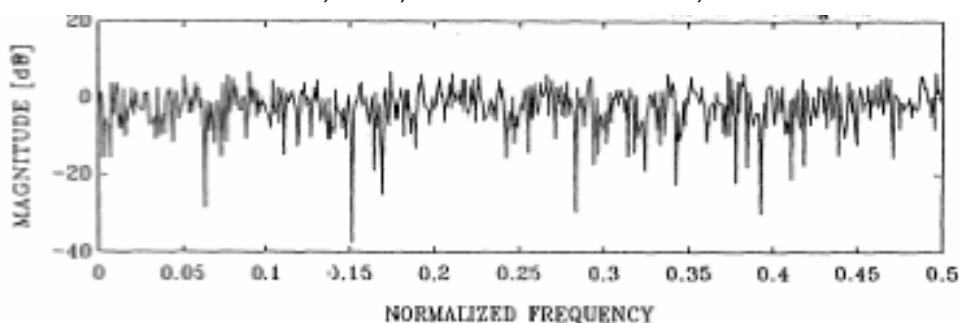
ולכן, הגדלת M מקטינה את ההטיה אך כדי להקטין את השונות יש להגדיל את N ביחס ל-M (מקביל להגדלת מס' הקטעים K במשערך מיצוע הפריודוגרמות). צורת החלון נותנת אף היא שליטה מסוימת בשונות המשערך.

Power Spectrum Estimation Examples

$x(n)$ – samples of White Gaussian Noise of Unit Variance



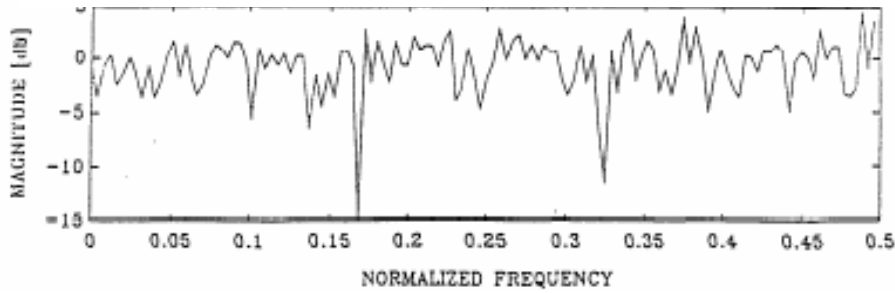
PSD estimate: $M=1024, K=1, D=1024 \rightarrow N=1024$, Window= **Rectangular**



Periodogram

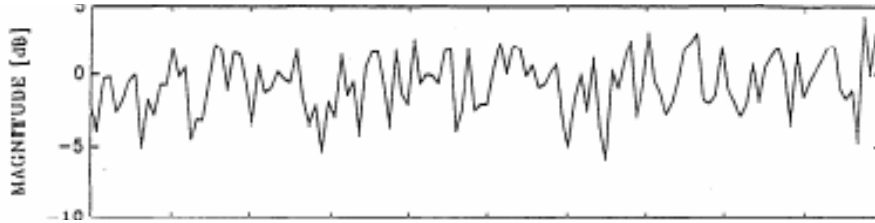
Averaging Periodograms

PSD estimate: $M=256, K=4, D=256 \rightarrow N=1024$, Window = **Rectangular**



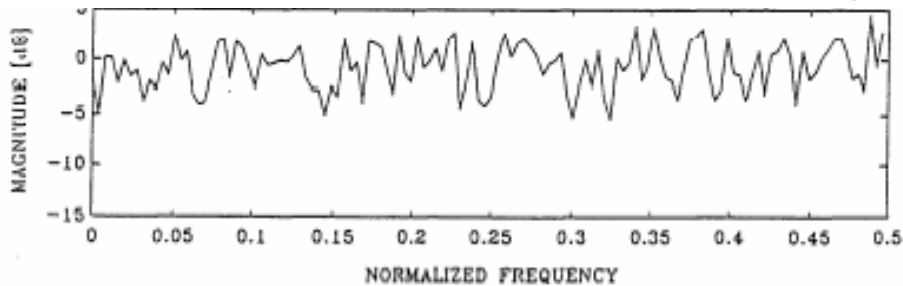
No Overlap
(Bartlett)
 $K=4$

PSD estimate: $M=256, K=8, D=109 \rightarrow N=1019$, Window = **Rectangular**



With Overlap
 $K=8$

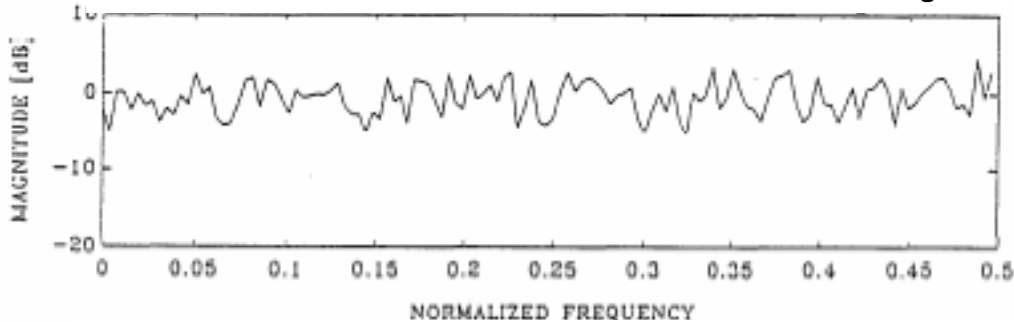
PSD estimate: $M=256, K=16, D=51 \rightarrow N=1021$, Window = **Rectangular**



With more Overlap
 $K=16$

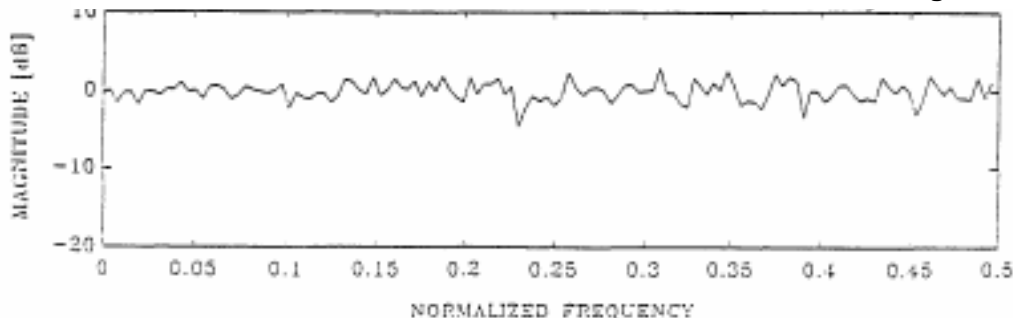
Averaging Periodograms – Cont'd

PSD estimate: $M=256, K=16, D=51 \rightarrow N=1021$, Window = **Rectangular**



With Overlap
 $K=16$

PSD estimate: $M=256, K=16, D=256 \rightarrow N=4096$, Window = **Rectangular**

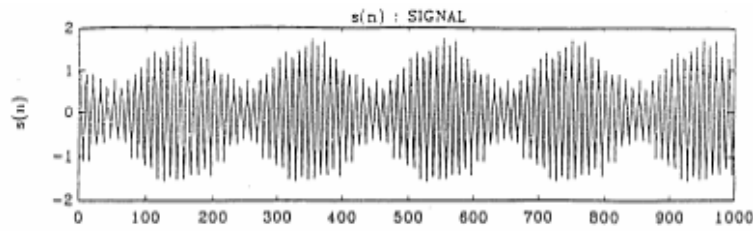


Same K
No overlap
(More Data)

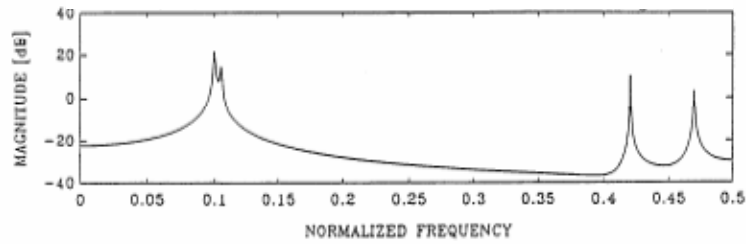
Clean Signal:

$$\sin(2\pi \cdot 0.1 \cdot n) + 0.5 \cos(2\pi \cdot 0.105 \cdot n) + 0.2 \sin(2\pi \cdot 0.42 \cdot n) + 0.1 \cos(2\pi \cdot 0.47 \cdot n)$$

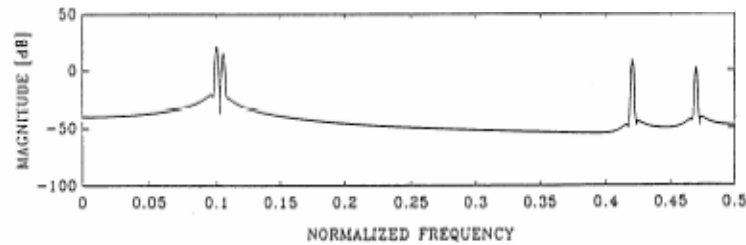
Relative amplitudes: 0 dB, -6 dB, -14 dB, -20 dB



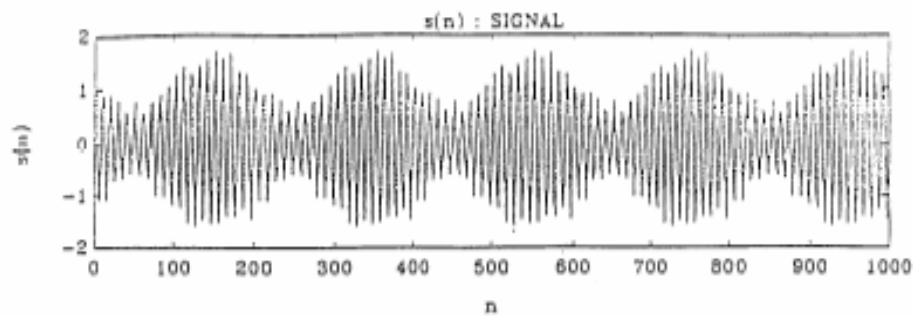
M=1024, K=1, D=1024 → N=1024, Window= Rectangular



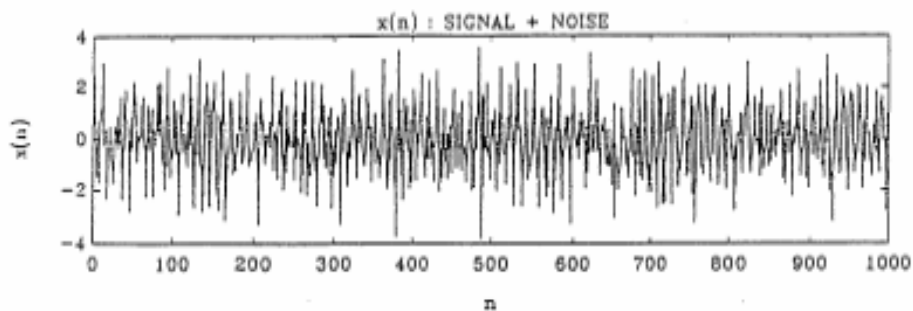
M=1024, K=1, D=1024 → N=1024, Window= Hamming



Signal + Noise



Signal

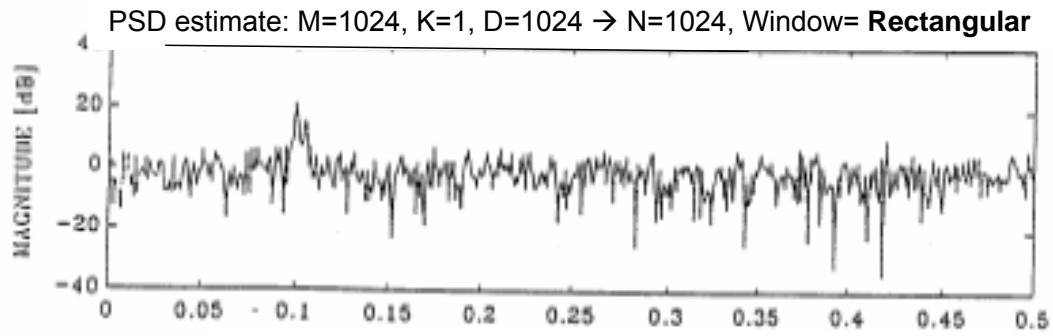


Signal + Noise

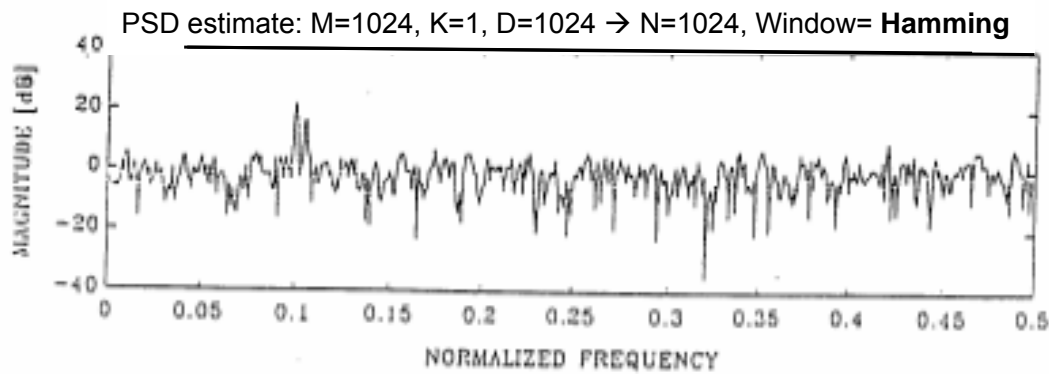
Signal: $\sin(2\pi \cdot 0.1 \cdot n) + 0.5 \cos(2\pi \cdot 0.105 \cdot n) + 0.2 \sin(2\pi \cdot 0.42 \cdot n) + 0.1 \cos(2\pi \cdot 0.47 \cdot n)$

Noise : $\mathcal{N}(0,1)$, SNR=1.9dB

Modified Periodogram

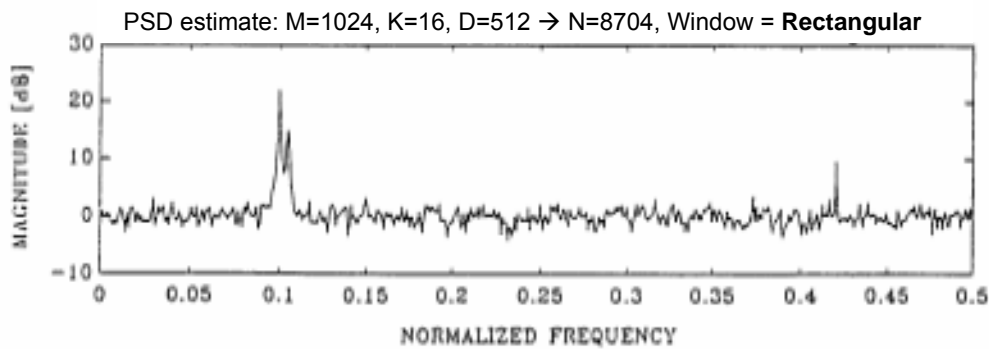


Periodogram

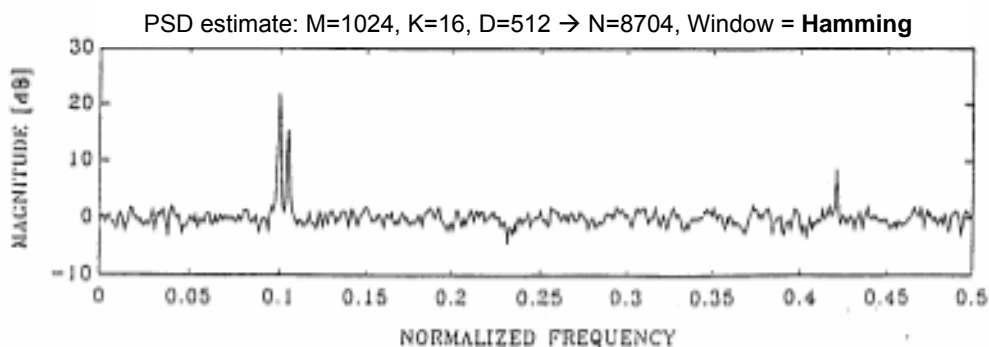


Modified Periodogram

Averaging Modified Periodograms



Averaged Periodogram
K=16



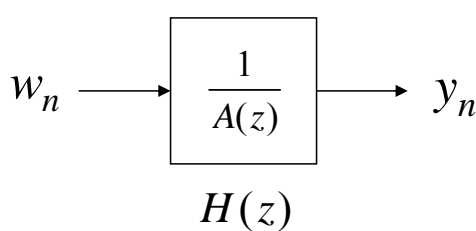
Averaged Modified Periodogram
K=16

שערוך פרמטרי של ספקטרום ההספק

יהי $\{y_n\}$ תהליך אקראי, סטציונרי (במובן הרחב), בעל ממוצע אפס וספקטרום הספק (צפיפות הספק ספקטרלית – PSD) $S_{yy}(\theta)$.
 נניח שאות זה ניתן לייצוג ע"י מודל אוטורגרסיבי מסדר p - AR(p) (Autoregressive model of order p). כלומר, כל דגם מהתהליך מקיים:

$$y_n = -\sum_{i=1}^p a_i y_{n-i} + w_n$$

כאשר $\{a_i\}_{i=1}^p$ הוא סט של מקדמים קבועים, שנייצגו ע"י הוקטור \underline{a} , ו- w_n הוא דגם מתהליך רעש לבן בעל ממוצע אפס.



$$H(z) = \frac{Y(z)}{W(z)} = \frac{1}{A(z)} \quad (\text{all-pole})$$

$$A(z) \triangleq 1 + \sum_{i=1}^p a_i z^{-i}$$

2-29

$$S_{yy}(\theta) = |H(\theta)|^2 \cdot \sigma_w^2$$

$$\sigma_w^2 = E\{w_n^2\} \quad , \text{כאשר}$$

$$S_{yy}(\theta) = \frac{\sigma_w^2}{\left| 1 + \sum_{i=1}^p a_i e^{-ij\theta} \right|^2} \quad \text{ולפיכך:}$$

לכן, בהנתן פרמטרי המודל ניתן לחשב את ספקטרום ההספק בכל תדר רצוי θ .

שערוך פרמטרי המודל (AR)

$$r_k \triangleq E\{y_n y_{n-k}\}; \quad k > 0 \quad \text{נתבונן ב:}$$

$$r_k = E\{y_n y_{n-k}\} = -\sum_{i=1}^p a_i E\{y_{n-i} y_{n-k}\} + E\{w_n y_{n-k}\}; \quad k > 0$$

2-30

$$r_k = -\sum_{i=1}^p a_i r_{k-i}; \quad k > 0, \quad \text{כלומר,}$$

ובהנחה שערכי פ' האוטוקורלציה $\{r_0, r_1, \dots, r_p\}$ ידועים (בד"כ משוערכים מדגם של התהליך), נקבל את הסט הבא של p משוואות לחישוב המקדמים:

$$\sum_{i=1}^p a_i r_{k-i} = -r_k, \quad k = 1, 2, \dots, p \quad \text{משוואות Yule-Walker (Y-W)} \\ \text{(משוואות נורמליות)}$$

$$R_p \underline{a} = -\underline{r} \quad \longrightarrow \quad \underline{a} = -R_p^{-1} \underline{r} \quad \text{ברישום מטריצי:}$$

$$\underline{r} \triangleq [r_1, r_2, \dots, r_p]^T, \quad \text{כאשר,}$$

$$R_p \triangleq \begin{bmatrix} r_0 & r_1 & r_2 & \dots & r_{p-1} \\ r_1 & r_0 & r_1 & \dots & r_{p-2} \\ r_2 & r_1 & r_0 & \dots & \\ \vdots & & & & \vdots \\ r_{p-2} & & & r_0 & r_1 \\ r_{p-1}, r_{p-2}, & \dots & r_1 & r_0 \end{bmatrix}$$

R_p היא מטריצת טופליץ (Toeplitz) סימטרית, כלומר:

$$R_p [i, j] = R_p [j, i] = R_{yy} [|i - j|] = r_{|i-j|}$$

הערה: קיים אלגוריתם רקורסיבי יעיל, שאינו דורש חיפוש מטריצה, הידוע כאלגוריתם **Levinson-Durbin**.

למציאת σ_w^2 נתבונן ב- r_0 :

$$r_0 = E\{y_n^2\} = -\sum_{i=1}^p a_i r_i + E\{w_n^2\}$$

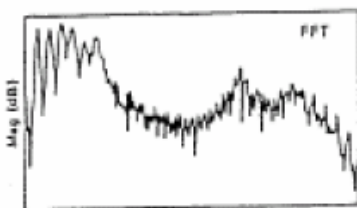
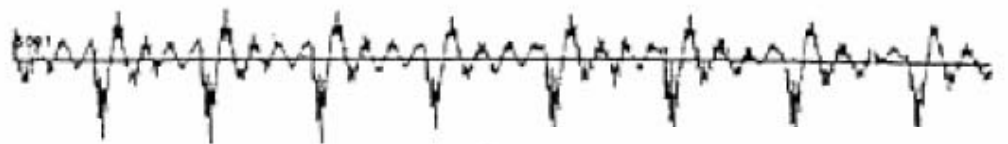
ומכאן:

$$\sigma_w^2 = r_0 + \sum_{i=1}^p a_i r_i = r_0 + \underline{a}^T \underline{r} = r_0 - \underline{a}^T R_p \underline{a}$$

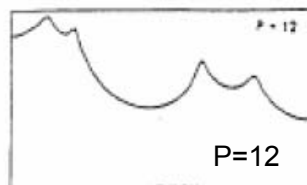
וכמובן שמציבים בביטוי את הערכים המשוערכים.

Example: Analysis of a Speech Signal

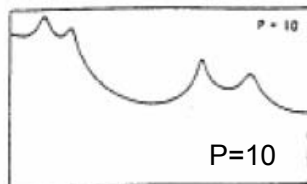
אות דיבור קולי
(Voiced – a,e,u,o,i)



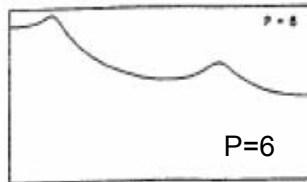
FFT



P=12

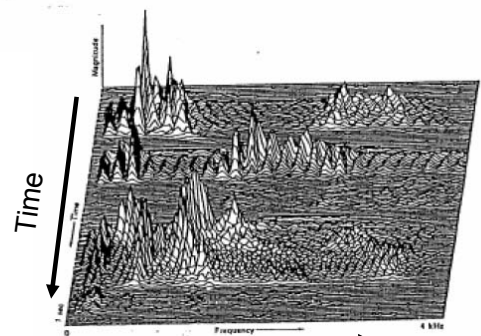


P=10

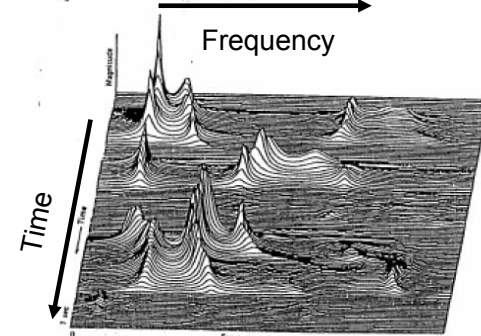


P=6

LPC



FFT



LPC

Frequency

3. עיבוד רב-קצבים של אותות Multirate Signal Processing

- מערכות דצימציה ואינטרפולציה.
- מערכות דואליות.
- דצימציה/אינטרפולציה ביחסים רציונליים.
- מסנני פוליפאזה.
- תכן של מסנני דצימציה/אינטרפולציה.
- מערכות מרובות דרגות.
- מסננים צרי סרט.
- מסנני Half-band.

מקורות ספרות

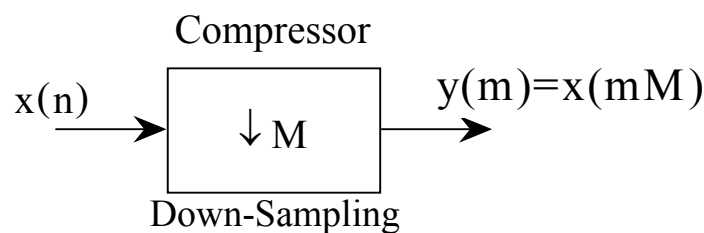
Porat Mitra Proakis ספרים:
1 – Ch. 12 2 – Ch. 10/13 3 – Ch. 10/11

R.E. Crochiere & L.R. Rabiner, "Interpolation and Decimation of Signals – A Tutorial Review", Proc. IEEE, March 1981, pp. 300-331.

3 - 1

מערכות דצימציה ואינטרפולציה

א. דצימציה (דילול) M:1 Decimation



מבקשים למצוא את $Y(z)$.

נגדיר:

$$x'(n) \triangleq \begin{cases} x(n) & n = 0, \pm M, \pm 2M, \dots \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כלומר,

$$\begin{aligned} x'(n) &= x(n) \cdot \delta(n \bmod M) = x(n) \cdot \delta((n))_M \\ &= x(n) \cdot \left\{ \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{j \frac{2\pi}{M} ln} \right\} \end{aligned}$$

$$y(m) = x'(mM)$$

ולכן:

$$Y(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x'(mM)z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x'(m)z^{-m/M}$$

ומכאן,

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left\{ \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}lm} \right\} z^{-m/M}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) e^{j\frac{2\pi}{M}lm} z^{-m/M}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left(e^{-j\frac{2\pi}{M}l} z^{1/M} \right)^{-m}$$

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(e^{-j\frac{2\pi}{M}l} z^{1/M})$$

$$Y(z) \Big|_{z=e^{j\theta'}} = Y(\theta') = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X\left(\frac{\theta' - 2\pi l}{M}\right)$$

ובתחום התדר:

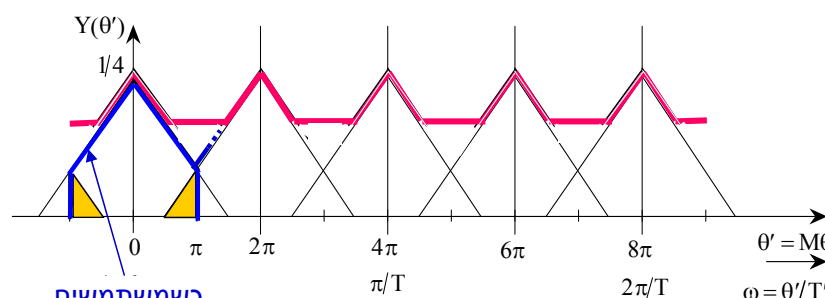
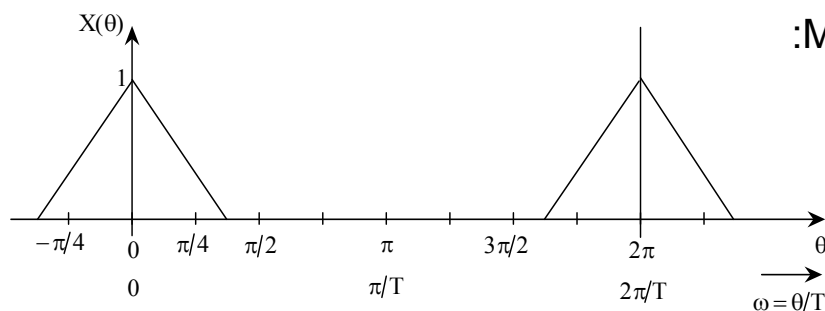
כאשר,

$$\theta = \omega T$$

$$\theta' = \omega T'$$

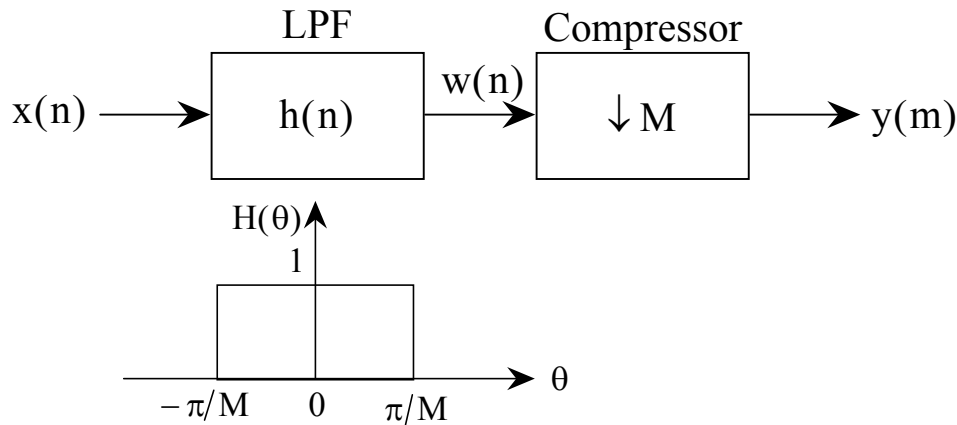
$$T' = MT \Rightarrow \theta' = M\omega T = M\theta$$

נדגים עבור $M=4$:



כשמתמשים
ב LPF (אידיאלי)
לפני הדילול

למניעת שגיאת הקיפול (aliasing) משתמשים במערכת דצימציה הכוללת מסנן LP :



$$w(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \Leftrightarrow W(z) = H(z)X(z)$$

$$y(m) = w(mM) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(mM-k)$$

$$Y(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} W(e^{-j\frac{2\pi l}{M}} z^{1/M}) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} H(e^{-j\frac{2\pi l}{M}} z^{1/M}) X(e^{-j\frac{2\pi l}{M}} z^{1/M})$$

3 - 5

ובתחום התדר :

$$Y(\theta') = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} H\left(\frac{\theta' - 2\pi l}{M}\right) X\left(\frac{\theta' - 2\pi l}{M}\right), \quad \theta' = M\theta$$

ולכן, עם מסנן מעביר נמוכים אידיאלי:

$$H_{\text{ideal LPF}}(\theta) = \begin{cases} 1 & |\theta| < \pi/M \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

נקבל:

$$Y(\theta') = \frac{1}{M} X\left(\frac{\theta'}{M}\right); \quad |\theta'| \leq \pi$$

הערה

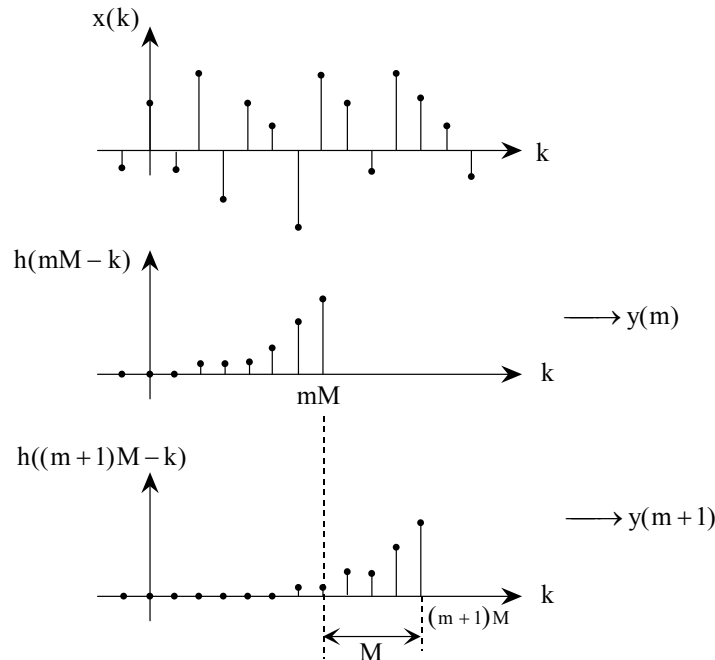
ראוי לשים לב שמערכת דצימציה היא מערכת ליניארית תלויה בזמן

3 - 6

שיקולי מימוש

אם משתמשים במסנן FIR בעל N מקדמים למימוש המסנן $h(n)$, הרי שניתן לנצל את העובדה שמוצא המסנן $w(n)$ עובר דילול, כלומר :

$$y(m) = w(mM) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) x(mM - k) = \sum_{k=mM-N+1}^{mM} x(k) h(mM - k)$$



3 - 7

מס' החישובים

לפיכך, אם אורך מסנן ה-FIR הוא N, תדר הדגימה הוא $F = 1/T$ ויחס הדצימציה הוא M (כלומר הקצב האיטי הוא $F' = F/M = 1/T'$), אזי מס' החישובים הוא:

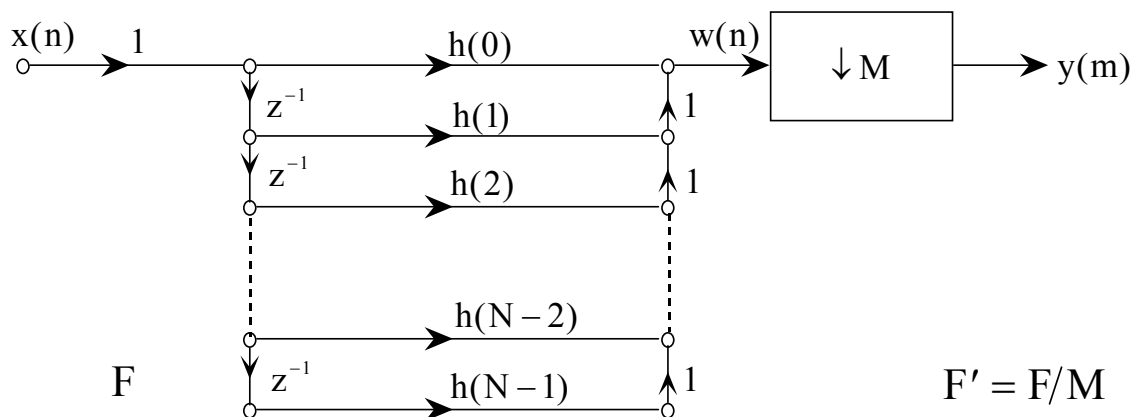
$R = NF$ MADS / sec : ללא ניצול הדצימציה •

$R = \frac{N}{M} F = NF'$ MADS / sec : עם ניצול הדצימציה •

MADS = Multiply & Adds : כאשר

ניתן להראות החיסכון בחישובים גם מתוך דיאגרמות מימוש של המסנן (FIR) באופן הבא:

מימוש ללא נצול הדצימציה



$F' = F/M$

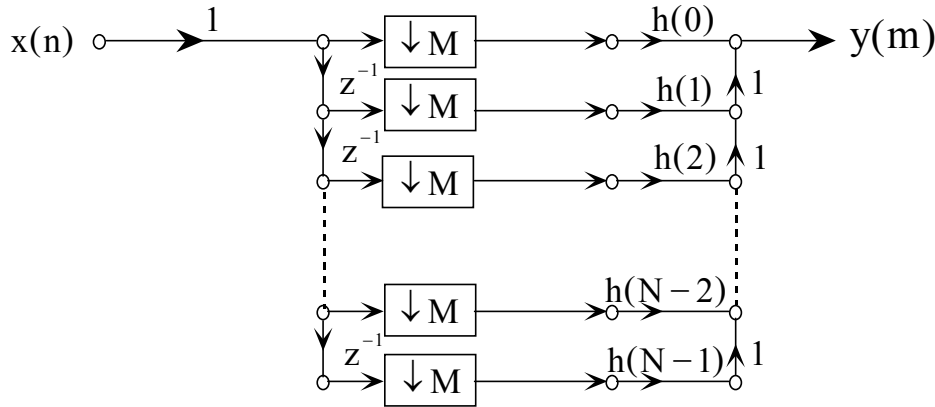
3 - 8

מימוש עם ניצול הדצימציה

נשתמש באקוויולנטיות הבאה (קומוטטיביות של גורם הגבר):

$$x(n) \xrightarrow{G} \boxed{\downarrow M} \rightarrow y(m) \equiv x(n) \xrightarrow{\boxed{\downarrow M}} \xrightarrow{G} y(m)$$

ונקבל:

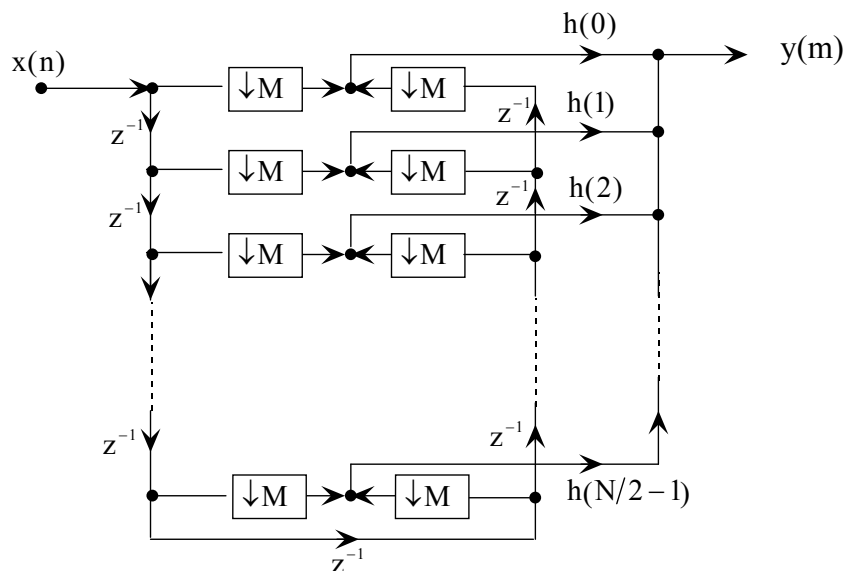


F

F' = F/M

כלומר, המסנן מופעל בקצב האיטי.

מימוש עם ניצול הדצימציה והסימטריה של מסנן FIR (LPF) עם פאזה לינארית



Direct form of an M to 1 decimator that exploits symmetry in $h(n)$ for even values of N (# of coeff). (נלקח ממאמר הסקירה – ציור 12)

סה"כ קצב החישובים כאן הוא: $R = \frac{1}{2} \frac{N}{M} F = \frac{1}{2} N F'$ MPS = Multiplies/sec

ובמקרה הכללי (N זוגי או אי-זוגי): $R = \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil \frac{F}{M} = \left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil F'$ MPS

(מספר החיבורים לא קטן בפקטור 1/2 ולכן במקום MADS/sec מופיע כאן MPS)

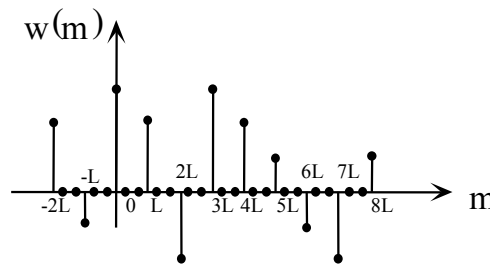
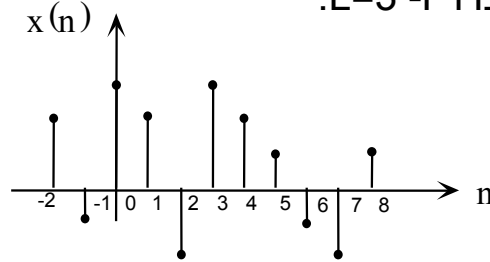
ב. אינטרפולציה 1:L

קצב הדגימה בכניסה : $F = 1/T$

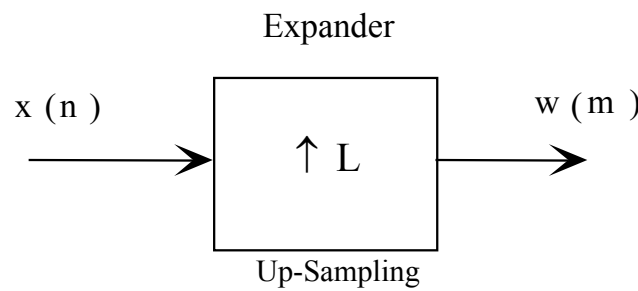
קצב הדגימה ביציאה : $F' = 1/T' = LF$, כלומר : $T' = T/L$

$$w(m) \triangleq \begin{cases} x\left(\frac{m}{L}\right) & m = 0, \pm L, \pm 2L \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{נגדיר:}$$

למשל, עבור $x(n)$ המצויר ו- $L=3$:



3-11



הסימון:

$$W(z) \triangleq \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(m) z^{-m} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) z^{-mL} = X(z^L)$$

כאן:

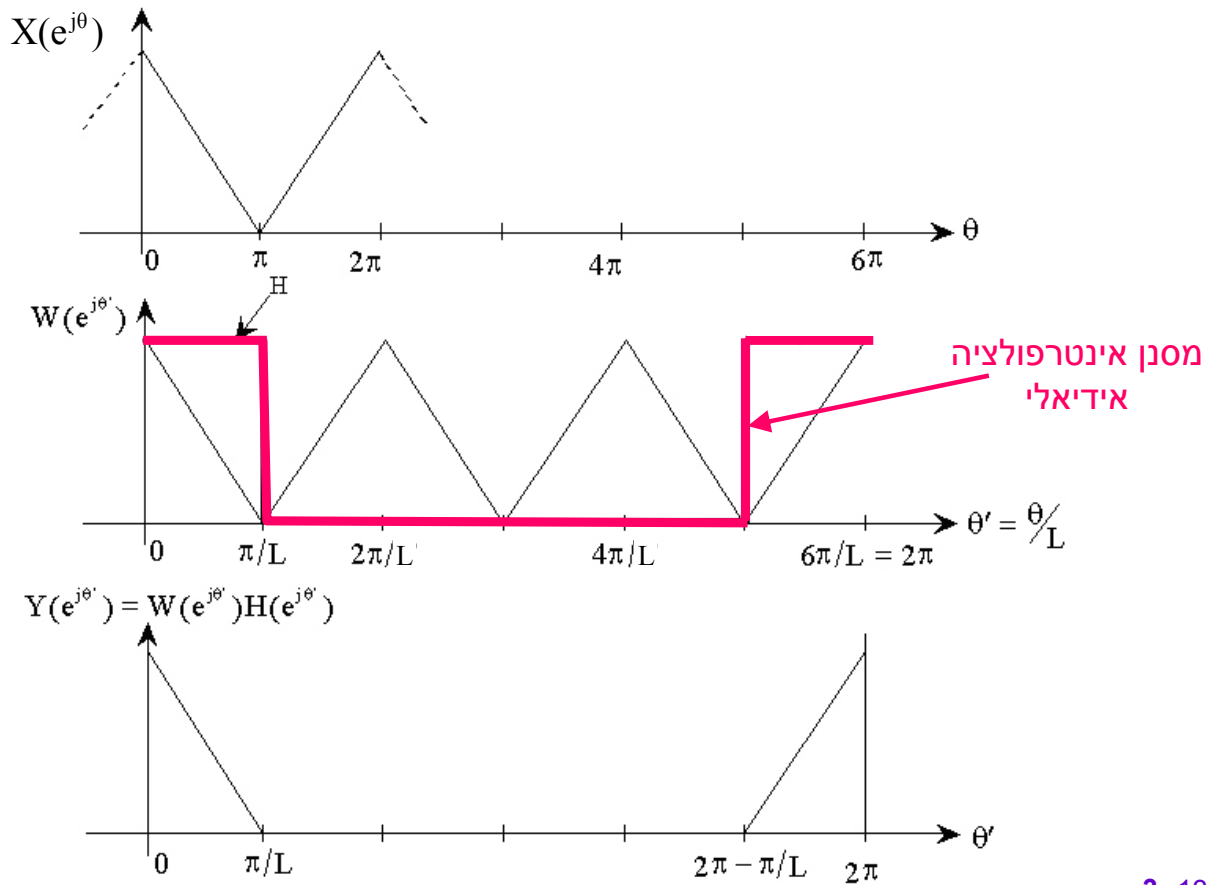
$$\theta = \omega T \quad ; \quad \theta' = \omega T' \quad ; \quad T' = \frac{T}{L} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\theta' = \frac{\theta}{L}}}$$

ולכן,

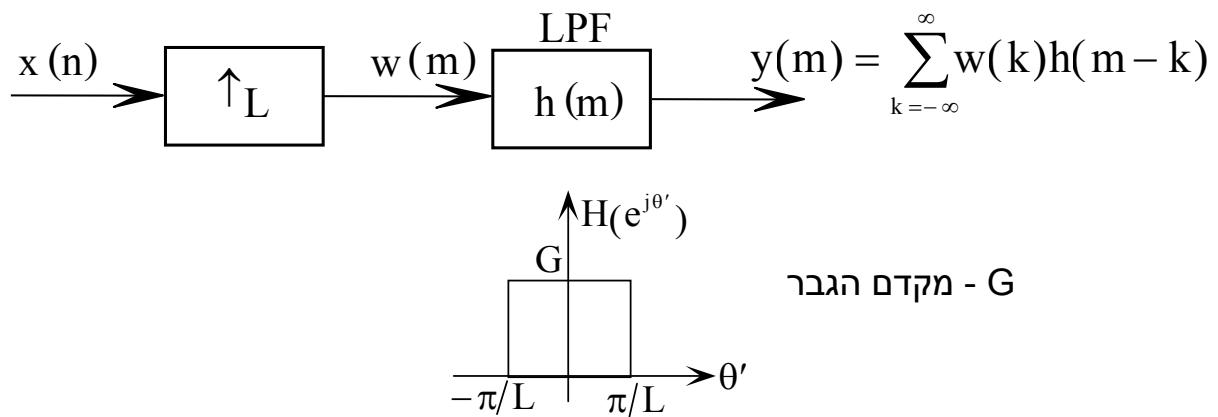
$$W(e^{j\theta'}) = X(e^{jL\theta'}) \equiv X(L\theta')$$

3-12

דוגמה עבור $L=3$



מערכת אינטרפולציה



$h(n)$ Ideal LPF $\Rightarrow Y(e^{j\theta'}) = GX(e^{j\theta'L}) \quad |\theta'| \leq \pi/L$

$y(nL) = x(n) \Rightarrow G = L$ **טענה:**

הוכחת הטענה ע"י התייחסות לקשר בין $x(0)$ לבין $y(0)$.

שיקולי מימוש

$$y(m) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(k)h(m-k) = \sum_{\substack{r=-\infty \\ k=rL}}^{\infty} x(r)h(m-rL) \quad ; \quad (w(k) = 0 \quad , \quad k \neq rL)$$

רואים שלערך נתון של m רק חלק מאברי $h(n)$ משתתפים בחישוב (בקפיצות של L , עם הזזה m) ולפיכך ניתן לחסוך חישובים בפקטור L כמודגם בהמשך.

נבצע בביטוי הימני שינוי משתנים:

$$r = \left\lfloor \frac{m}{L} \right\rfloor - n$$

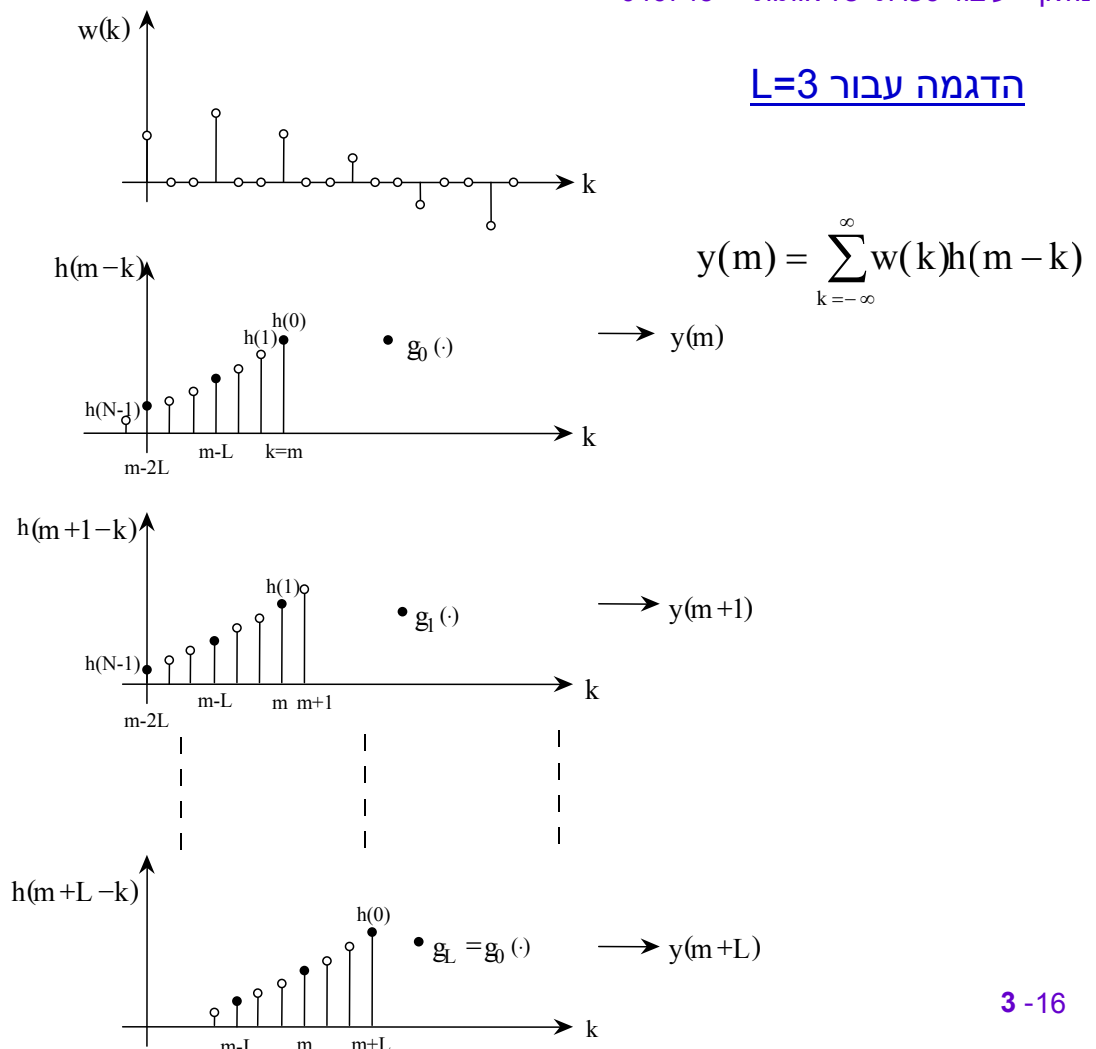
$$\begin{aligned} y(m) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x\left(\left\lfloor \frac{m}{L} \right\rfloor - n\right) h\left(m - \left\lfloor \frac{m}{L} \right\rfloor L + nL\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nL + m \oplus L) x\left(\left\lfloor \frac{m}{L} \right\rfloor - n\right) \end{aligned}$$

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_m(n) x\left(\left\lfloor \frac{m}{L} \right\rfloor - n\right)$$

$$g_m(n) \triangleq h(nL + m \oplus L)$$

(מחזורית ב- m במחזור L)

הדגמה עבור $L=3$

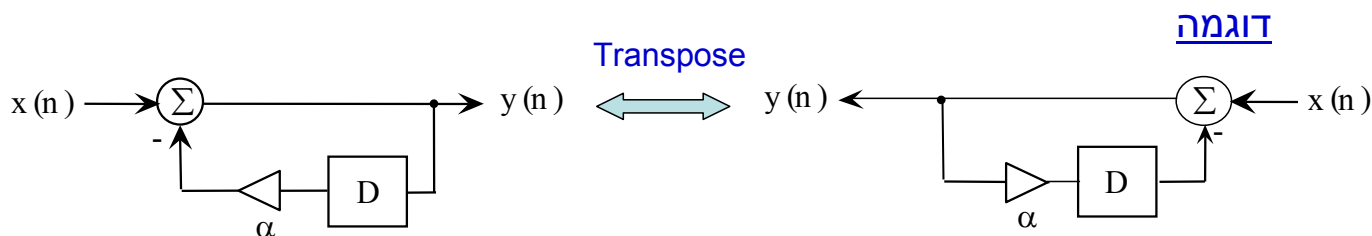


מערכות דואליות

על מנת להראות כיצד החיסכון הנ"ל בחישובים נגזר גם מתוך המבנה הטופולוגי של המסנן (במימוש מתאים), נדון תחילה ב-"מערכות דואליות":

- מערכת דואלית למערכת נתונה מוגדרת כמערכת המתקבלת ע"י פעולת טרנספוזיציה.
- פעולת טרנספוזיציה מוגדרת ביחס ל- Signal Flow Graph (SFG) של מערכת נתונה באופן הבא:

- הפיכת התפקידים של הדקי הכניסה והיציאה.
- הפיכת כיווני ענפים והחלפת פעולתם ב- Transpose שלהם:
- הגבר והשהיות – נשארים ללא שינוי.
- צומת סיכום וצומת פיצול מתחלפים זה בזה.



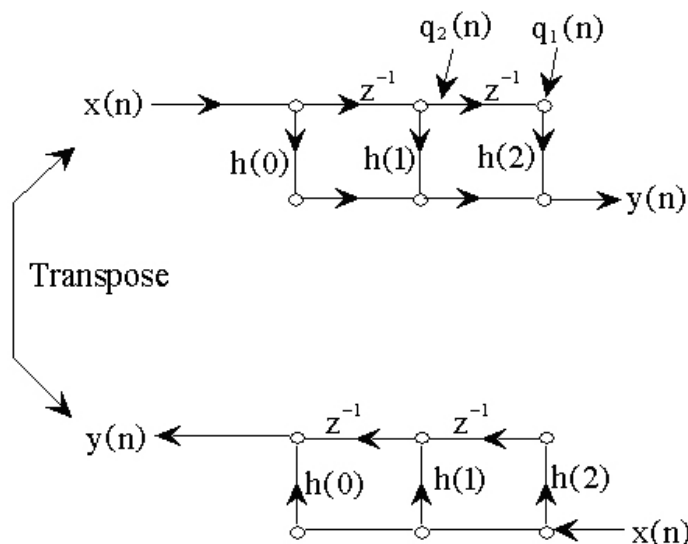
3-17

דוגמה נוספת – מסנן FIR

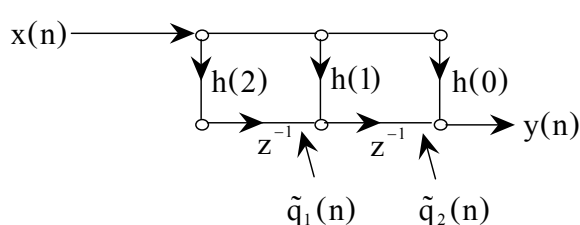
ייצוג ע"י משתני מצב:

$$\underline{q}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{q}(n) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = [h(2) \quad h(1)] \underline{q}(n) + h(0)x(n)$$



Transpose



המערכת הדואלית

$$\tilde{\underline{q}}(n+1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tilde{\underline{q}}(n) + \begin{bmatrix} h(2) \\ h(1) \end{bmatrix} x(n)$$

$$y(n) = [0 \quad 1] \tilde{\underline{q}}(n) + h(0)x(n)$$

3-18

נראה כעת שעבור מערכת לינארית קבועה בזמן, עם כניסה אחת ויציאה אחת, פונקצית התמסורת של המערכת הדואלית זהה לזו של המערכת הנתונה: בייצוג על פי משתני מצב, המערכת המקורית מאופיינת במקרה הכללי ע"י

כלומר: $\{A, \underline{b}, \underline{c}^T, d\}$

$$\underline{q}(n+1) = A\underline{q}(n) + \underline{b}x(n)$$

$$y(n) = \underline{c}^T \underline{q}(n) + dx(n)$$

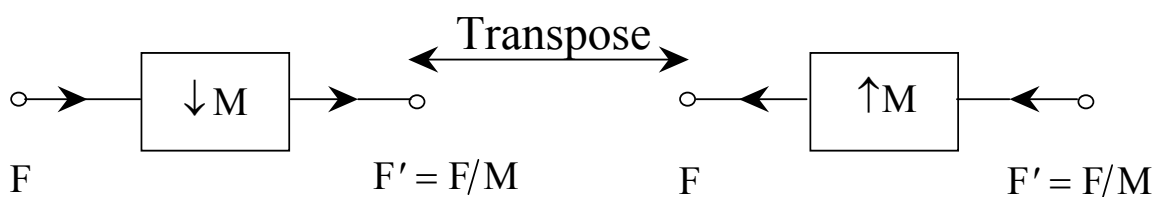
המערכת הדואלית מאופיינת אז ע"י $\{A^T, \underline{c}, \underline{b}^T, d\}$

$$h(n) = \begin{cases} d & n = 0 \\ \underline{c}^T A^{n-1} \underline{b} & n > 0 \end{cases} \quad \text{התגובה להלם של המערכת המקורית:}$$

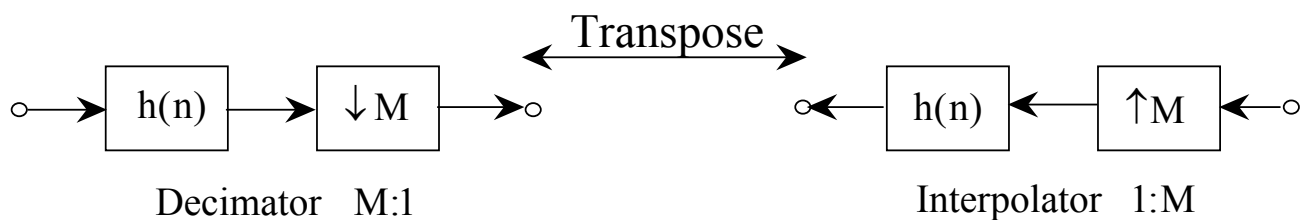
לכן, התגובה להלם של המערכת הדואלית:

$$h_{\text{dual}}(n) = \begin{cases} d, & n = 0 \\ \underline{b}^T (A^T)^{n-1} \underline{c}, & n > 0 \end{cases} = \begin{cases} d, & n = 0 \\ (\underline{c}^T A^{n-1} \underline{b})^T, & n > 0 \end{cases} = h(n)$$

אם נגדיר שפעולת טרנספוזיציה על פני Compressor נותנת Expander, כלומר:

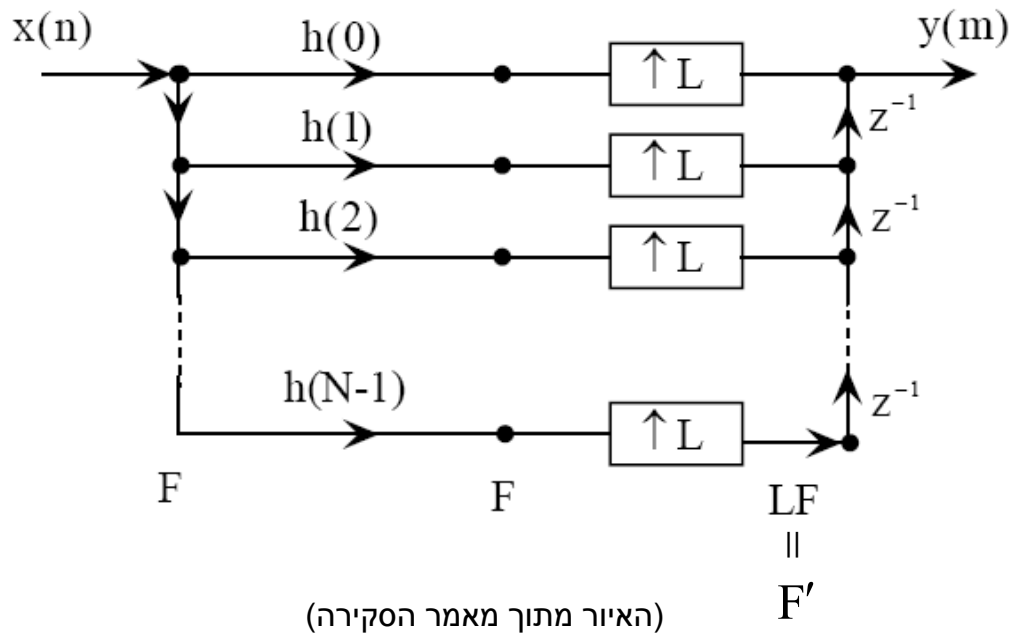


נקבל:



כלומר, מערכת דצימציה היא דואלית למערכת אינטרפולציה.

פעולת טרנספוזיציה על המימוש ה"חסכוני" של מערכת דצימציה מביאה למימוש החסכוני הבא של מערכת אינטרפולציה



$$R = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \frac{F'}{L} = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor F \quad \text{MPS} \quad (\text{עם ניצול סימטריה ו-N כלשהו}):$$

[קצב החישובים](#)

מסנני פוליפאזה (Polyphase) לדצימציה ואינטרפולציה

קיבלנו עבור מערכת אינטרפולציה (1:L):

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_m(n) x\left(\left\lfloor \frac{m}{L} \right\rfloor - n\right)$$

כאשר,

$$g_m(n) = h(nL + m \oplus L)$$

$g_m(n)$ היא סדרה מחזורית ב-m במחזור L (לכל n)

נגדיר L מסננים קבועים בזמן הנגזרים מ-h(n):

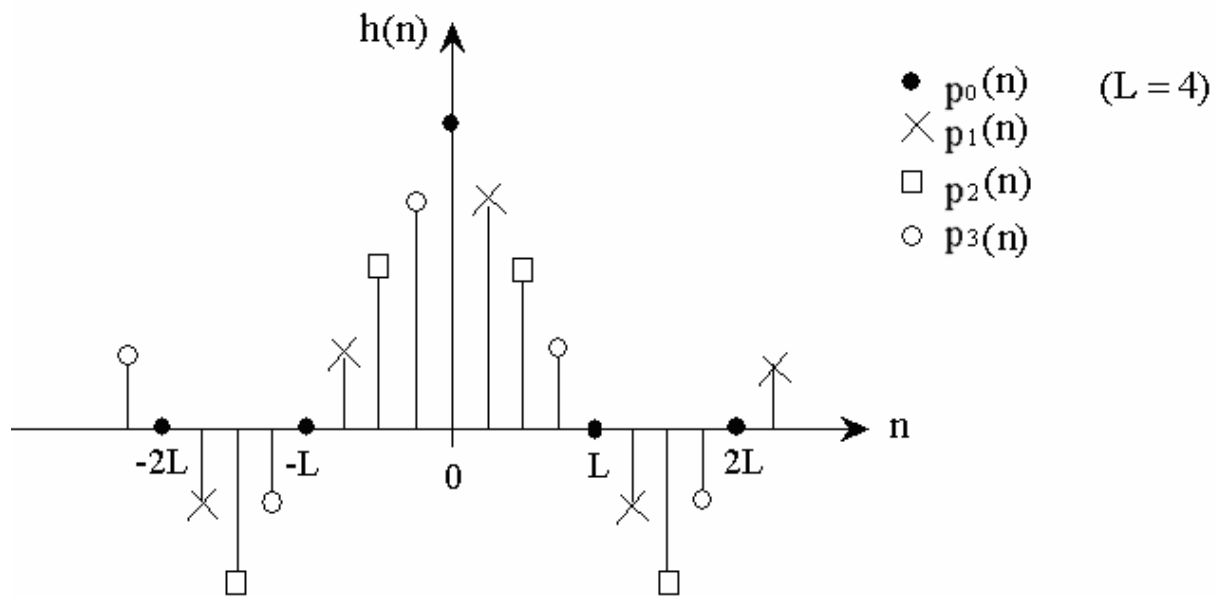
$$p_\rho(n) = h(nL + \rho) ; \quad \rho = 0, 1, \dots, L-1 \quad \forall n$$

כלומר,

$$p_\rho(n) = g_\rho(n) ; \quad \rho = 0, 1, \dots, L-1$$

מסננים אלו קרויים מסנני Polyphase.

דוגמה:



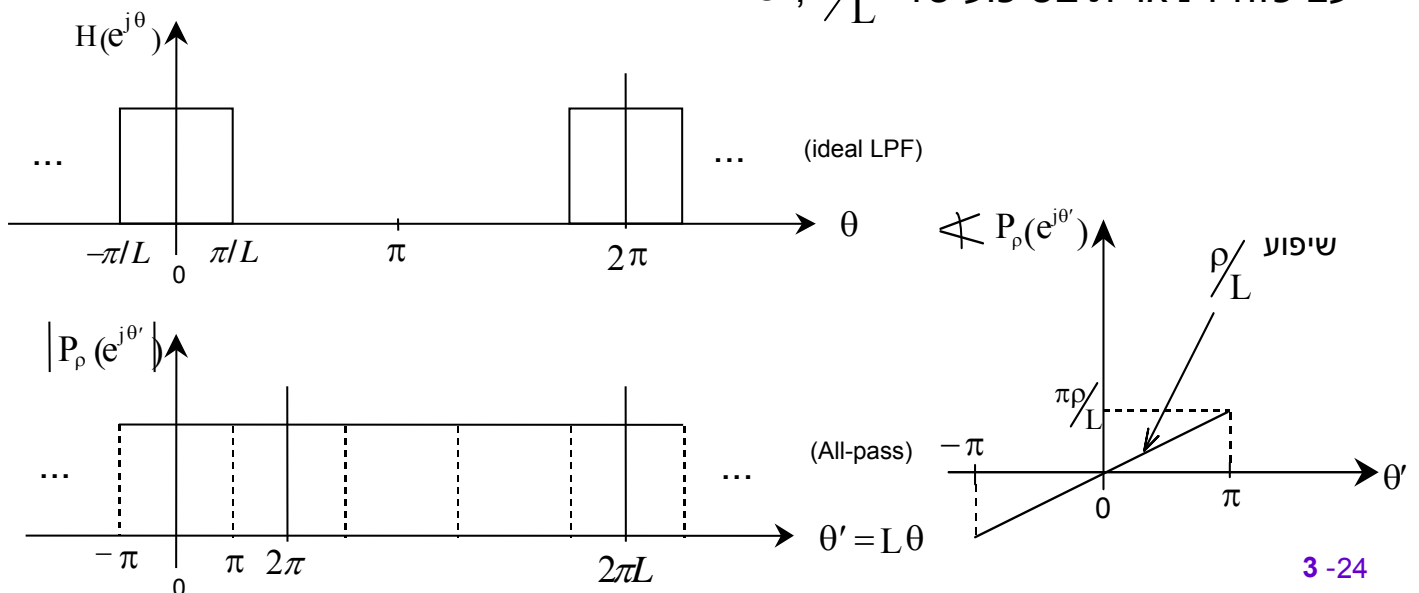
לתשומת לב: לא כל תת-המסננים של מסנן סימטרי הם בהכרח סימטריים

תגובת התדר של מסנני Polyphase:

$$P_\rho(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_\rho(n)z^{-n} \Big|_{z=e^{j\theta'}} = \frac{1}{L} \sum_{l=0}^{L-1} e^{j(\theta'-2\pi l)\rho/L} H(e^{j(\theta'-2\pi l)/L}),$$

$\rho = 0, 1, \dots, L - 1$

עבור H שהוא מסנן מעביר נמוכים אידיאלי מתקבל ש- P_ρ הוא מסנן All-pass, עם פזה ליניארית בשיפוע של ρ/L , כמודגם בציור הבא:

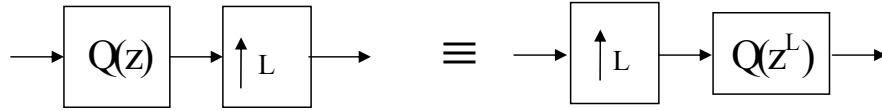


הרכבת המסנן $h(n)$ ממסנני הפוליפאזה

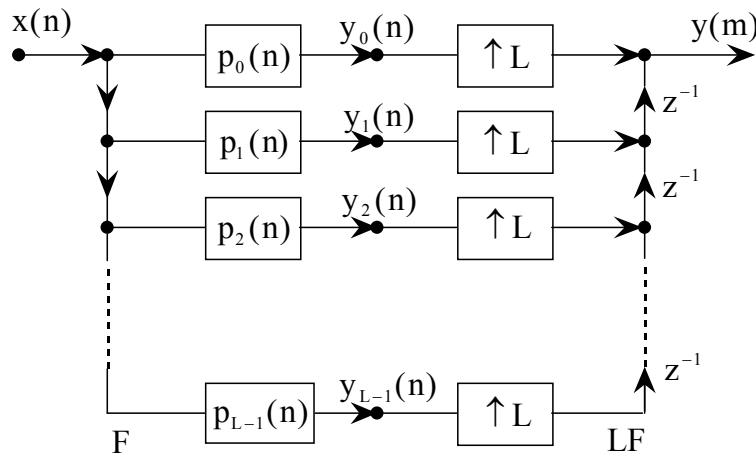
יהי $\tilde{p}_\rho(n)$ אות המוצא של Expander שכניסתו $p_\rho(n)$.

$$H(z) = \sum_{\rho=0}^{L-1} z^{-\rho} P_\rho(z^L) \quad \longleftarrow \quad h(n) = \sum_{\rho=0}^{L-1} \tilde{p}_\rho(n-\rho), \text{ אזי}$$

תוצאה זו והשקילות הבאה (Noble Equality):



מאפשרת להציג מערכת אינטרפולציה ע"י הדיאגרמה הבאה:

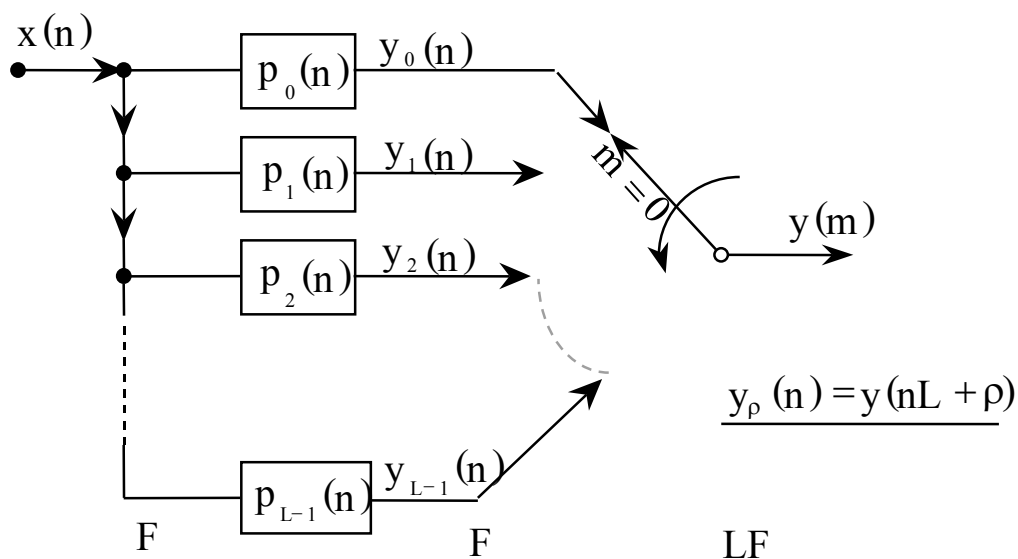


$$p_\rho(n) \triangleq h(nL + \rho)$$

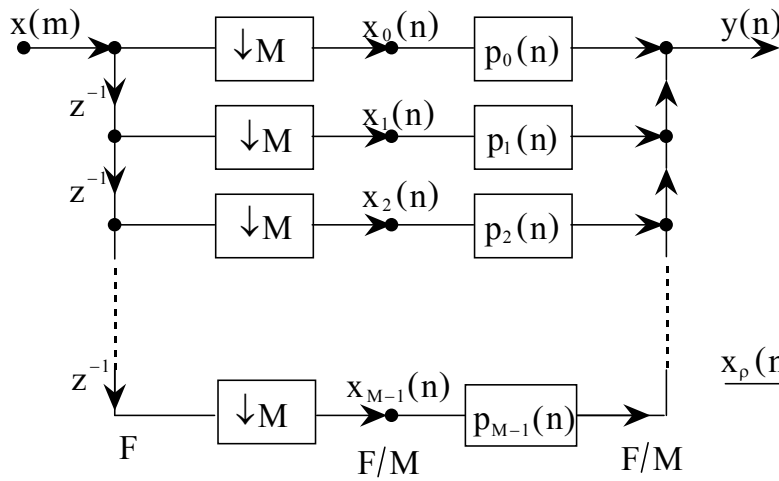
$$y_\rho(n) \triangleq y(nL + \rho)$$

$$\rho = 0, 1, \dots, L - 1$$

מימוש מערכת אינטרפולציה ע"י מסנן סיבובי (Commutator)

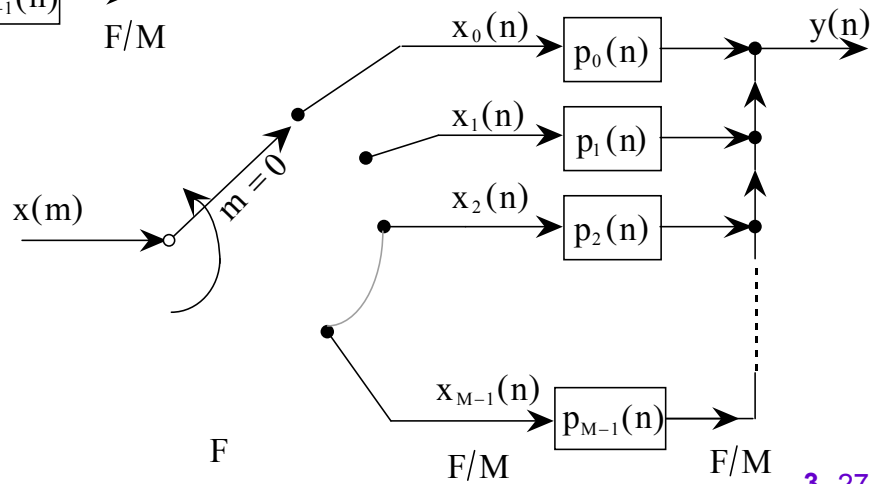


מימוש מערכת דצימציה בעזרת מסנני Polyphase



מימושים אלה מתקבלים ע"י הפעלת פעולת טרנספוזיציה על שתי הדיאגרמות האחרונות.

$$x_\rho(n) = x(nM - \rho)$$



3-27

תאור אנליטי

עבור דצימציה (ר' שקף 3-5, בהחלפת m ב-n):

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(nM - k)$$

ובהצגת $k=rM+\rho$; $\rho=0,1,2,\dots,M-1$, $r=0,\pm 1,\pm 2,\dots$

$$y(n) = \sum_{\rho=0}^{M-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(rM + \rho)x((n - r)M - \rho)$$

$$= \sum_{\rho=0}^{M-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} p_\rho(r)x_\rho(n - r)$$

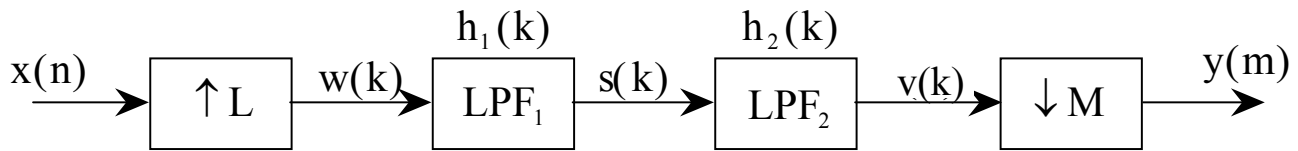
$$= \sum_{\rho=0}^{M-1} (p_\rho(n) * x_\rho(n))$$

$$x_\rho(n) \triangleq x(nM - \rho)$$

כאשר:

3-28

שינוי קצב דגימה ביחס רציונלי L/M



מע' אינטרפולציה 1:L

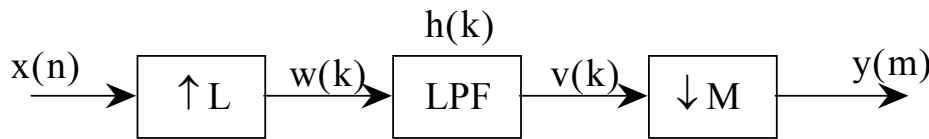
מע' דצימציה M:1

$$F = 1/T \quad F'' = LF \quad F'' = LF \quad F' = \frac{L}{M} F$$

שני המסננים פועלים באותו קצב (F'') ולכן אפשר לאחדם למסנן יחיד, עם הספציפיקציות:

$$H(e^{j\theta''}) = \begin{cases} L & |\theta''| \leq \text{Min}\left\{\frac{\pi}{L}, \frac{\pi}{M}\right\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} ; |\theta''| \leq \pi$$

ומקבלים:



$$F \quad F'' = LF \quad F'' = LF \quad F' = \frac{L}{M} F$$

ביטוי אנליטי לחישוב אות המוצא

$$y(m) = v(mM) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(r)h(mM - rL)$$

$$r = \left\lfloor \frac{mM}{L} \right\rfloor - n \quad \text{החלפת משתנים:}$$

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h\left(mM - \left\lfloor \frac{mM}{L} \right\rfloor L + nL\right) x\left(\left\lfloor \frac{mM}{L} \right\rfloor - n\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nL + mM \oplus L) x\left(\left\lfloor \frac{mM}{L} \right\rfloor - n\right)$$

$$q_m(n) \triangleq h(nL + mM \oplus L), \quad \forall m, \forall n \quad \text{ובהצגת:}$$

$$y(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_m(n) x\left(\left\lfloor \frac{mM}{L} \right\rfloor - n\right)$$

בתחום התדר

$$V(e^{j\theta''}) = H(e^{j\theta''})X(e^{j\theta''L})$$

$$\begin{aligned} Y(e^{j\theta'}) &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} V\left(e^{j(\theta' - 2\pi l)/M}\right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} H\left(e^{j(\theta' - 2\pi l)/M}\right) X\left(e^{j(\theta' L - 2\pi l)/M}\right) \end{aligned}$$

ובהנחה ש- H הוא מסנן אידיאלי (עפ"י הספציפיקציות בשקף 29-3):

$$Y(e^{j\theta'}) = \begin{cases} \frac{L}{M} X(e^{j\theta' L/M}) & |\theta'| \leq \text{Min} \left\{ \pi, \frac{\pi M}{L} \right\} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} ; |\theta'| \leq \pi$$

$$\theta'' = \theta/L ; \quad \theta' = M\theta'' = \frac{M}{L}\theta \quad \text{כאשר,}$$

3-31

מימוש יעיל

נניח שאורך המסנן הוא כפולה שלמה של L : $N=QL$, Q שלם.
אזי לכל מסנן בסט $q_m(n)$, $m=0,1,\dots$ יש בדיוק Q מקדמים.
מכיוון ש $q_m(n)$ מחזורית ב- m , במחזור L :

$$q_m(n) = q_{m+rL}(n), \quad r=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

ניתן לרשום:

$$y(m) = \sum_{n=0}^{Q-1} q_{m \oplus L}(n) x\left(\left\lfloor \frac{mM}{L} \right\rfloor - n\right)$$

לכן, לכל ערך של m יש לבצע Q פעולות כפל (על איברים מתאימים מסדרת הכניסה).

קצב החשובים הוא לפיכך: $\text{MADS/sec} = \frac{N}{L} \cdot \frac{L}{M} F = \frac{N}{M} F$, במקום $NF'' = NLF$, כלומר,

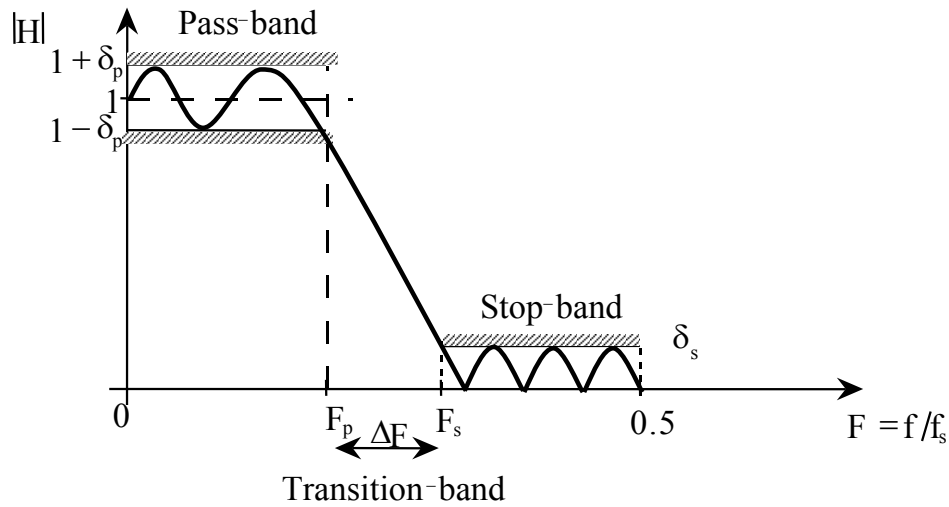
החסכון בחישובים הוא בפקטור $L \cdot M$.

3-32

תכן מסנני דצימציה / אינטרפולציה

תכן מסנני FIR - תזכורת

מתן הספציפיקציות למסנן מעביר נמוכים (LPF)



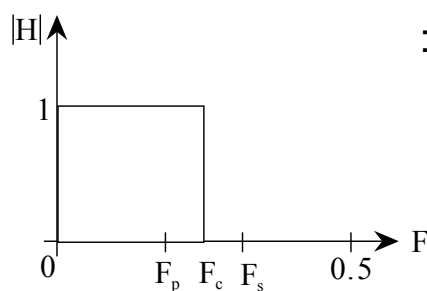
$$\delta_p - \text{Pass-band} \rightarrow A_p = 20 \log \frac{1 + \delta_p}{1 - \delta_p} \quad [\text{dB}] \quad (\text{Ripple in dB})$$

$$\delta_s - \text{Stop-band} \rightarrow A_s = -20 \log \delta_s \quad [\text{dB}] \quad (\text{Attenuation in dB})$$

שיטות לתכן מסנני FIR

1. שיטת החלון

(1) קובעים את התגובה האידיאלית הרצויה:



$$F_c = \frac{F_p + F_s}{2}$$

(2) מפרקים לטור פוריה את ההרחבה המחזורית של התגובה האידיאלית:

$$h(n) = \frac{1}{n\pi} \sin(2\pi F_c n)$$

(3) מכפילים את $h(n)$ בפונקציית חלון באורך סופי $N = 2M + 1$:

$$\hat{h}(n) = w(n) h(n)$$

(4) לקבלת מסנן סיבתי מזיזים ב- M נקודות: $\tilde{h}(n) = \hat{h}(n - M)$

2. תכן מסנני FIR אופטימליים (במובן MIN-MAX)

כזכור, תגובת התדר של מסנן FIR בעל פאזה לינארית מוכללת היא מהצורה:

$$H(\theta) = F(\theta) \cdot G(\theta) \cdot e^{j(\phi_0 - 0.5N\theta)} \quad N - \text{סדר המסנן}$$

כאשר,

$$F(\theta) \in \{1, \sin(\theta), \cos(0.5\theta), \sin(0.5\theta)\} \quad (4 \text{ מקרים})$$

$$G(\theta) = \sum_{k=0}^K g_k \cos(k\theta)$$

$$K = \frac{N}{2}, \frac{N-1}{2} \quad \text{- עפ"י זוגיות סדר המסנן.}$$

3-35

גישת התכן

נתונה תגובת התדר הממשית הרצויה $A(\theta) = F(\theta)G(\theta)$ וסדר המסנן N .
בעיית התכן מוצגת כבעיית קירוב של Chebyshev:

$$\text{Min}_{g_k} \text{Max}_{\theta \in \Theta} \left\{ W(\theta) \cdot \left| A(\theta) - F(\theta) \cdot \sum_{k=0}^K g_k \cos(k\theta) \right| \right\} =$$

$$\text{Min}_{g_k} \text{Max}_{\theta \in \Theta} \left\{ W(\theta) F(\theta) \cdot \left| \frac{A(\theta)}{F(\theta)} - \sum_{k=0}^K g_k \cos(k\theta) \right| \right\} =$$

$$\text{Min}_{g_k} \text{Max}_{\theta \in \Theta} \left\{ \hat{W}(\theta) \cdot \left| \hat{A}(\theta) - \sum_{k=0}^K g_k \cos(k\theta) \right| \right\}$$

כאשר,

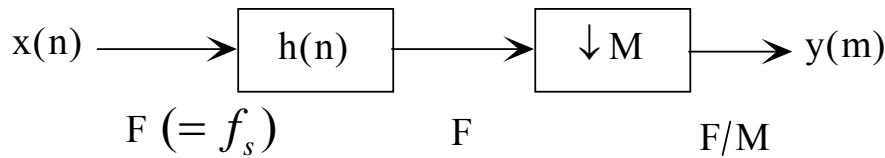
$W(\theta)$ - פ' משקל בתחום התדר.

Θ - אוסף התדרים שלגביו מוגדרת התגובה הרצויה ($\theta \neq 0, \pi$).

הפתרון הידוע לבעיית התכן הנ"ל הוא איטרטיבי ונתון על בסיס משפט חילופי הסימן (פתרון Equiripple) ע"י ה- Remez Exchange Algorithm.

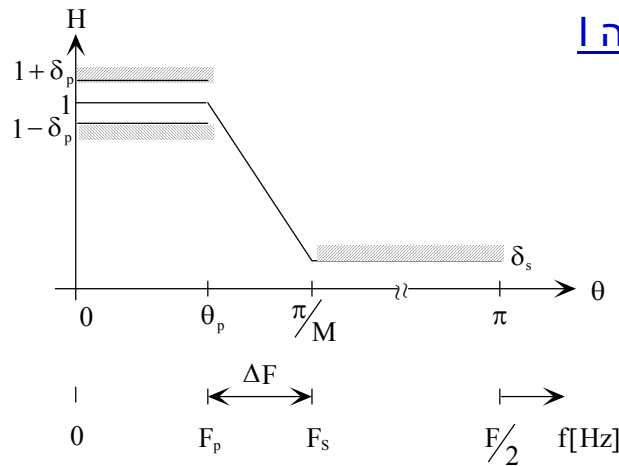
3-36

א. תכן מסנני דצימציה



תדרי דגימה:

ספציפיקציות המסנן - גישה 1



לשיערוך מס' המקדמים N (עבור ערכי $\Delta F / f_s$ קטנים) ניתן להשתמש בקירוב:

$$\hat{N} = \frac{D_\infty(\delta_p, \delta_s)}{\Delta F / f_s};$$

$$N = \lceil \hat{N} \rceil$$

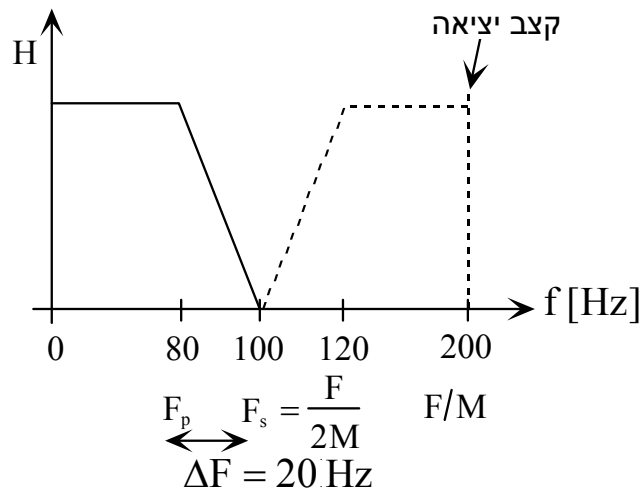
טבלת ערכי $D_\infty(\delta_p, \delta_s)$ מופיעה להלן:

δ_p	δ_s	$D_\infty(\delta_p, \delta_s)$
0.100	0.0100	1.25
0.100	0.0050	1.41
0.100	0.0010	1.80
0.100	0.0005	1.95
0.100	0.0001	2.33
0.050	0.0100	1.46
0.050	0.0050	1.63
0.050	0.0010	2.02
0.050	0.0005	2.19
0.050	0.0001	2.58
0.010	0.0100	1.9
0.010	0.0050	2.12
0.010	0.0010	2.54
0.010	0.0005	2.72
0.010	0.0001	3.14
0.005	0.0100	2.15
0.005	0.0050	2.3
0.005	0.0010	2.76
0.005	0.0005	2.94
0.005	0.0001	3.37
0.001	0.0100	2.61
0.001	0.0050	2.81
0.001	0.0010	3.25
0.001	0.0005	3.45
0.001	0.0001	3.90

דוגמה:

$$F = f_s = 10 \text{ KHz}; M = 50 \Rightarrow F/M = 200 \text{ Hz}$$

$$\delta_p = 0.01; \delta_s = 0.001$$

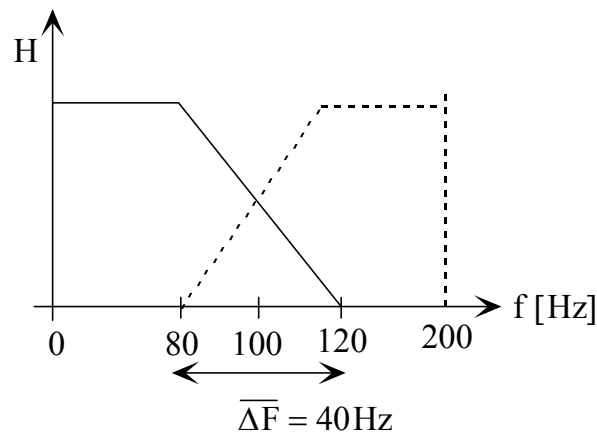


$$\hat{N} = \frac{D_\infty(0.01, 0.001)}{20/10000} = \frac{2.54}{0.002} = 1270 \Rightarrow N = 1270 \text{ TAPS (מקדמים)}$$

ובניצול הדצימציה והסימטריה: $R = \frac{1}{2} NF/M = \frac{1}{2} 1270 \cdot 10^4 / 50 = 12.7 \cdot 10^4 \text{ MPS}$ (או 12.7 מכפלות לדגם כניסה).
 קצב החישוב

ספציפיקציות המסנן – גישה II

כאן מרשים קיפול לאחר הדצימציה בתוך תחום המעבר (transition).
 בדוגמה האחרונה:



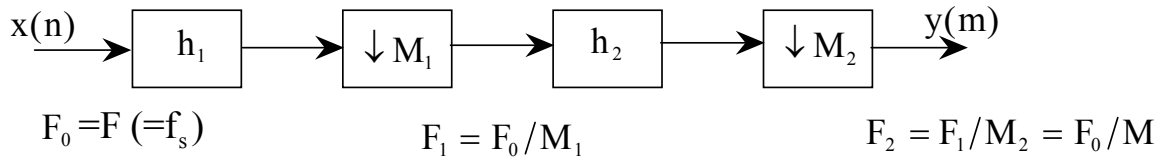
$$\hat{N} = \frac{D_\infty(0.01, 0.001)}{40/10000} = \frac{2.54}{0.004} = 635 \Rightarrow \bar{N} = 635 \text{ TAPS (מקדמים)}$$

ובניצול הדצימציה והסימטריה: $\bar{R} = \frac{1}{2} \bar{N} F/M = \frac{1}{2} 635 \cdot 10^4 / 50 = 6.35 \cdot 10^4 \text{ MPS}$ או 6.35 מכפלות לדגם כניסה.
 קצב החישוב

מימוש עם מספר דרגות בטור

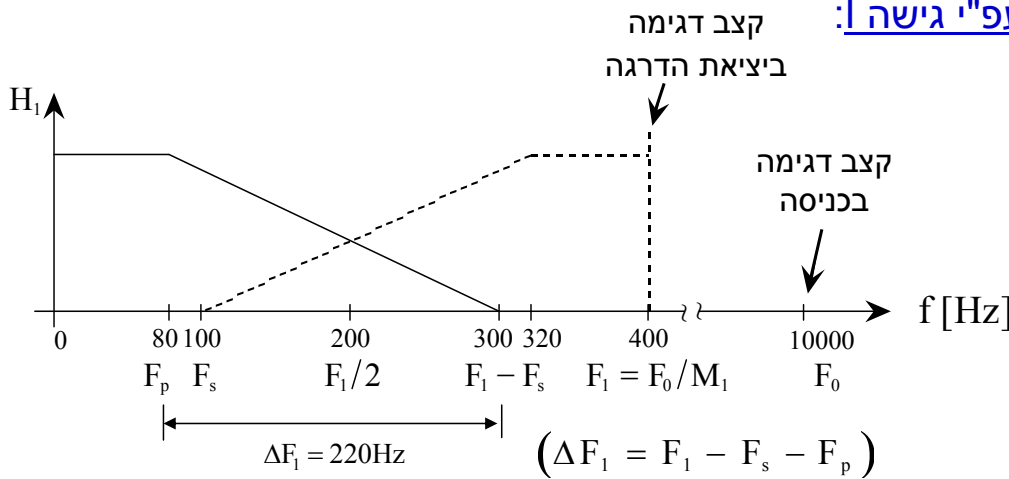
הגישה מביאה לחסכון בקצב החישוב וגודל הזכרון.

נדגים עבור 2 דרגות: $M = M_1 \cdot M_2$



(א) דרגה ראשונה: נבחר (בשלב זה - שרירותית) $M_1=25$

ספציפיקציות עפ"י גישה !:



$$\hat{N}_1 = \frac{D_\infty(\delta_p/2, \delta_s)}{\Delta F_1/F_0} = \frac{2.76}{0.022} = 125.5 \Rightarrow \underline{N_1 = 126 \text{ TAPS}}$$

שימו לב: $\delta_{p1} = \delta_p/2$

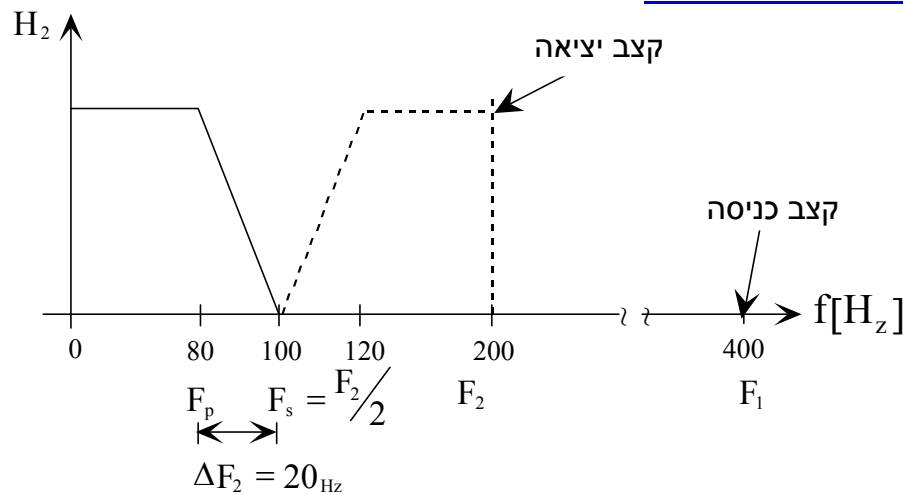
$$\underline{R}_1 = \frac{1}{2} N_1 F_0/M_1 = \frac{1}{2} N_1 F_1 = \frac{1}{2} 126 \cdot 400 = 2.52 \cdot 10^4 \text{ [MPS]}$$

ספציפיקציות עפ"י גישה !!:

כאן מרשים קיפול לתוך התחום 80 – 100 Hz :

$$\overline{\Delta F}_1 = F_1 - F_p - F_p = F_1 - 2F_p = 240 \text{ Hz} \Rightarrow \overline{N}_1 = 115 \text{ TAPS}$$

$$\overline{R}_1 = \left(\frac{\overline{N}_1 - 1}{2} + 1 \right) F_1 = \left\lceil \frac{\overline{N}_1}{2} \right\rceil F_1 = 2.32 \cdot 10^4 \text{ [MPS]}$$

(ב) דרגה שניה: $M_2 = 2$ ספציפיקציות עפ"י גישה א:

$$\hat{N}_2 = \frac{D_\infty(\delta_p/2, \delta_s)}{\Delta F_2/F_1} = \frac{2.76}{0.05} = 55.2 \Rightarrow N_2 = 56 \text{ TAPS}$$

$$\underline{R}_2 = \frac{1}{2} N_2 \cdot F_1/M_2 = \frac{1}{2} N_2 \cdot F_0/M = \frac{1}{2} N_2 \cdot F_2 = \frac{1}{2} 56 \cdot 200 = 0.56 \cdot 10^4 \text{ [MPS]}$$

3-43

ספציפיקציות עפ"י גישה א:

$$\overline{\Delta F_2} = 40 \text{ Hz} \Rightarrow \overline{N_2} = 28 \text{ TAPS} \Rightarrow \overline{R_2} = 0.28 \cdot 10^4 \text{ MPS}$$

סה"כ דרישות זיכרון וחישובים – 2 דרגותעפ"י גישה א

$$\underline{N}_T = (N_1 + N_2)/2 = 91 \quad \bullet \text{ סה"כ דרישות זיכרון (בניצול סימטריה):}$$

$$\underline{R}_T = R_1 + R_2 = 3.08 \cdot 10^4 \text{ [MPS]} \quad \bullet \text{ סה"כ קצב חישוב:}$$

או 3.08 מכפלות לדגם כניסה.

עפ"י גישה א

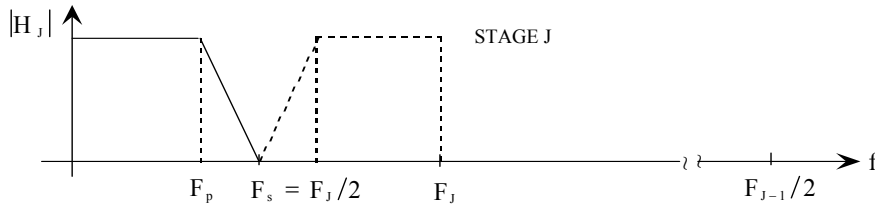
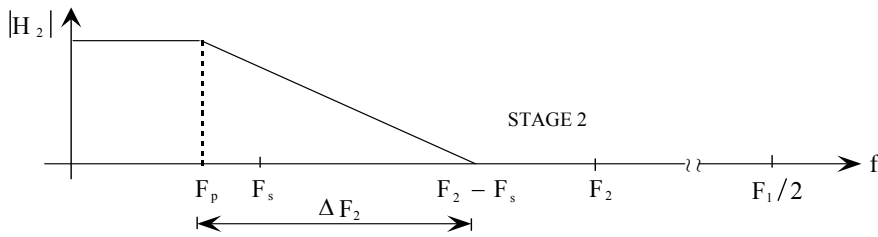
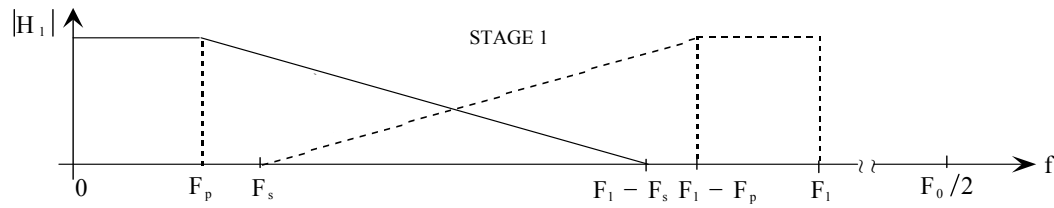
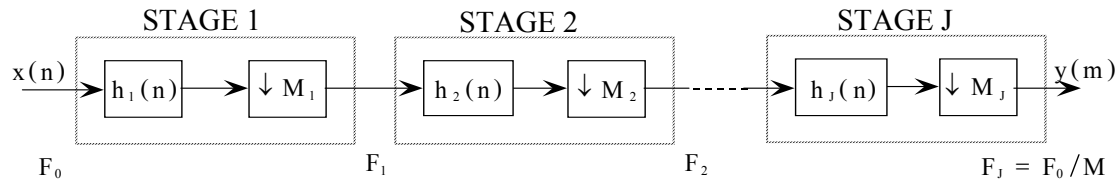
$$\overline{N}_T = (28/2 + \lceil 115/2 \rceil) = 72 \quad \bullet \text{ סה"כ דרישות זיכרון (בניצול סימטריה):}$$

$$\overline{R}_T = \overline{R}_1 + \overline{R}_2 = 2.6 \cdot 10^4 \text{ MPS} \quad \bullet \text{ סה"כ קצב חישוב:}$$

או 2.6 מכפלות לדגם כניסה.

3-44

מערכת דצימציה מרובת דרגות



משוואות התכן

$$M = \prod_{j=1}^J M_j ; F_j = \frac{F_{j-1}}{M_j}, j=1,2,\dots,J ; F_J = \frac{F_0}{M}$$

התכונות של הדרגה ה - jית

גישה 1 –

– תחום ההעברה (Passband) : $0 \leq f \leq F_p$

– תחום הניחות (Stopband) : $F_j - F_s \leq f \leq F_{j-1} / 2$

שים לב: בדרגה האחרונה $F_J = 2F_s$

– רוחב תחום המעבר (transition band) : $\Delta F = F_j - F_s - F_p$

לקן,

$$\underline{\underline{\hat{N}_j}} = \frac{D_\infty \left(\frac{\delta_p}{J}, \delta_s \right)}{\Delta F_j / F_{j-1}} = \frac{D_\infty \left(\frac{\delta_p}{J}, \delta_s \right) F_{j-1}}{F_j - F_s - F_p} \Rightarrow N_j = \left[\hat{N}_j \right]$$

$$\underline{\underline{R_j}} = \frac{1}{2} N_j F_{j-1} / M_j = \left[\frac{1}{2} N_j \right] F_j \quad [\text{MPS}]$$

• גישה – II

- תחום ההעברה (Passband) : $0 \leq f \leq F_p$
- תחום הניחות (Stopband) : $F_j - F_p \leq f \leq F_{j-1}/2$
- רוחב תחום המעבר (transition band) : $\overline{\Delta F_j} = F_j - 2F_p$
- גם כאן, בדרגה האחרונה: $F_J = 2F_s$

$$\hat{N}_j = \frac{D_\infty \left(\frac{\delta_p}{J}, \delta_s \right) F_{j-1}}{F_j - 2F_p} \Rightarrow \bar{N}_j = \left\lceil \hat{N}_j \right\rceil$$

$$\bar{R}_j = \left\lceil \frac{1}{2} \bar{N}_j \right\rceil F_j \quad [\text{MPS}]$$

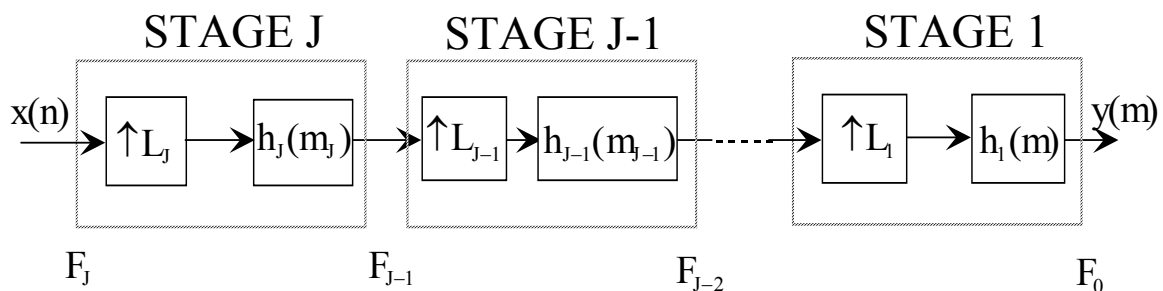
סה"כ הדרישות

$$R_T = \sum_{j=1}^J R_j \quad [\text{MPS}] \quad \text{קצב חישוב:} \quad N_T = \sum_{j=1}^J \left\lceil \frac{N_j}{2} \right\rceil \quad \text{זיכרון:}$$

3-47

II. תכן מסנני אינטרפולציה

שימוש בתכונה שמערכת אינטרפולציה היא דואלית למערכת דצימציה מונע הצורך בטיפול נפרד. ע"י ביצוע טרנספוזיציה על מערכת דצימציה נקבל מערכת אינטרפולציה, כמודגם להלן - לקבלת מערכת אינטרפולציה מרובת דרגות.



שים לב להיפוך סדר הדרגות ביחס למערכת דצימציה.

$$\prod_{j=1}^J L_j = L \quad \text{כאן כמובן קיים}$$

3-48

בחירה אופטימלית של יחסי הדצימציה (אינטרפולציה)א. בחירת ערכי M_j למינימיזציה של קצב החישוב

$$R_T \triangleq \sum_{j=1}^J R_j \quad ; \quad R_j = \frac{1}{2} N_j F_j \quad N_j = \frac{D_\infty \left(\frac{\delta_p}{J}, \delta_s \right) F_{j-1}}{F_j - F_s - F_p} \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, J$$

$$M = \prod_{j=1}^J M_j \quad ; \quad F_j = \frac{F_{j-1}}{M_j} \quad ; \quad F_j = F_0 / M \quad ; \quad F_s = F_j / 2$$

$$\underline{R_T} = \frac{1}{2} D_\infty \left(\frac{\delta_p}{J}, \delta_s \right) F_0 \cdot S \quad [\text{MPS}] \quad S = S(\Delta f, M, J; M_1, M_2, \dots, M_{J-1}) =$$

$$= \frac{2}{\Delta f \prod_{j=1}^{J-1} M_j} + \sum_{j=1}^{J-1} \frac{M_j}{\left(\prod_{l=1}^j M_l \right) \left(1 - \frac{2 - \Delta f}{2M} \prod_{l=1}^j M_l \right)}$$

כאשר,

$$\Delta f \triangleq \frac{F_s - F_p}{F_s} \quad (\text{shape factor})$$

3-49

פתרון אנליטי עבור $J=2$

$$\frac{\partial R_T}{\partial M_1} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial S}{\partial M_1} = 0$$

ומקבלים:

$$M_{1 \text{ opt}} = 2M \frac{1 - \sqrt{M \Delta f / (2 - \Delta f)}}{2 - \Delta f (M + 1)}$$

$$M = M_1 M_2 \quad \longrightarrow \quad M_{2 \text{ opt}} = M / M_{1 \text{ opt}}$$

בדוגמה שהצגנו לעיל:

$$M = 50 \quad , \quad \Delta f = \frac{100 - 80}{100} = 0.2$$

$$M_{1 \text{ opt}} = \lceil 16.55 \rceil = 17 \quad \longrightarrow \quad M_2 = \frac{50}{17}$$

הערות

- דורשים בד"כ יחסי דצימציה שלמים.
- בדוגמה בחרנו $M_2 = 2$ $M_1 = 25$ אך ניתן היה גם לבחור $M_2 = 5$ $M_1 = 10$ ויש לבדוק איזו משתי בחירות אלו עדיפה.
- בד"כ R_T אינו רגיש כל כך לבחירות שונות של ערכי M_j הקרובים לאופטימום.

3-50

ב. בחירת ערכי M_j למינימיזציה של דרישות הזיכרון

$$N_T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^J N_j \quad \text{בהנחת מסנני FIR סימטריים וניצול הסימטריה:}$$

$$N_T = \frac{1}{2} D_\infty \left(\frac{\delta_p}{J}, \delta_s \right) \sum_{j=1}^J \frac{F_{j-1}}{F_j - F_s - F_p} \quad \text{בהצגת הביטוי ל- } N_j \text{ מקבל:}$$

$$N_T = \frac{1}{2} D_\infty \left(\frac{\delta_p}{J}, \delta_s \right) T \quad \text{ושימוש בקשרים שהראינו קודם נותן:}$$

$$T = T(\Delta f, M, J; M_1, M_2, \dots, M_{J-1}) = \quad \text{כאשר:}$$

$$= \frac{2M}{\Delta f \prod_{j=1}^{J-1} M_j} + \sum_{j=1}^{J-1} \frac{M_j}{1 - \frac{2 - \Delta f}{2M} \prod_{l=1}^j M_l} \quad ; \quad \Delta f \triangleq \frac{F_s - F_p}{F_s}$$

$$M_{1 \text{ opt}} = \frac{2M}{(2 - \Delta f) + \sqrt{2M\Delta f}} \quad \text{ועבור } J=2:$$

$$M_{2 \text{ opt}} = \frac{M}{M_{1 \text{ opt}}}$$

עבור הדוגמה הנ"ל מתקבל: $M_{1 \text{ opt}} = \lceil 15.94 \rceil = 16$ ושוב יש לבחון כמקודם את

3-51 האפשרויות 25×2 , 10×5 .

ג. יחסי דצימציה אופטימליים עבור J דרגות ($J > 2$)

עבור $J > 2$ נאלצים להשתמש באופטימיזציה נומרית. עקומי תכן מופיעים בשקפים הבאים.

הערות לעקומי התכן

- (1) עקומי התכן מתאימים למעשה לשני המקרים - מינימיזציה של R_T ומינימיזציה של N_T , כיון שההבדל בין ערכי M_j המתקבלים קטנים (ובמיוחד כשמאלצים ערכי M_j שלמים).
- (2) מתוך הגרף של S כפונקציה של M . עבור J -ים שונים, רואים כי עיקר החיסכון בחישובים מתקבל מהמעבר לשתי דרגות (במקום דרגה אחת). תוספת החיסכון במעבר לשלוש או ארבע דרגות היא שולית. מעניין גם לציין שעבור ערכי M נמוכים הגדלת מספר הדרגות מעל 2 אף יכולה לגרום להפסד.
- (3) מתוך הגרף של T כפונקציה של M אנו רואים שמושג חיסכון רב יותר בזיכרון ככל שמגדילים את מספר הדרגות, כשהירידה הגדולה ביותר מושגת במעבר לשתי דרגות, אך כאן גם מעבר לשלוש או ארבע דרגות עדיין מועיל.
- (4) פקטור החיסכון בחישובים ובזיכרון גדל באופן דרמטי עם הקטנת Δf ועם הגדלת M .
- (5) יחסי הדצימציה, עבור J דרגות, מקיימים $M_1 > M_2 > \dots > M_J$.
- (6) קצב החישובים ודרישות הזיכרון הם יחסית בלתי רגישים לשינויים קלים בערכי M_j ולכן ניתן להשתמש בערכים שלמים קרובים ללא הקטנה משמעותית ביעילות.

עקומי תכן מתוך מאמר הסקירה

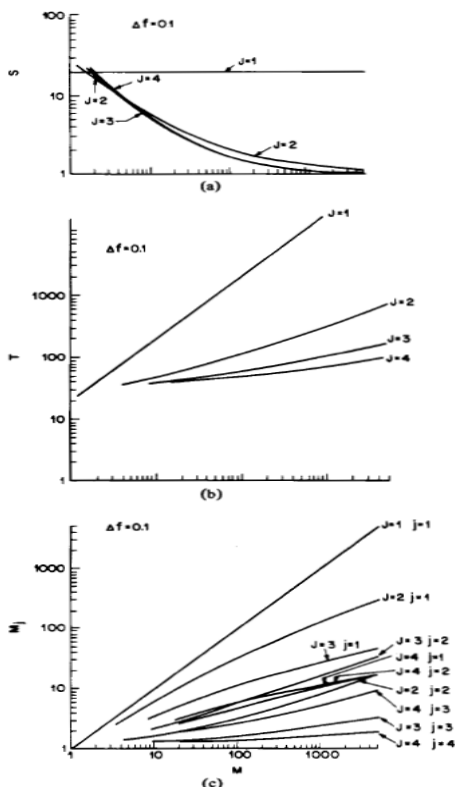


Fig. 39. Minimized values of S and T for ideal values of M_j , $j = 1, 2, \dots, J$, and $\Delta f = 0.1$.

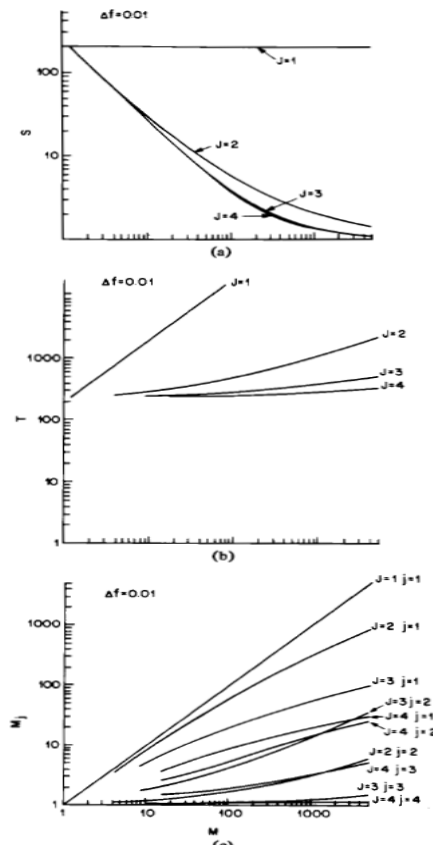


Fig. 40. Minimized values of S and T for ideal values of M_j , $j = 1, 2, \dots, J$, and $\Delta f = 0.01$.

3-53

עקומי תכן מתוך הספר:

R. E. Crochiere & L. R. Rabiner, *Multirate Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1983

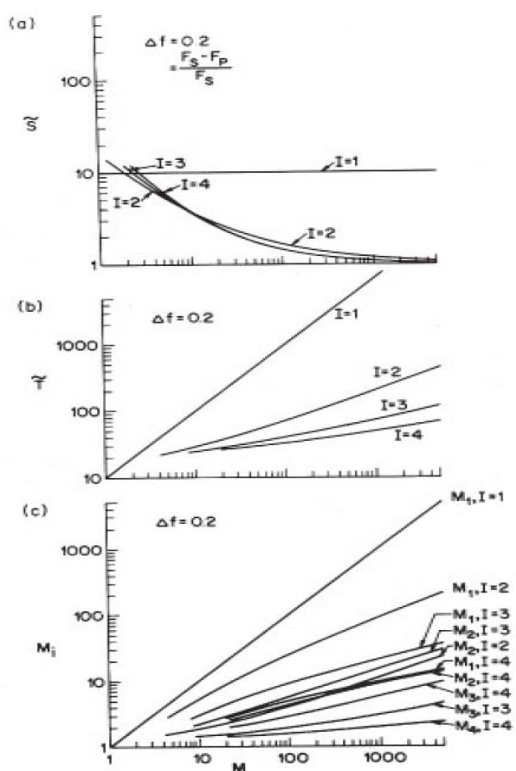


Figure 5.10 Design curves for multistage FIR decimators (or interpolators) with minimized values of S and T and ideal values of M_j , $i = 1, 2, \dots, I$, and $\Delta f = 0.2$.

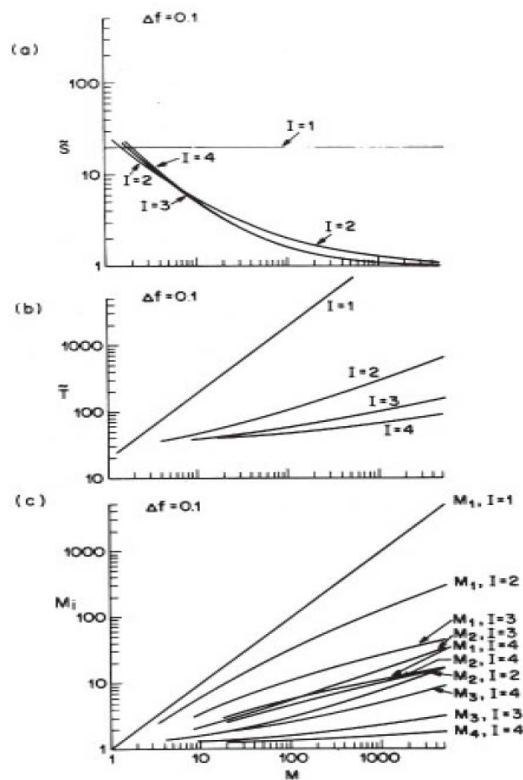


Figure 5.11 Design curves for multistage FIR decimators or interpolators for $\Delta f = 0.1$.

3-54

Sec. 5.3 Multistage FIR Designs Based on an Optimization Procedure

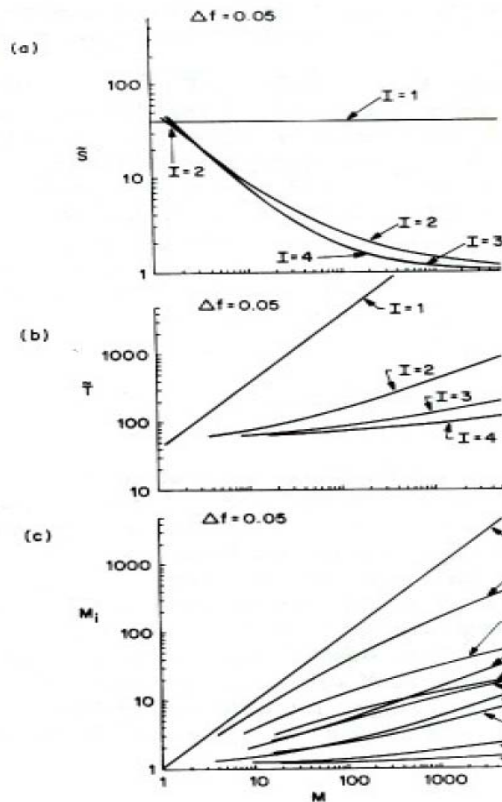


Figure 5.12 Design curves for multistage FIR decimators or interpolators for $\Delta f = 0.05$.

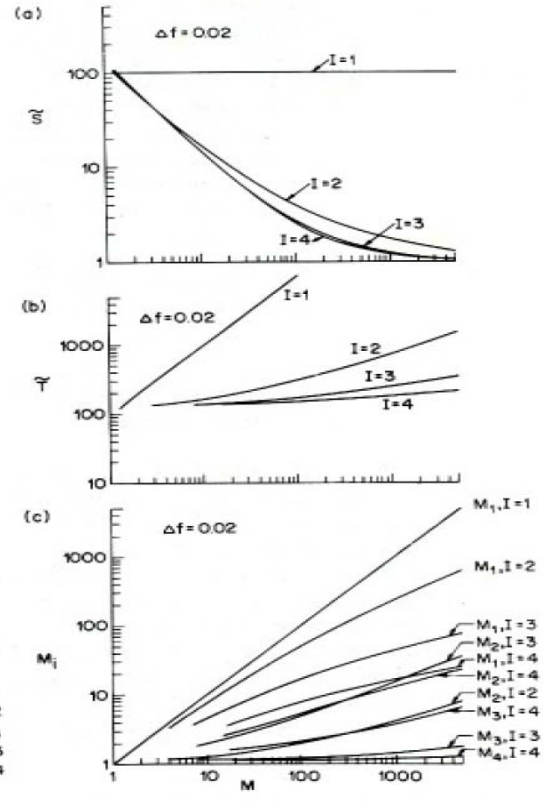
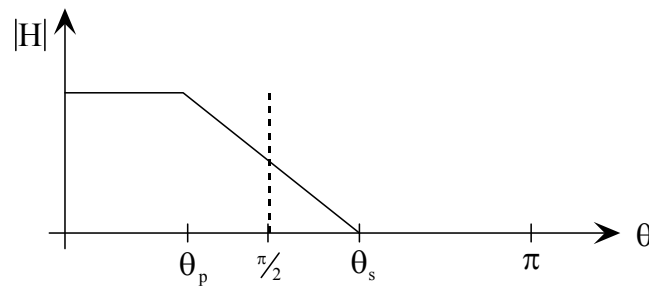


Figure 5.13 Design curves for multistage FIR decimators or interpolators for $\Delta f = 0.02$.

שימוש במסנני Half-Band

גישה אחרת לתכן מערכת דצימציה מרובת דרגות מבוססת על שימוש במסנן בעל תגובת תדר מהצורה:



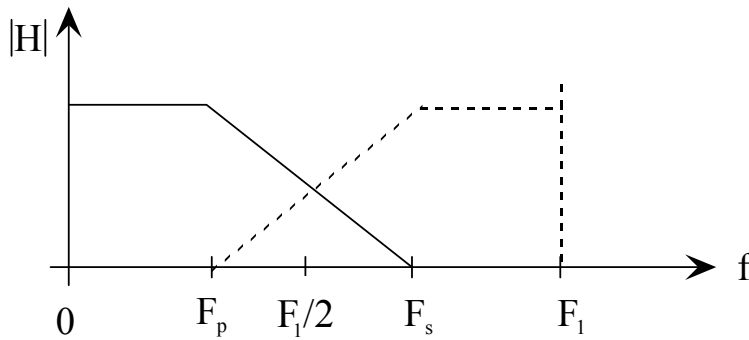
עם התכונות הבאות:

$$\theta_s = \pi - \theta_p \quad ; \quad \delta_p = \delta_s$$

$$H(e^{j\theta}) = 1 - H(e^{j(\pi-\theta)}) \quad (\text{בהנחה } \angle H = 0)$$

ניתן להראות שכל דגם שני ב- $h(n)$ מתאפס (מלבד לדגם המרכזי).

במסגן כזה ניתן להשתמש במערכת דצימציה עם $M = 2$:



$$F_1 = \frac{F_0}{M} = \frac{F_0}{2}$$

כלומר, התוצאה היא שקיים קיפול לתוך תחום המעבר, כמו בספציפיקציות עפ"י גישה זו.

שימוש ב J מסננים כאלה בקסקדה, כ.א. עם $M_j = 2$, נותן

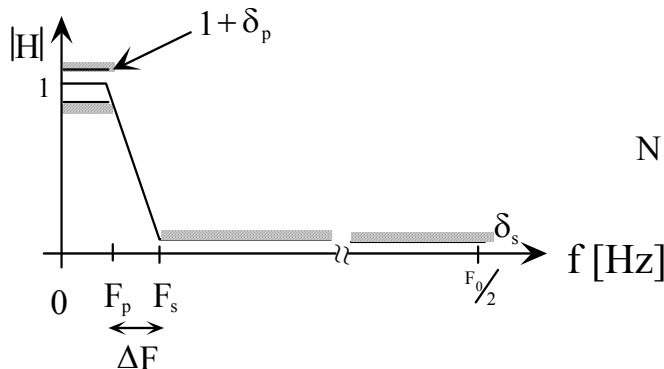
$$M = \prod_{j=1}^J M_j = 2^J$$

ובגלל התאפסות כל אבר שני ב- $h(n)$ (מלבד האיבר המרכזי), אפשרי כאן

$$R_j \cong \frac{1}{4} N_j F_j \quad \text{חסכון נוסף בחישובים:}$$

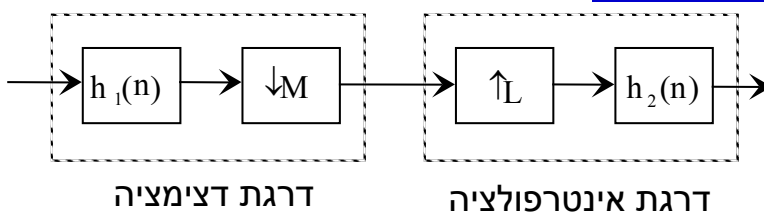
הערה: לעיתים אין משתמשים בדרגה האחרונה במסגן Half-Band, הגורם לקיפול לתוך תחום המעבר, אלא במסגן ללא קיפול כזה (גישה זו), כדי להנחית את הקיפול הבלתי רצוי.

תכן מסננים צרי סרט



$$N \cong \frac{D_\infty(\delta_p, \delta_s)}{\Delta F / F_0} \quad ; \quad R = \frac{1}{2} N F_0$$

שימוש בדרגות דצימציה ואינטרפולציה



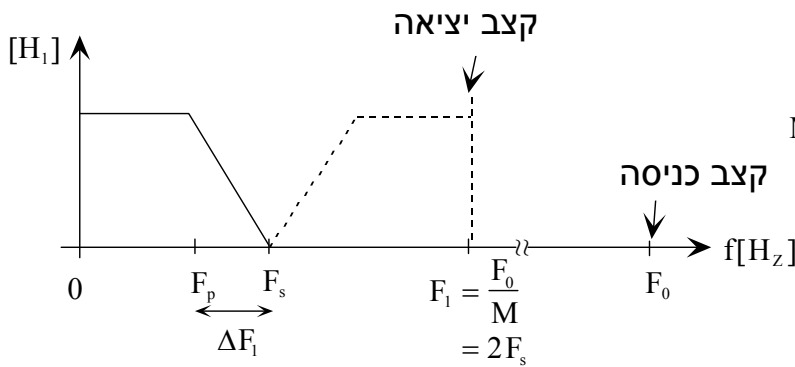
$$M_{\max} = \frac{F_0}{2F_s}$$

$$F_0 \quad F_1 = \frac{F_0}{M} \quad F_2 = F_0 \frac{L}{M} \quad (L \leq M)$$

הערה: אם משתמשים ב- M הקטן מ- M_{\max} הרי שניתן אז לממש את h_1 עם פחות מקדמים, מכיון שאפשר להרחיב את תחום המעבר שלו. המסגן h_2 ישמש אז להבטחת הספציפיקציות הנדרשות.

דוגמה עבור $M=M_{max}$

א. דרגת הדצימציה

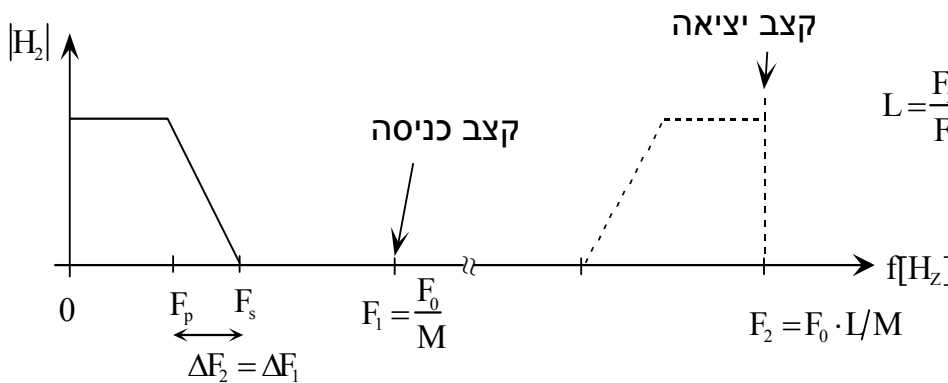


$$M = F_0 / (2F_s)$$

$$\hat{N}_1 = \frac{D_\infty(\delta_p/2, \delta_s)}{\Delta F_1 / F_0}$$

$$N_1 = \lceil \hat{N}_1 \rceil$$

ב. דרגת האינטרפולציה



$$L = \frac{F_2}{F_1}$$

$$\hat{N}_2 = \frac{D_\infty(\delta_p/2, \delta_s)}{\Delta F_2 / F_2} = \frac{D_\infty(\delta_p/2, \delta_s) L}{\Delta F_1 / F_0 M}$$

$$= \hat{N}_1 \frac{L}{M}$$

$$N_2 = \lceil \hat{N}_2 \rceil$$

1. סה"כ קצב החישובים

$$R_T = \frac{1}{2} [N_1 F_1 + N_2 (F_2 / L)] = \frac{1}{2} F_1 [N_1 + N_2]$$

$$F_1 = F_0 / M ; \quad N_2 \cong N_1 \frac{L}{M} \quad \rightarrow \quad R_T \cong \frac{1}{2} N_1 \frac{F_0}{M} [1 + \frac{L}{M}]$$

$$N_2 = N_1 \quad \rightarrow \quad R_T = N_1 \frac{F_0}{M} \quad \text{ועבור } L = M$$

לעומת, בקירוב¹, $\frac{1}{2} N_1 F_0$, עם דרגה אחת (ללא דצימציה ואינטרפולציה).

¹ ערכו של N_1 כאן גדול מעט ממספר המקדמים במימוש עם דרגת אחת מכיוון שכאן משתמשים ב- $D_\infty(\delta_p/2, \delta_s)$, שהוא מעט גדול יותר מאשר $D_\infty(\delta_p, \delta_s)$.

2. סה"כ דרישות זיכרון

$$N_T = \frac{1}{2} [N_1 + N_2] \cong \frac{1}{2} N_1 [1 + \frac{L}{M}]$$

ועבור $L=M$: $N_T = N_1$ במקום, בקירוב, $N_1/2$ בדרגה אחת.

הערה: הקטנת דרישות הזיכרון (וכן הקטנה נוספת בחישובים) אפשרית ע"י מימוש כל אחת מהדרגות הנ"ל כקסקדה של מספר דרגות.

TABULATION of $D_\infty(\frac{\delta_p}{K}, \delta_s)$

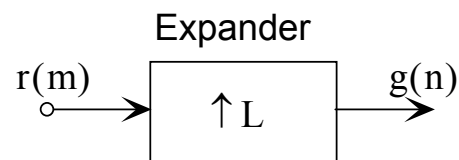
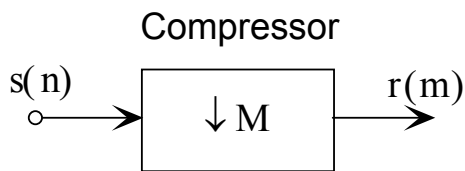
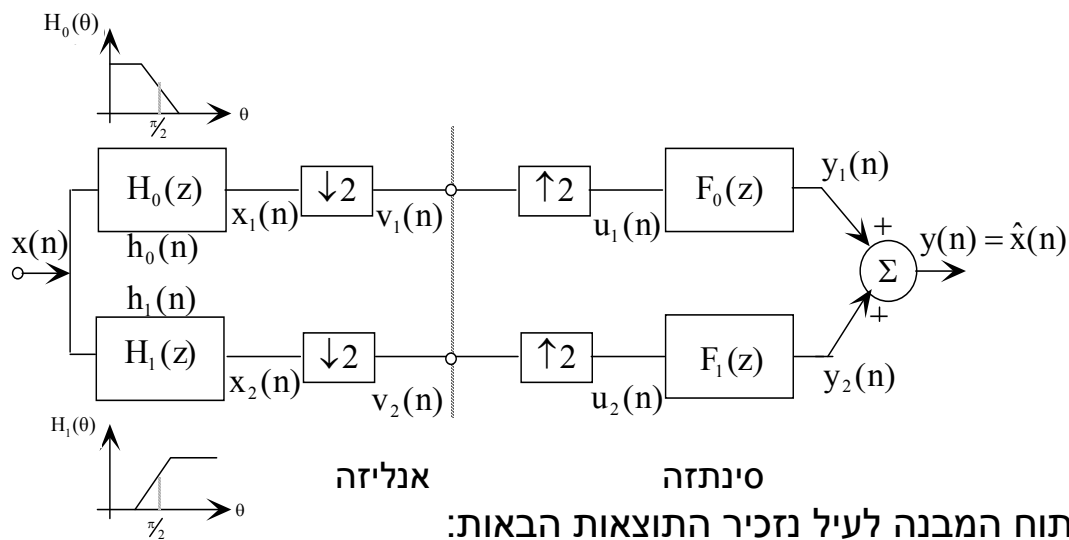
δ_p	δ_s	K=1	K=2	K=3	K=4	K=5	K=6
0.100	0.0100	1.25	1.46	1.58	1.67	1.74	1.79
0.100	0.0050	1.41	1.63	1.75	1.84	1.91	1.97
0.100	0.0010	1.80	2.02	2.15	2.25	2.32	2.38
0.100	0.0005	1.95	2.19	2.32	2.42	2.49	2.55
0.100	0.0001	2.33	2.58	2.72	2.82	2.90	2.96
0.050	0.0100	1.46	1.67	1.79	1.88	1.94	1.99
0.050	0.0050	1.63	1.84	1.97	2.06	2.12	2.18
0.050	0.0010	2.02	2.25	2.38	2.47	2.54	2.60
0.050	0.0005	2.19	2.42	2.55	2.65	2.72	2.78
0.050	0.0001	2.58	2.82	2.96	3.06	3.14	3.20
0.010	0.0100	1.94	2.15	2.27	2.35	2.42	2.47
0.010	0.0050	2.12	2.33	2.45	2.54	2.60	2.66
0.010	0.0010	2.54	2.76	2.89	2.98	3.04	3.10
0.010	0.0005	2.72	2.94	3.07	3.16	3.23	3.29
0.010	0.0001	3.14	3.37	3.50	3.60	3.67	3.73
0.005	0.0100	2.15	2.35	2.47	2.55	2.61	2.66
0.005	0.0050	2.33	2.54	2.66	2.74	2.81	2.86
0.005	0.0010	2.76	2.98	3.10	3.19	3.26	3.31
0.005	0.0005	2.94	3.16	3.29	3.38	3.45	3.50
0.005	0.0001	3.37	3.60	3.73	3.83	3.90	3.95
0.001	0.0100	2.61	2.81	2.92	3.00	3.07	3.11
0.001	0.0050	2.81	3.01	3.12	3.20	3.27	3.31
0.001	0.0010	3.25	3.46	3.58	3.67	3.73	3.78
0.001	0.0005	3.45	3.66	3.78	3.87	3.93	3.98
0.001	0.0001	3.90	4.12	4.24	4.33	4.40	4.45

4. מערכי מסננים - Filter Banks

- מערך מסננים דו-ערוצי.
- תנאים לביטול קיפולים ושחזור מושלם.
- מערך מסננים דו-ערוצי עם ביטול קיפולים (QMF).
- מערכי מסננים במבנה עץ.
- מערך מסננים דו-ערוצי עם שחזור מושלם (CQF).
- מערך מסננים בי-אורתוגונלי.
- מערך אחד של מסנני DFT.
- מערך מסננים כללי בעלי M פסים (M-band).

Porat Mitra Proakis
 1 – Ch. 12 2 – Ch. 10/14 3 – Ch. 10/11 [מקורות ספרות:](#)

מערך מסננים דו-ערוצי



$$R(z) = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} S \left(e^{-j \frac{2\pi l}{M}} z^{1/M} \right)$$

$$G(z) = R(z^L)$$

$$V_1(z) = \frac{1}{2} [X(z^{1/2})H_0(z^{1/2}) + X(-z^{1/2})H_0(-z^{1/2})] \quad \text{ועל כן במערך הנתון (M=2):}$$

$$V_2(z) = \frac{1}{2} [X(z^{1/2})H_1(z^{1/2}) + X(-z^{1/2})H_1(-z^{1/2})]$$

$$Y_1(z) = \frac{1}{2} F_0(z) [X(z)H_0(z) + X(-z)H_0(-z)]$$

$$Y_2(z) = \frac{1}{2} F_1(z) [X(z)H_1(z) + X(-z)H_1(-z)]$$

$$Y(z) = Y_1(z) + Y_2(z)$$

$$= \frac{1}{2} X(z) [F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z)] + \frac{1}{2} X(-z) [F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z)]$$

איבר קיפול (Aliasing Term)

$$F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) = 0$$

על מנת לאפס את שגיאת הקיפול נדרש:

$$\frac{1}{2} [F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z)] = 1$$

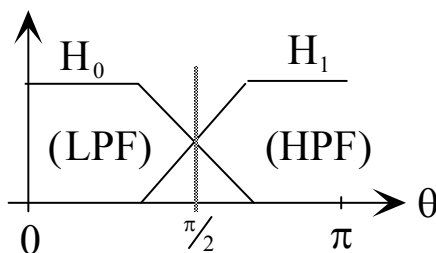
ולקבלת מערכת יחידה, נדרש בנוסף:

4 - 3

מערך מסננים דו-ערוצי עם ביטול קיפולים

המבוסס על QMF – Quadrature Mirror Filters

$$H_1(z) = H_0(-z) \Rightarrow h_1(n) = (-1)^n h_0(n) \quad \text{עבור מערך QMF קיים:}$$



$$[H_1(\theta) = H_0(\theta + \pi)]$$

$$F_0(z) = 2H_0(z) \quad \text{נבחר כעת:}$$

$$F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) = 0$$

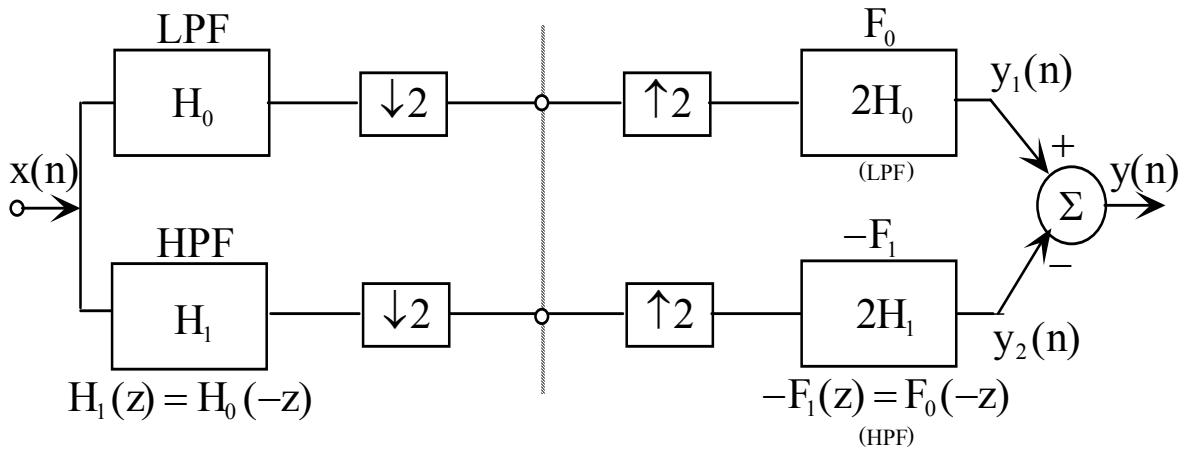
ומהתנאי לביטול קיפולים:

$$\underline{F_1(z) = -2H_0(-z) = -2H_1(z) = -F_0(-z)}$$

נקבל:

4 - 4

המערך המתקבל:



הצגה בתנאי הנוסף לקבלת מע' יחידה: $\frac{1}{2} [F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z)] = 1$

$$H_0^2(z) - H_1^2(z) = 1$$

נותנת:

או

$$H_0^2(\theta) - H_0^2(\theta + \pi) = 1$$

4 - 5

מקובל להשתמש במסנני FIR בעלי פזה לינארית:

$$h_0(n) = h(n) = h(N - 1 - n) \quad , \quad n = 0, 1, \dots, N - 1$$

$$h_1(n) = h(n)(-1)^n$$

$$H(\theta) = H(e^{j\theta}) = A(\theta)e^{-j\frac{(N-1)\theta}{2}}$$

כידוע, ניתן אז לרשום:

כאשר $A(\theta)$ פ' ממשית, N - מס' המקדמים.

מוצא המערך הוא אז:

$$Y(e^{j\theta}) = \left\{ |H(\theta)|^2 - (-1)^{N-1} |H(\theta + \pi)|^2 \right\} e^{-j(N-1)\theta} X(e^{j\theta})$$

השהייה של (N-1) דגמים
(אנליזה+סינתזה)

(Prototype Filter)

$$H(\theta) = H_0(\theta)$$

כאשר:

4 - 6

והתנאי למערכת יחידה (עד כדי השהיה קבועה) הוא (עבור מסנני FIR סימטריים):

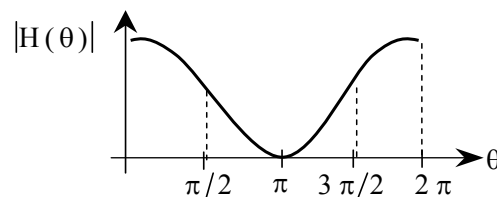
$$\underline{|H(\theta)|^2 - (-1)^{N-1}|H(\theta + \pi)|^2 = 1}$$

נבחן שני מקרים:

(1) מס' מקדמים (N) אי-זוגי

$$|H(\theta)|^2 - |H(\theta + \pi)|^2 = 1$$

במקרה זה ישנה בעיה, מכיוון שעבור $\theta = \pi/2$ קיים: $|H(\pi/2)| = |H(3\pi/2)|$ ולכן אגף שמאל מתאפס.



כלומר, לא רצוי להשתמש במס' מקדמים אי-זוגי במערכת הנדונה.

4 - 7

(2) מס' מקדמים (N) זוגי

$$|H(\theta)|^2 + |H(\theta + \pi)|^2 = 1$$

מסתבר, שמלבד למקרה הפרטי $N=2$, שאז המסנן הוא:

$$h(n) = \frac{1}{2}\delta(n) + \frac{1}{2}\delta(n-1)$$

ותכונות ההפרדה שלו בתדר אינן מספיקות בד"כ, לא קיים מסנן FIR סימטרי שיקיים התנאי במדויק.

ע"י שימוש בתכנית אופטימיזציה התקבלו בספרות מסננים מסדרים שונים הנותנים קירוב מצוין לתנאי הנ"ל. דוגמה ניתנת בציור בעמוד הבא.

מקורות ספרות לתכן מסננים אלה:

- J. D. Jhonston, "A Filter Family Designed for Use in Quadrature Mirror Filter Banks", Proc. IEEE Intl. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP) 1980, pp. 291-294.
- V. K. Jain and R. E. Crochiere, "A Novel Approach to the Design of Analysis/Synthesis Filter Banks", Proc. IEEE Intl. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP) 1983, pp. 228-231.

4 - 8

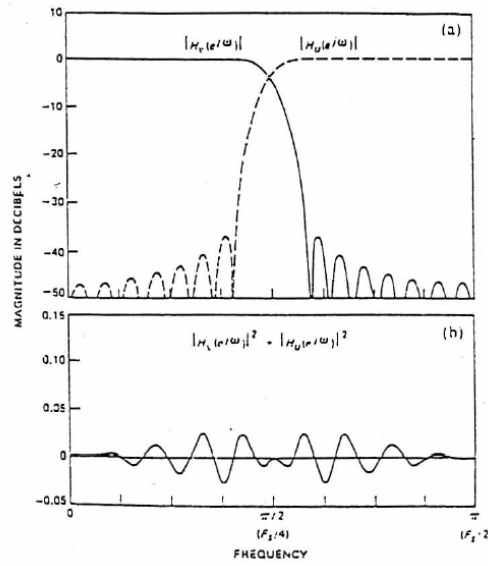


Fig. 2—Frequency response for a 32-tap quadrature mirror filter design. (a) Magnitude responses of the individual filters. (b) Magnitude response of the composite system.

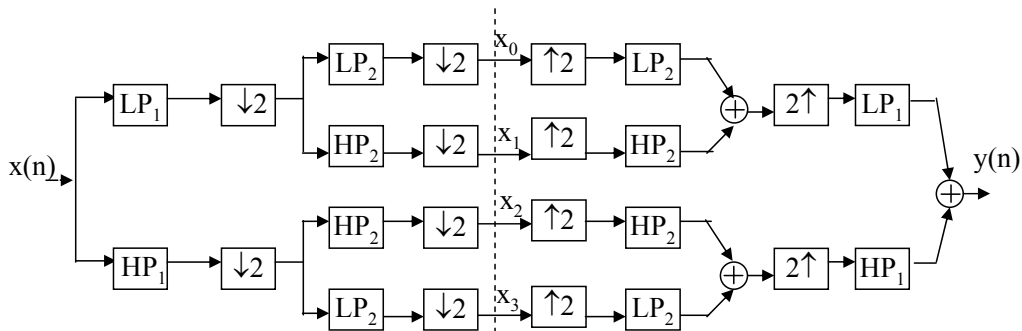
1638 THE BELL SYSTEM TECHNICAL JOURNAL, SEPTEMBER 1981

R. E. Crochiere

Table I—Coefficients for 32-tap FIR quadrature mirror filter

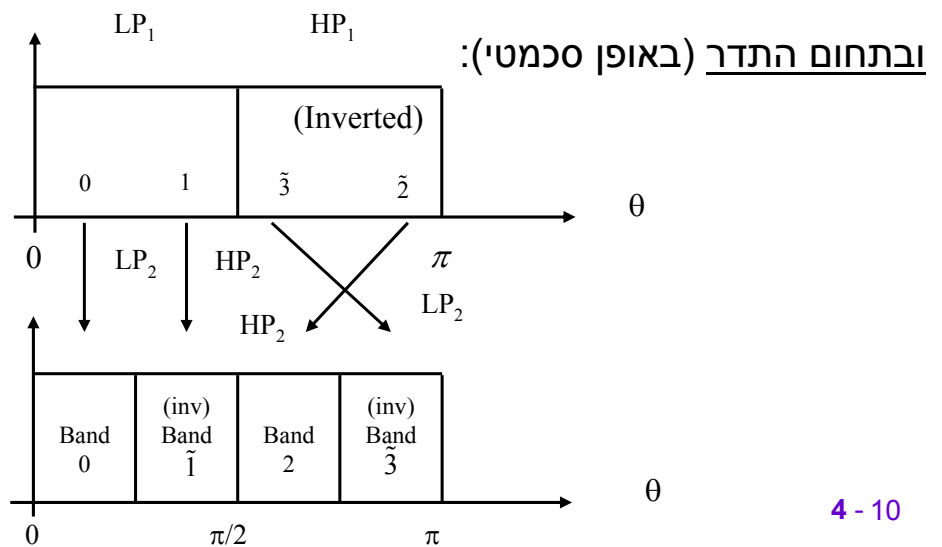
$h_i(0) = 0.002245139 = h_i(31)$	$h_i(8) = -0.007961731 = h_i(23)$
$h_i(1) = -0.003971152 = h_i(30)$	$h_i(9) = -0.034964400 = h_i(22)$
$h_i(2) = -0.001969672 = h_i(29)$	$h_i(10) = 0.019472180 = h_i(21)$
$h_i(3) = 0.008181941 = h_i(28)$	$h_i(11) = 0.054812130 = h_i(20)$
$h_i(4) = 0.000842663 = h_i(27)$	$h_i(12) = -0.044524230 = h_i(19)$
$h_i(5) = -0.014228990 = h_i(26)$	$h_i(13) = -0.099338590 = h_i(18)$
$h_i(6) = 0.002069470 = h_i(25)$	$h_i(14) = 0.132972500 = h_i(17)$
$h_i(7) = 0.022704150 = h_i(24)$	$h_i(15) = 0.463674100 = h_i(16)$

מערכי מסננים במבנה עץ



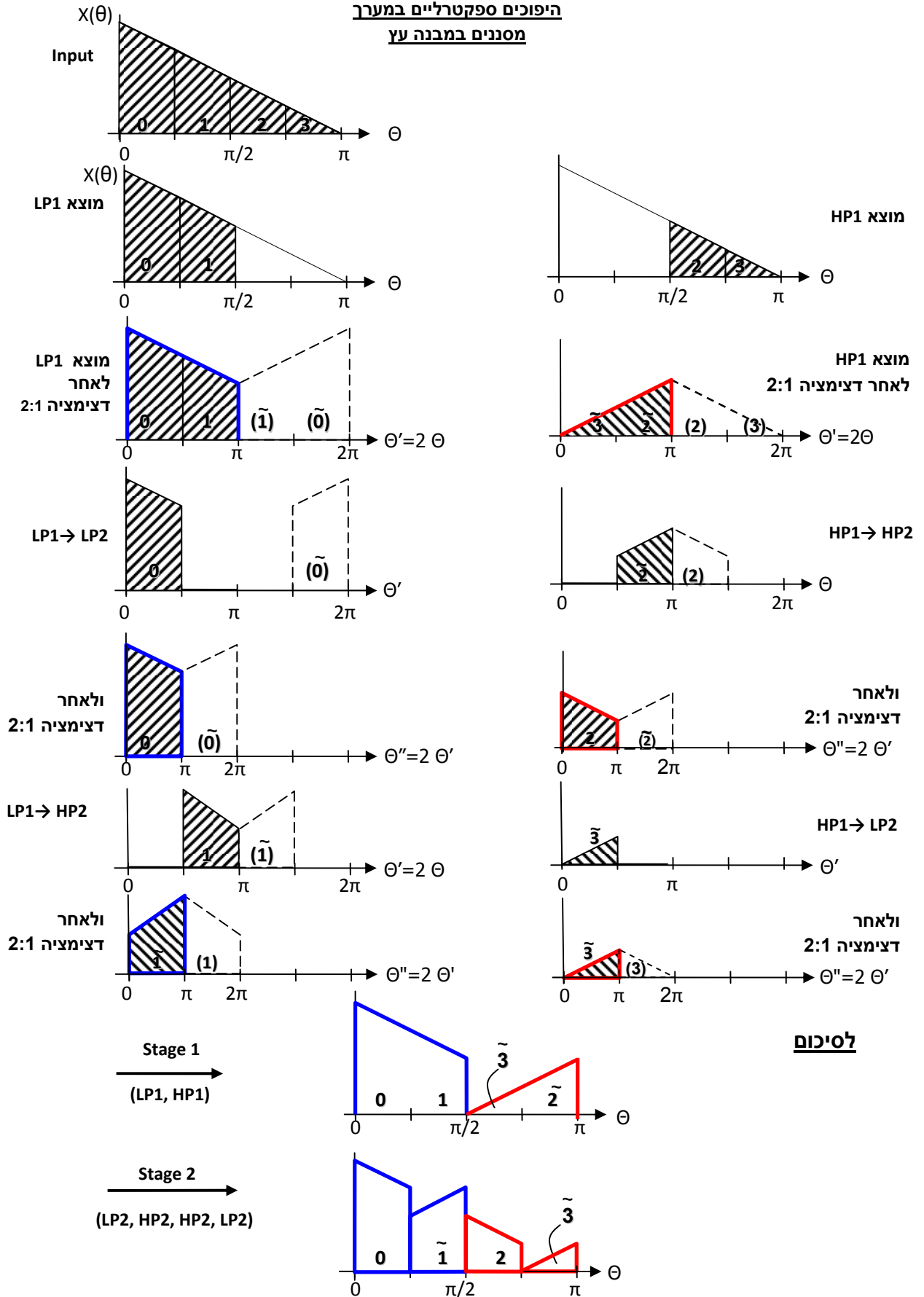
אנליזה

סינתזה



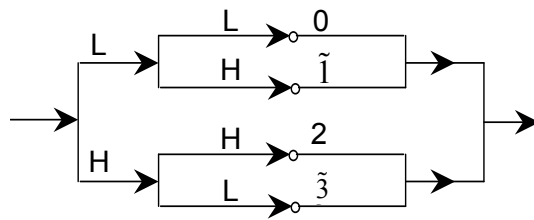
איור עזר לשקף 4-10

היפוכים ספקטראליים במערך מסננים במבנה עץ



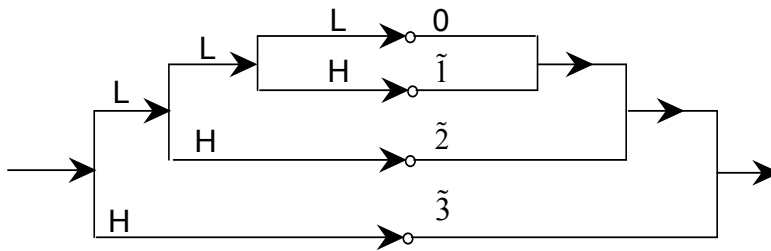
הערה: כל הפסים הם ב- base-band אך מוצגים כאן על הפס המקורי $\theta: [0, \pi]$ כדי להדגים היפוכי פסים מסוימים.

לנוחיות התאור מוצג "עץ מלא" כנ"ל בצורה:

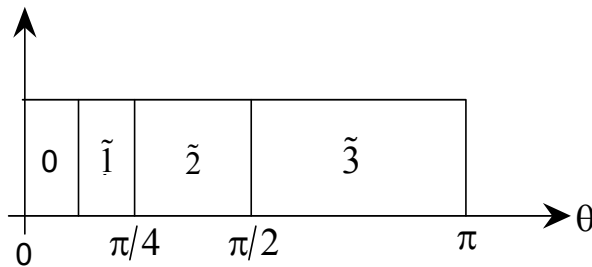


"עץ מלא" - 4 פסי תדר:

"עץ לא-מלא" מאפשר קבלת חלוקה בלתי אחידה וכן מספר זוגי או אי-זוגי של פסי תדר:

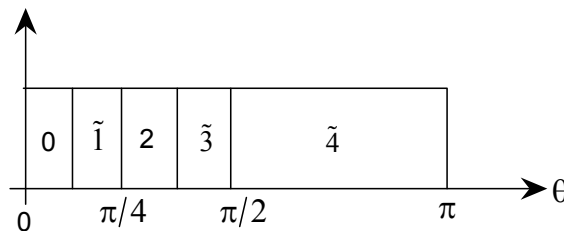
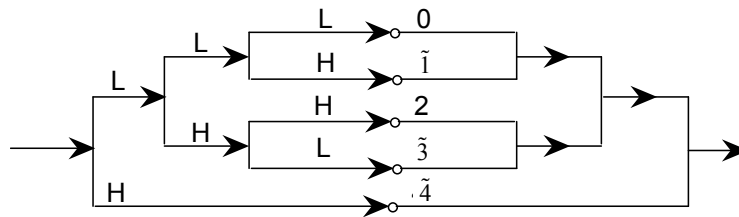


M=4 (1)



4 - 11

M=5 (2)



4 - 12

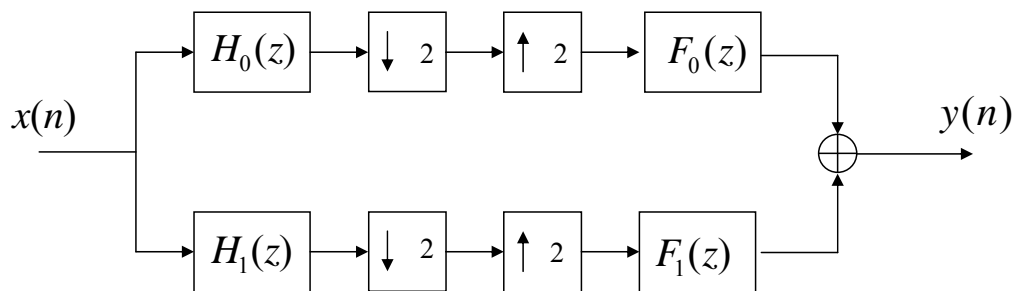
מערך מסננים דו-ערוצי עם שחזור מושלם

המבוסס על CQF – Conjugate Quadrature Filters

תכן מסננים אלה - המבטיחים מערך מסננים עם שחזור מושלם (מע' יחידה – עד כדי השהיה), אך מוותרים על תכונת הפאזה הליניארית של מסנני QMF, מוצג במאמר:

M.J.T. Smith & T.P. Barnwell, III, "Exact Reconstruction Techniques for Tree-Structured Subband Coders", IEEE Trans. Acoust., Speech Signal Proc., Vol. ASSP-34, No. 3, June 1986, pp. 434-441.

נציג את מערך המסננים עם הסימונים הקודמים (במאמר, מסנני הסינתזה הם $G_0(z), G_1(z)$ במקום $F_0(z), F_1(z)$ כאן):



4 - 13

$$F_0(z) = H_1(-z)$$

לביטול הקיפולים נבחר

$$F_1(z) = -H_0(-z)$$

$$F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) = 0$$

כך שאכן מתקיים:

$$H_1(z) = -H_0(-z^{-1})z^{-N}$$

עתה נבחר:

כאשר N הוא סדר המסננים (FIR), כך שמובטח ש- $H_1(z)$ הוא סיבתי, כאשר $H_0(z)$ סיבתי.

$$F_0(z) = H_1(-z) = -H_0(z^{-1})(-1)^N z^{-N}$$

מתקבל לכן:

ובחירה של N אי-זוגי נותנת: $F_0(z) = H_0(z^{-1})z^{-N}$ (מסנן FIR סיבתי)

(מסנן HP אם $H_0(z)$ הוא LP) $F_1(z) = -H_0(-z)$

4 - 14

הצגה של הקשרים לעיל בביטוי של פ' התמסורת $C(z)$
(לאחר ביטול ה- aliasing המובטח ע"י בחירת F_0, F_1 הנ"ל) נותנת:

$$C(z) = \frac{1}{2} \left[\underbrace{H_0(z)H_0(z^{-1})}_{G_0(z)} + \underbrace{H_0(-z)H_0(-z^{-1})}_{G_1(z)} \right] z^{-N} \quad (\text{מע' סיבתית})$$

$$= \frac{1}{2} [G_0(z) + G_1(z)] z^{-N}$$

המסננים G_0, G_1 קרויים [מסנני מכפלה](#) (Product Filters) וקיים:

$$G_1(z) = G_0(-z)$$

ולפיכך:

$$C(z) = \frac{1}{2} [G_0(z) + G_0(-z)] z^{-N}$$

4 - 15

לקבלת מע' יחידה (עד כדי השהיה N), נדרש לכן:

$$G_0(z) + G_0(-z) = 2$$

ובתחום הזמן:

$$g_0(n) + (-1)^n g_0(n) = 2 \delta(n)$$

$$g_0(n) \left[\frac{1 + (-1)^n}{2} \right] = \delta(n)$$

כלומר, מסנן המכפלה (מסנן FIR בעל פאזה אפס) מקיים:

$$g_0(0) = 1 \quad (*)$$

$$g_0(2n) = 0, \quad n \neq 0$$

וזו כזכור תכונה המתקיימת ע"י [מסנן Half-band](#).

4 - 16

תכן המסננים

הגישה היא למצוא תחילה את $G_0(z)$ ולפרק אותו למכפלה:

$$G_0(z) = H_0(z)H_0(z^{-1})$$

הדבר נעשה ע"י חלוקת אפסי פ' התמסורת של $G_0(z)$ בין $H_0(z)$ ו- $H_0(z^{-1})$ (ולכן H_0 אינו בעל פאזה ליניארית).

$$g(n) = w(n) \frac{\sin(\pi n/2)}{\pi n} \quad \text{נשים לב שכל מסנן מהצורה:}$$

כאשר $w(n)$ פ' חלון, מקיים את התנאים במשוואה (*) לעיל.

אולם, מכיוון ש- $G_0(\theta) = |H_0(\theta)|^2$ הוא אי-שלילי, משתמשים ב:

$$g_0(n) = a(g(n) + b\delta(n))$$

כאשר הקבועים a, b נקבעים כך שיתקיימו שני התנאים: $g_0(0) = 1$; $G_0(\theta) \geq 0$

4-17

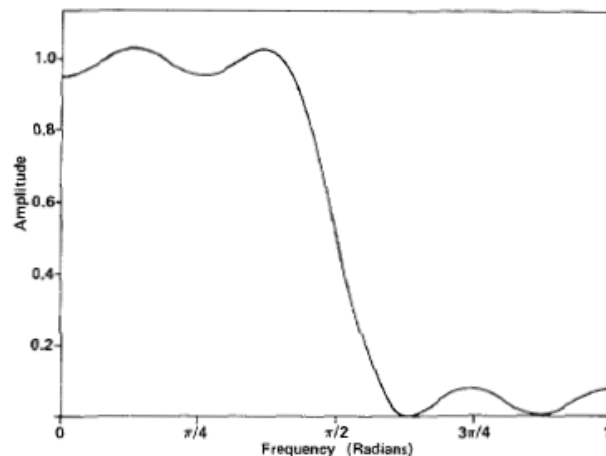
הדגמה

Fig. 5. Frequency plot of the resulting product filter with double zeros on the unit circle.

תגובת התדר
של המסנן $G_0(\theta)$

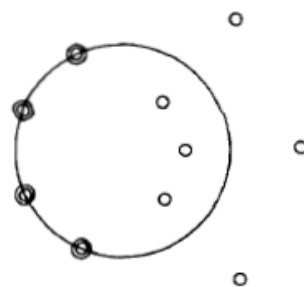


Fig. 6. Pole/zero plot of the resulting product filter in the z plane.

בדוגמה זו $H_0(z)$ סדר הוא $N=7$ ולכן סדר $G_0(z)$ הוא 14.

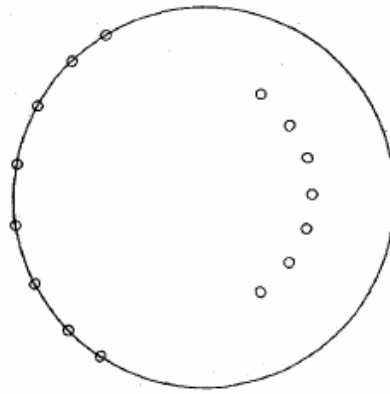


Fig. 9. Minimum phase pole/zero plot of the 16-tap CQF.

אפסי המסנן $H_0(\theta)$,
עבור סדר $N=15$,
שנבחר להיות מסנן
מינימום פאזה.

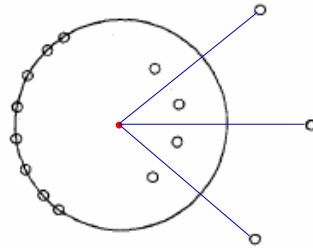


Fig. 10. Approximate linear phase pole/zero plot of the 16-tap CQF.

אפסי המסנן $H_0(\theta)$,
עבור סדר $N=15$,
שנבחר להיות מסנן
שהוא בקירוב בעל
פאזה לינארית

האיורים מתוך המאמר של Smith & Barnwell 1986

4 - 19

לסיכום (CQF)

בהינתן $H_0(z)$, כלומר $h_0(n)$, אזי המסננים האחרים ניתנים בתחום הזמן ע"י:

$$h_1(n) = (-1)^n h_0(N-n) \quad N - \text{סדר המסנן}$$

$$f_0(n) = h_1(n)(-1)^n = h_0(N-n)$$

$$f_1(n) = -(-1)^n h_0(n),$$

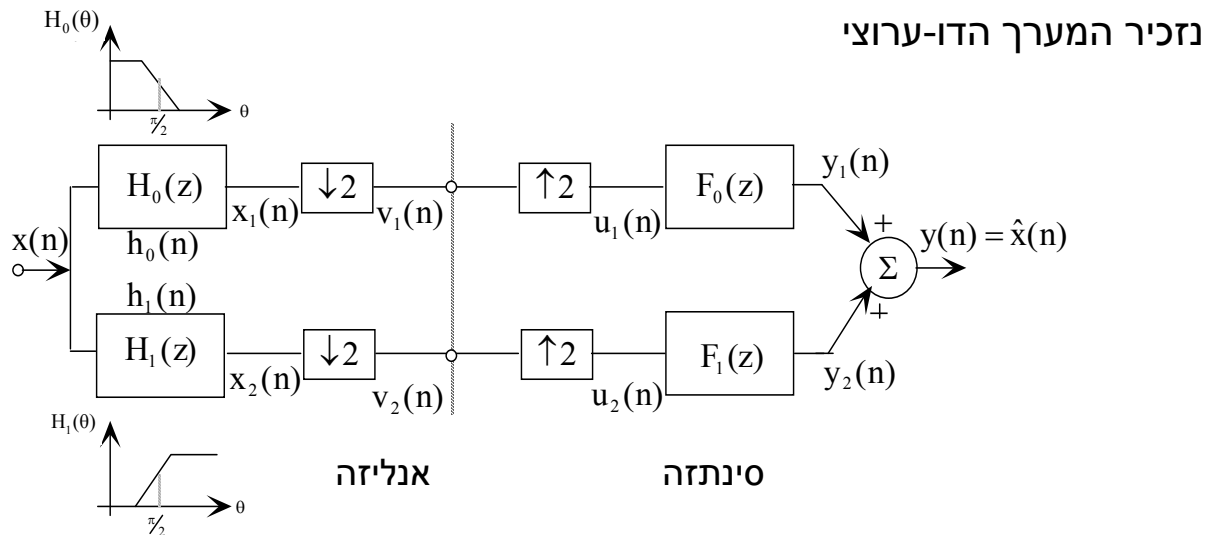
$$n = 0, 1, \dots, N$$

כאשר הסדר N אי-זוגי (מספר המקדמים של מסנני ה-CQF זוגי).

שים לב: סדר מסנן המכפלה הוא $2N$ ולכן מספר המקדמים שלו אי-זוגי.

4 - 20

ניתוח כללי של מערך דו-ערוצי עם שחזור מושלם



נגדיר המטריצות:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} F_0(z) & F_1(z) \\ F_0(-z) & F_1(-z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} H_0(z) & H_1(z) \\ H_0(-z) & H_1(-z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y(z) \\ Y(-z) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} X(z) \\ X(-z) \end{pmatrix}.$$

4-21

מוצא המערכת הוא כזכור (שקוף 4-3):

$$Y(z) = \frac{1}{2} X(z) [F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z)] + \frac{1}{2} X(-z) [F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z)]$$

נתבונן במכפלת המטריצות הבאה:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^T &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} F_0(z) & F_1(z) \\ F_0(-z) & F_1(-z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} F_0(z)H_0(z) + F_1(z)H_1(z) & F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) \\ F_0(-z)H_0(z) + F_1(-z)H_1(z) & F_0(-z)H_0(-z) + F_1(-z)H_1(-z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ולכן:

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{X}$$

לקבלת שחזור מושלם, עד כדי השהיה קבועה של ℓ דגימות, נדרוש כי:

$$\frac{1}{2} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{H}^T = \begin{pmatrix} z^{-\ell} & 0 \\ 0 & (-z)^{-\ell} \end{pmatrix}$$

4-22

ומכאן:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= 2 \cdot \begin{pmatrix} z^{-\ell} & 0 \\ 0 & (-z)^{-\ell} \end{pmatrix} \cdot (\mathbf{H}^T)^{-1} \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix} z^{-\ell} & 0 \\ 0 & (-z)^{-\ell} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} H_0(z) & H_0(-z) \\ H_1(z) & H_1(-z) \end{pmatrix}^{-1} \\ &= 2 \cdot \begin{pmatrix} z^{-\ell} & 0 \\ 0 & (-z)^{-\ell} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{H_1(-z)H_0(z) - H_1(z)H_0(-z)} \cdot \begin{pmatrix} H_1(-z) & -H_0(-z) \\ -H_1(z) & H_0(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_0(z) & F_1(z) \\ F_0(-z) & F_1(-z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ומסנני הסינתזה הם לכן:

$$F_0(z) = \frac{2 \cdot z^{-\ell} \cdot H_1(-z)}{H_1(-z)H_0(z) - H_1(z)H_0(-z)}$$

$$F_1(z) = \frac{-2 \cdot z^{-\ell} \cdot H_0(-z)}{H_1(-z)H_0(z) - H_1(z)H_0(-z)}$$

4 - 23

כעת, בהנחה ש- $H_0(z), H_1(z)$ הם מסנני FIR נדרוש שגם מסנני הסינתזה יהיו כאלה. לשם כך, נדרוש שהמכנה (הדטרמיננטה של \mathbf{H}) בביטויים ל- $F_0(z), F_1(z)$ יהיה קבוע, עד כדי השהיה k , כלומר:

$$\det(\mathbf{H}) = H_1(-z)H_0(z) - H_1(z)H_0(-z) = C \cdot z^{-k}$$

ונקבל אז:

$$F_0(z) = \frac{2 \cdot z^{-\ell} \cdot H_1(-z)}{C \cdot z^{-k}} = \frac{2}{C} \cdot z^{-(\ell-k)} \cdot H_1(-z)$$

$$F_1(z) = \frac{-2 \cdot z^{-\ell} \cdot H_0(-z)}{C \cdot z^{-k}} = -\frac{2}{C} \cdot z^{-(\ell-k)} \cdot H_0(-z)$$

קל לראות שקשרים אלה מבטיחים ביטול קיפולים, כלומר:

$$F_0(z)H_0(-z) + F_1(z)H_1(-z) = 0$$

ובמיוחד, עבור $\ell = k$, נקבל את הקשרים בהם השתמשנו הן במסנני QMF והן במסנני CQF (עם ערכי C מתאימים).

4 - 24

נתייחס למסנני CQF, שם בחרנו: $H_1(z) = -H_0(-z^{-1}) \cdot z^{-N}$ (N אי-זוגי).

הצבה ב $\det(\mathbf{H})$ נותנת:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{H}) &= H_1(-z)H_0(z) - H_1(z)H_0(-z) = \\ &= -H_0(-(-z)^{-1}) \cdot (-z)^{-N} \cdot H_0(z) + H_0(-z^{-1}) \cdot z^{-N} \cdot H_0(-z) = \\ &= z^{-N} \cdot \{H_0(z^{-1}) \cdot H_0(z) + H_0(-z^{-1}) \cdot H_0(-z)\} = z^{-N} \cdot \{G_0(z) + G_0(-z)\} \end{aligned}$$

כאשר $G_0(z)$ הוא מסנן המכפלה שהגדרנו עבור מערך CQF.

התנאי על $\det(\mathbf{H})$, עם $k = N$, $C = 2$, מתאים לדרישה שראינו קודם: $G_0(z) + G_0(-z) = 2$ והדרישה מתקיימת עבור $G_0(z)$ שהוא מסנן Half-band עם $g_0(0) = 1$.

מכיוון שבמסנן FIR בעל פאזה לינארית, אם קיים אפס ב- $z = z_0$ קיים גם אפס ב- $z = z_0^{-1}$. הרי שההפרדה בין אפסי $G_0(z) = H_0(z^{-1}) \cdot H_0(z)$ לא מאפשרת ל- $H_0(z)$ להיות בעל פאזה לינארית (מלבד במקרים מנוונים).

נראה כעת בחירה אחרת של מסנן מכפלה, שמאפשרת קבלת שחזור מושלם (עד כדי השהיה) עם מסנני FIR בעלי פאזה לינארית – מערך הקרוי בי-אורתוגונלי (שם הנובע במקורו מתורת ה-Wavelets).

מעריך מסננים בי-אורתוגונלי

הרעיון הוא לבחור מסנן מכפלה $Q(z)$, בעל פאזה אפס, הנגזר ישירות מהביטוי ל- $\det(\mathbf{H})$ ומאפשר בחירה של מסנני FIR עם פאזה לינארית:

$$\det(\mathbf{H}) = H_1(-z)H_0(z) - H_1(z)H_0(-z)$$

$$z^{-N}Q(z) = H_0(z)H_1(-z)$$

כאשר $N = (N_0 + N_1) / 2$, ו- N_0, N_1 הם סדרי המסננים $H_0(z), H_1(z)$, בהתאמה. מתקבל לכן,

$$\det(\mathbf{H}) = H_1(-z)H_0(z) - H_1(z)H_0(-z) = z^{-N} \cdot Q(z) - (-z)^{-N} \cdot Q(-z)$$

ועבור N אי-זוגי:

$$\det(\mathbf{H}) = z^{-N} \cdot \{Q(z) + Q(-z)\}$$

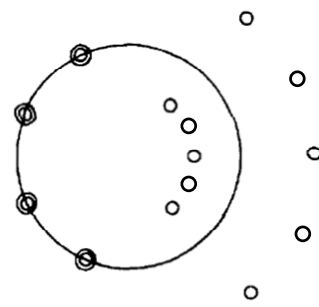
התנאי על $\det(\mathbf{H})$, עם $k = N$, $C = 2$, נותן כעת: $\{Q(z) + Q(-z)\} = 2$

ולכן $Q(z)$, כמו $G_0(z)$, הוא מסנן Half-band, בעל פאזה אפס, עם $q(0) = 1$ ו- $2N+1$ מקדמים.

כעת ניתן לחלק את האפסים של $Q(z)$ למסננים $H_0(z), H_1(z)$ כך שהמסננים יהיו בעלי פאזה ליניארית, כמודגם להלן:

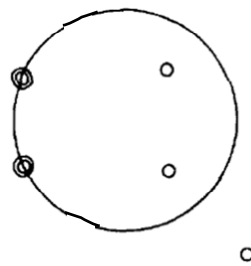
אפסי $Q(z)$:

$$2N = 18 \longrightarrow N = 9$$

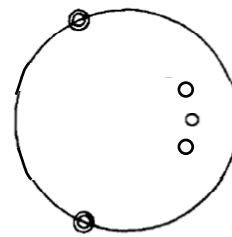


קונפיגורציה א'

$$N_0 = 8$$



$H_0(z)$

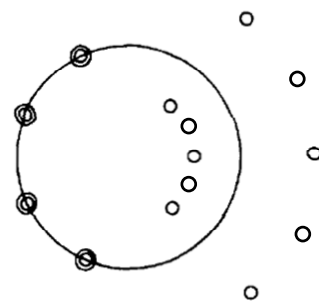


$H_1(-z)$

$$N_1 = 10$$

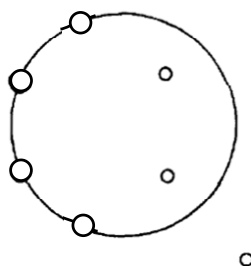
אפסי $Q(z)$:

$$2N = 18 \longrightarrow N = 9$$

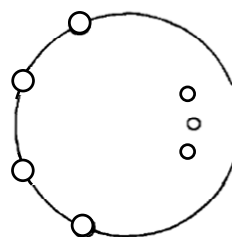


קונפיגורציה ב'

$$N_0 = 8$$



$H_0(z)$



$H_1(-z)$

$$N_1 = 10$$

מערכי מסננים דו-ערוציים - סיכום

FB - Type	Relations	"Generating Function"	PR ?	H ₀ , H ₁ of Same Order ?	Is Linear Phase Possible?
QMF	$H_1(z) = H_0(-z)$ $F_0(z) = H_0(z) \cdot 2$ $F_1(z) = -H_0(-z) \cdot 2$	$H_0(z)$ (LP-Prototype Filter)	No ($N > 1$)	Yes	Yes
CQF (Orthog. FB)	$G_0(z) \rightarrow H_0(z)$ $H_1(z) = -H_0(-z^{-1})z^{-N}$ $F_0(z) = H_1(-z)$ $F_1(z) = -H_0(-z)$	$G_0(z) = H_0(z)H_0(z^{-1})$ (Half-band Product Filter)	Yes	Yes	No
Bi-Orthog. FB (Tutorial)	$Q(z) \rightarrow H_0(z); H_1(z)$ $F_0(z) = H_1(-z)$ $F_1(z) = -H_0(-z)$	$z^{-N}Q(z) = H_0(z)H_1(-z)$ (Half-band Product Filter)	Yes	Not Necessarily	Yes

Note: In the first 2 cases the channel filters order N is odd (No. of coeff. even).
 In Case 3: $N=(N_0+N_1)/2$ is odd.

מימוש יעיל של מערך QMF באמצעות מסנני פוליפאזה

מערך האנליזה

$H_0(z) = H(z)$ (Lowpass prototype filter)

$H_1(z) = H(-z)$ (Highpass filter)

$H_0(z) = H(z) = P_0(z^2) + z^{-1}P_1(z^2)$

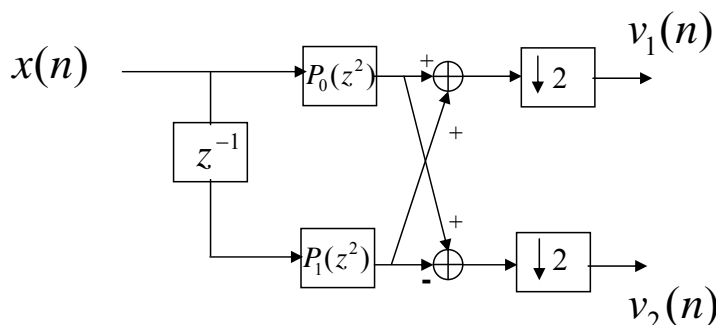
$H_1(z) = H(-z) = P_0(z^2) - z^{-1}P_1(z^2)$

ובייצוג פוליפאזה:

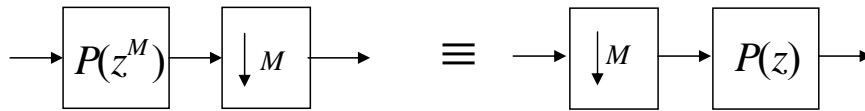
ברישום מטריצי:

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(z^2) \\ z^{-1}P_1(z^2) \end{bmatrix}$$

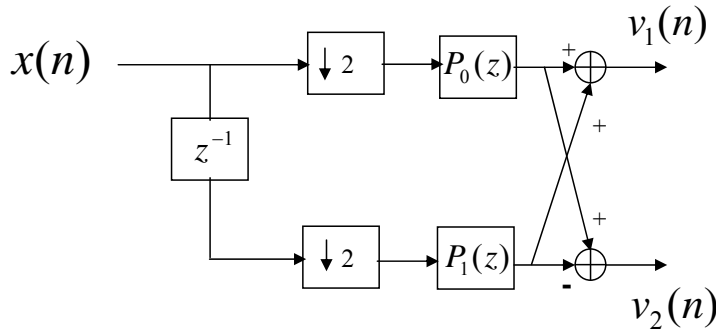
דיאגרמת מימוש:



שימוש בתכונה (Noble Equality):



נותן את דיאגרמת המימוש היעילה הבאה של מערכת האנליזה:



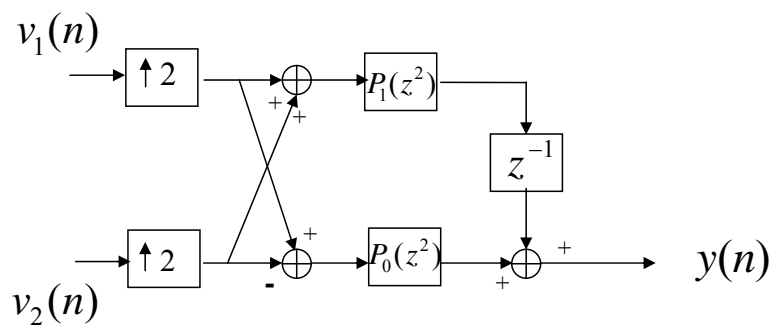
מערכת הסינתזה

$$F_0(z) = H_0(z) = P_0(z^2) + z^{-1}P_1(z^2)$$

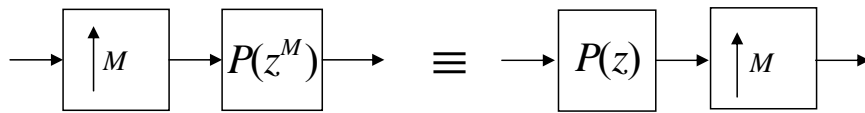
$$F_1(z) = -H_0(-z) = -P_0(z^2) + z^{-1}P_1(z^2)$$

ברישום מטריצי:

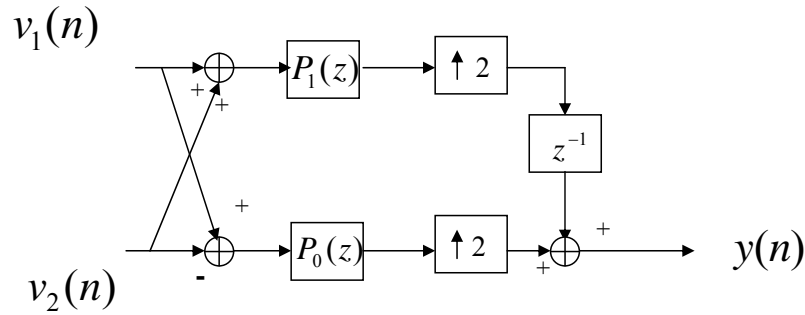
$$\begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^{-1}P_1(z^2) & P_0(z^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$



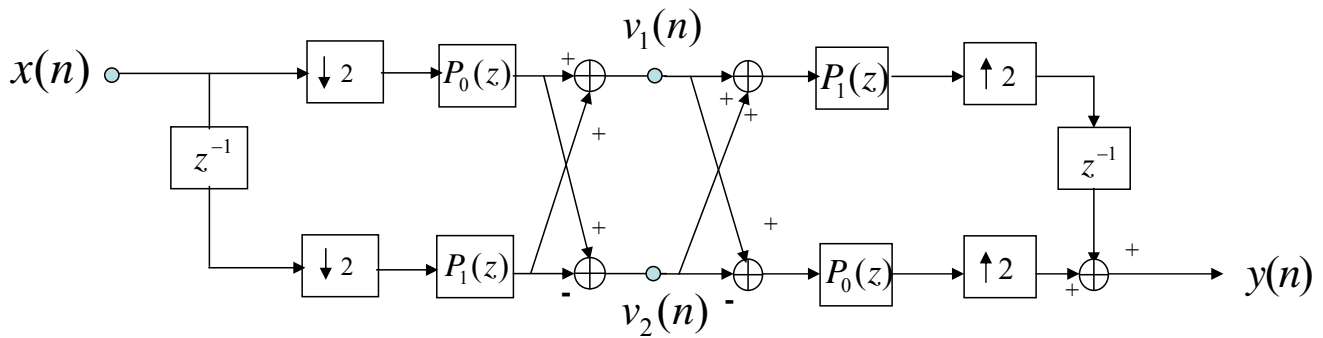
שימוש בתכונה (Noble Equality):



נותן את דיאגרמת המימוש היעילה הבאה של מערך הסינתזה:



ומתקבלת דיאגרמת המימוש היעילה הבאה של המערך כולו:



חישוב פ' התמסורת

$$T(z) \triangleq \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} [H_0^2(z) - H_1^2(z)] = \frac{1}{2} [H_0(z) \quad -H_1(z)] \begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \end{bmatrix}$$

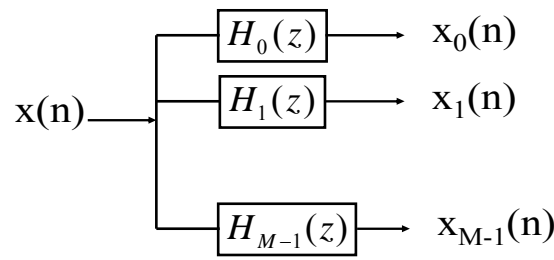
במערך QMF:
(ללא קיפולים)

$$T(z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} z^{-1}P_1(z^2) & P_0(z^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(z^2) \\ z^{-1}P_1(z^2) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{2z^{-1}P_1(z^2)P_0(z^2)}$$

ומהביטויים לעיל:

מערך אחיד של מסנני DFT - Uniform DFT Filterbank



מסנן אב-טיפוס (Prototype Filter) $H_0(z) \xleftrightarrow{z} h_0(n)$

בניח שמערך המסננים מתקבל ע"י הזזה בתדר של מסנן האב-טיפוס:

$$h_k(n) = h_0(n) e^{j \frac{2\pi}{M} kn}$$

$$H_k(z) = H_0(z e^{-j \frac{2\pi}{M} k}), \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

זהו, כמובן, מערך קומפלכסי.

נגדיר: $W_M \triangleq e^{j \frac{2\pi}{M}}$

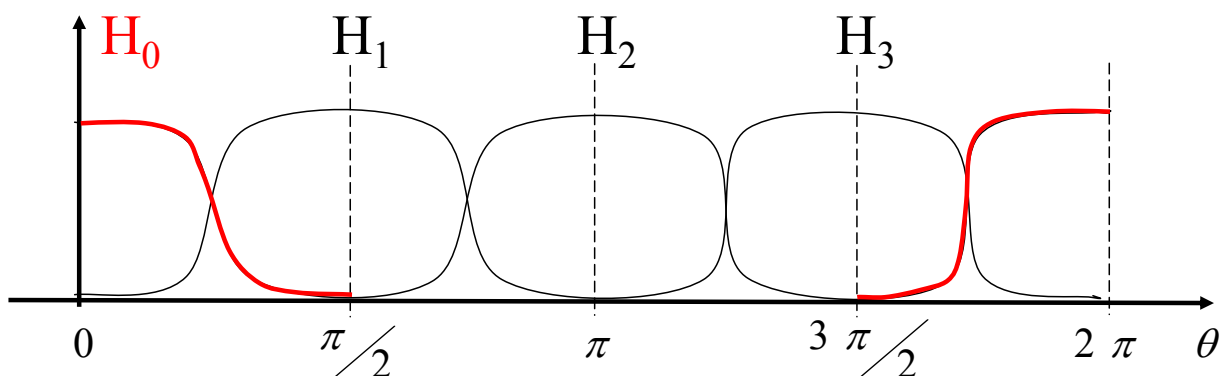
אזי,

$$h_k(n) = h(n) W_M^{nk}$$

$$H_k(z) = H_0(z W_M^{-k})$$

$$H_k(e^{j\theta}) = H_0(e^{j(\theta - \frac{2\pi}{M}k)})$$

לדוגמה, עבור $M=4$:



נתאר את $H_0(z)$ באמצעות מסוני ה-Polyphase שלו :

$$H_0(z) = \sum_{\rho=0}^{M-1} z^{-\rho} P_{\rho}(z^M)$$

נבטא כעת את $H_k(z)$ בעזרת מסוני ה-Polyphase:

$$\begin{aligned} H_k(z) &= H_0(zW_M^{-k}) \\ &= \sum_{\rho=0}^{M-1} z^{-\rho} W_M^{k\rho} P_{\rho}(z^M \underbrace{W_M^{-kM}}_1) \\ &= \sum_{\rho=0}^{M-1} z^{-\rho} W_M^{k\rho} P_{\rho}(z^M) \\ &= \sum_{\rho=0}^{M-1} (z^{-\rho} P_{\rho}(z^M)) W_M^{k\rho}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, M-1 \end{aligned}$$

4-37

ברישום מטריצי:

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_M^1 & W_M^2 & \dots & W_M^{M-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W_M^{M-1} & W_M^{2(M-1)} & \dots & W_M^{(M-1)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_0(z^M) \\ z^{-1}P_1(z^M) \\ \vdots \\ z^{-(M-1)}P_{M-1}(z^M) \end{bmatrix}$$

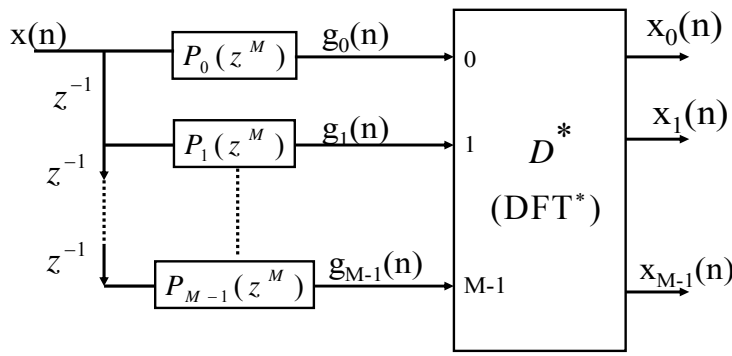
כלומר,

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{bmatrix} = MD^{-1} \begin{bmatrix} P_0(z^M) \\ z^{-1}P_1(z^M) \\ \vdots \\ z^{-(M-1)}P_{M-1}(z^M) \end{bmatrix} = D^* \begin{bmatrix} P_0(z^M) \\ z^{-1}P_1(z^M) \\ \vdots \\ z^{-(M-1)}P_{M-1}(z^M) \end{bmatrix}$$

כאשר D היא מטריצת ה-DFT, שהיא מטריצה סימטרית המקיימת: $D^{-1} = \frac{1}{M} D^*$

4-38

דיאגרמת מימוש



$$\underline{x}(n) \triangleq \begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \\ \vdots \\ x_{M-1}(n) \end{bmatrix} = D^* \begin{bmatrix} g_0(n) \\ g_1(n) \\ \vdots \\ g_{M-1}(n) \end{bmatrix} = D^* \underline{g}(n)$$

נבחן מקרה פרטי

$$h_0(n) = \begin{cases} 1, & n = 0, 1, 2, \dots, M-1 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

נתון:

$$P_i(z) = 1, \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

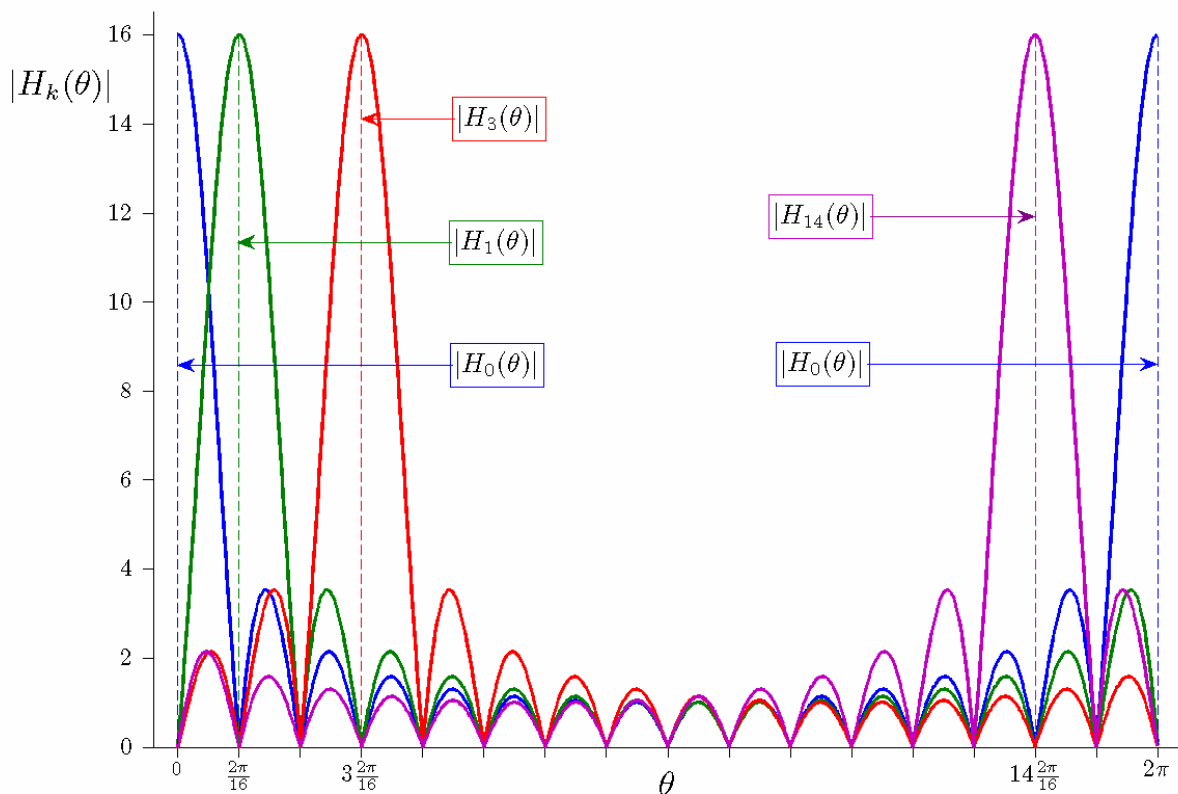
אזי:

$$g_i(n) = x(n-i), \quad i = 0, 1, 2, \dots, M-1$$

לכן,

והאותות במוצא המערך מתקבלים כתוצאה של הפעלת DFT^* על אות הכניסה שהופעל עליו חלון מלבני באורך M . זהו בעצם תיאור של ה-DFT כמערך מסננים אחיד, כאשר מסנן האב-טיפוס הוא חלון מלבני.

דוגמה עבור $M=16$



לשחזור אות הכניסה נסכם את המוצאים, פעולה הקרויה: Filter Bank Summation - FBS

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} x_k(n)$$

ולקבלת מערכת יחידה נדרש לכן (בהנחה שאין השהיה):

$$\sum_{k=0}^{M-1} H_k(z) = \sum_{k=0}^{M-1} H_0(zW_M^{-k}) = 1$$

מכיון ש: $P_0(z) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_0(z^{1/M} W_M^{-k})$ הרי שמתקבל: $P_0(z^M) = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_0(zW_M^{-k})$

ולכן, נדרש: $P_0(z^M) = \frac{1}{M}$

התנאי על $h_0(n)$ לקבלת מערכת יחידה (תנאי הכרחי ומספיק) הוא לפיכך:

$$P_0(z^M) = \frac{1}{M} \Leftrightarrow \begin{cases} h_0(0) = \frac{1}{M} \\ h_0(nM) = 0, \quad n \neq 0 \end{cases}$$

4-41

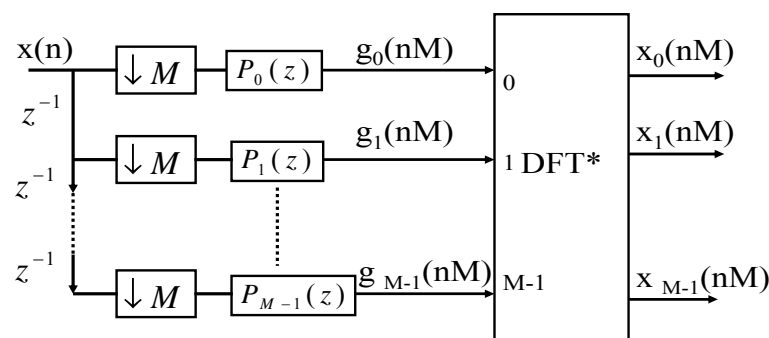
שימוש בדצימציה קריטית (M:1)

מכיוון שרוחב הסרט של כל מסנן (BP קומפלכסי) הוא נומינלית $2\pi / M$, הרי שניתן לחסוך חישובים (ולצמצם את מספר הדגמים לייצוג) ע"י ביצוע דצימציה של מוצא כל מסנן ביחס M:1.

כפי שכבר ראינו, ניצול התכונה:

$$\rightarrow P(z^M) \rightarrow \downarrow M \rightarrow \equiv \rightarrow \downarrow M \rightarrow P(z) \rightarrow$$

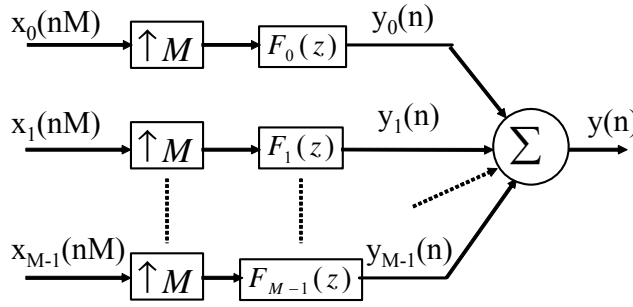
מאפשר את קבלת המימוש היעיל הבא בעזרת מסנני Polyphase:



הדבר מתאים לכך שהאנליזה מבוצעת "בקפיצות" של M דגמים על פני אות הכניסה $x(n)$.

4-42

מערכת הסינתזה



נשתמש במערכת מסנני סינתזה המקייים: $F_k(z) = W_M^k F_0(z W_M^{-k})$ כאשר $F_0(z)$ הוא מסנן מעביר נמוכים (אב-טיפוס - סינתזה).

כאן נוח יותר להשתמש ב- Type-2 Polyphase Decomposition:

$$Q_\rho(z) = P_{M-1-\rho}(z), \quad \rho = 0, 1, \dots, M-1$$

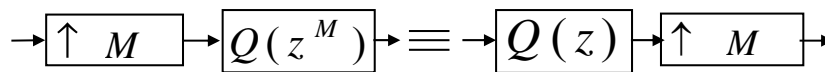
$$F_0(z) = \sum_{\rho=0}^{M-1} z^{-(M-1-\rho)} Q_\rho(z^M) \quad \text{ואז:}$$

$$F_k(z) = W_M^k F_0(z W_M^{-k}) = W_M^k \sum_{\rho=0}^{M-1} z^{-(M-1-\rho)} W_M^{-k} W_M^{-k\rho} Q_\rho(z^M) \quad \text{ולכן,}$$

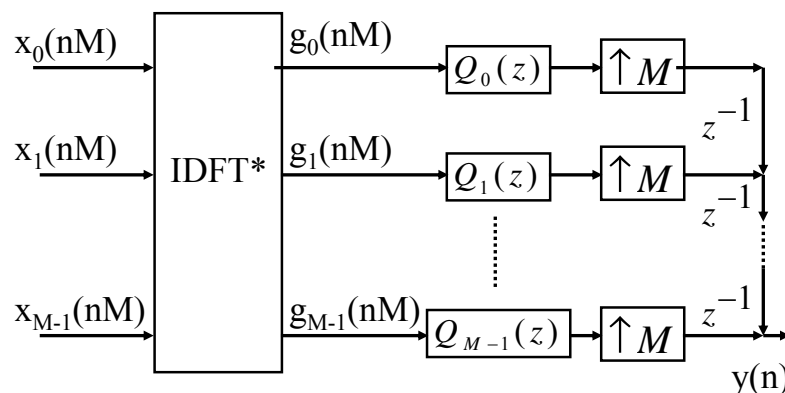
$$= \sum_{\rho=0}^{M-1} z^{-(M-1-\rho)} Q_\rho(z^M) W_M^{-k\rho}$$

שזהו ביטוי דומה לזה שהתקבל בשקף 4-37 ביחס ל- $H_k(z)$ ו- $P_\rho(z^M)$, שמאפשר את השימוש ב-DFT. שים לב: כאן P ו- Q מוגדרים ביחס ל- $F = F_0$. במידת הצורך נסמן P^F, Q^F .

שימוש בתכונה:



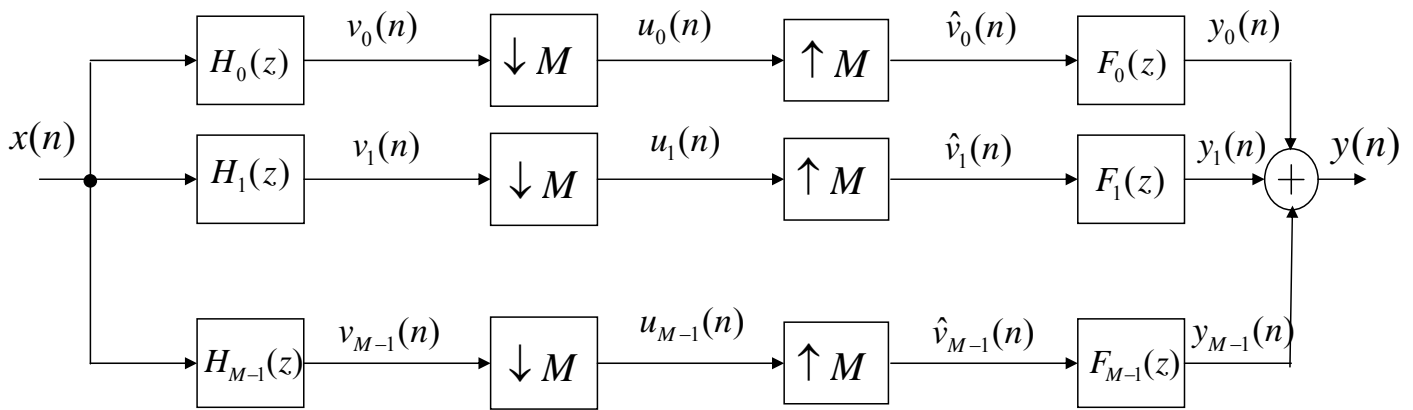
וניתוח דומה לזה שנעשה עבור האנליזה, נותן את הסכמה היעילה הבאה לביצוע הסינתזה:



קל לראות שתנאי מספיק למערכת יחידה, עד כדי השהיה קבועה, הוא:

$$P_\rho^H(z) Q_\rho^F(z) = 1, \quad \rho = 0, 1, \dots, M-1$$

מערך מסננים כללי בעל M פסים - M-band Filter Bank



$$V_k(z) = H_k(z)X(z)$$

$$U_k(z) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=0}^{M-1} H_k(z^{1/M}W_M^{-\ell})X(z^{1/M}W_M^{-\ell}); \quad W_M \triangleq e^{j\frac{2\pi}{M}}$$

$$\hat{V}_k(z) = U_k(z^M)$$

$$Y_k(z) = \hat{V}_k(z)F_k(z); \quad Y(z) = \sum_{k=0}^{M-1} Y_k(z)$$

4 - 45

הגדרות

$$\underline{U}(z) \triangleq [U_0(z) \ U_1(z) \ \dots \ U_{M-1}(z)]^T$$

$$\underline{X}^{(m)}(z) \triangleq [X(z) \ X(zW_M^{-1}) \ \dots \ X(zW_M^{-(M-1)})]^T$$

Input Modulation Vector

$$\mathbf{H}^{(m)}(z) \triangleq \begin{bmatrix} H_0(z) & H_1(z) & \dots & H_{M-1}(z) \\ H_0(zW_M^{-1}) & H_1(zW_M^{-1}) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H_0(zW_M^{-(M-1)}) & \dots & H_{M-1}(zW_M^{-(M-1)}) \end{bmatrix}$$

Analysis Modulation Matrix

$$\underline{Y}^{(m)}(z) \triangleq [Y(z) \ Y(zW_M^{-1}) \ \dots \ Y(zW_M^{-(M-1)})]^T$$

Output Modulation Vector

$$\mathbf{F}^{(m)}(z) \triangleq \begin{bmatrix} F_0(z) & F_1(z) & \dots & F_{M-1}(z) \\ F_0(zW_M^{-1}) & F_1(zW_M^{-1}) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_0(zW_M^{-(M-1)}) & \dots & F_{M-1}(zW_M^{-(M-1)}) \end{bmatrix}$$

Synthesis Modulation Matrix

4 - 46

באמצעות ההגדרות הנ"ל, ניתן לרשום:

$$\underline{Y}^{(m)}(z) = \mathbf{T}(z)\underline{X}^{(m)}(z)$$

כאשר,

$$\mathbf{T}(z) \triangleq \frac{1}{M} \mathbf{F}^{(m)}(z) [\mathbf{H}^{(m)}(z)]^T$$

$\mathbf{T}(z)$ קרויה "מטריצת התמסורת" - Transfer Matrix מערך המסננים הוא "חסר קיפולים" (Alias-free) אם $\mathbf{T}(z)$ היא אלכסונית, כלומר,

$$\mathbf{T}(z) = \text{diag} \left[T(z) \quad T(zW_M^{-1}) \quad \dots \quad T(zW_M^{-(M-1)}) \right]$$

כאשר אין קיפולים, פ' התמסורת (Distortion Transfer Function) היא:

$$T(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} H_k(z) F_k(z) = \frac{1}{M} \underline{F}^T(z) \underline{H}(z)$$

$$\underline{H}^T(z) \triangleq [H_0(z) \quad H_1(z) \quad \dots \quad H_{M-1}(z)]$$

$$\underline{F}^T(z) \triangleq [F_0(z) \quad F_1(z) \quad \dots \quad F_{M-1}(z)]$$

4-47

ניתן להראות, שעבור מסנני אנליזה נתונים ו- $T(z)$ רצוי, מסנני הסינתזה ניתנים ע"י:

$$\underline{F}(z) = M [\mathbf{H}^{(m)}(z)]^{-1} [T(z) \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T$$

ולקיום פתרון נדרש, כמובן, $\det \mathbf{H}^{(m)}(z) \neq 0$

פתרון אנליטי בגישה זו הוא בדרך כלל מורכב מאד ומועדפת הגישה להלן המבוססת על ייצוג פוליפאזה, שמביאה גם למימוש יעיל.

4-48

ייצוג פוליפאזה

עבור מסנני האנליזה

$$H_k(z) = \sum_{\ell=0}^{M-1} z^{-\ell} P_{k,\ell}(z^M) \quad \text{Type-1 Polyphase Decomposition}$$

$$\begin{bmatrix} H_0(z) \\ H_1(z) \\ \vdots \\ H_{M-1}(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{0,0}(z^M) & P_{0,1}(z^M) & \dots & P_{0,M-1}(z^M) \\ P_{1,0}(z^M) & P_{1,1}(z^M) & \dots & P_{1,M-1}(z^M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{M-1,0}(z^M) & P_{M-1,1}(z^M) & \dots & P_{M-1,M-1}(z^M) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ z^{-1} \\ \vdots \\ z^{-(M-1)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{H}(z) = \mathbf{P}(z^M) \underline{E}(z); \quad \underline{E}(z) \triangleq [1 \quad z^{-1} \quad \dots \quad z^{-(M-1)}]^T$$

המטריצה $\mathbf{P}(z)$ קרויה Type -1 Polyphase Matrix

עבור מסנני הסינתזה

$$F_k(z) = \sum_{\ell=0}^{M-1} z^{-(M-1-\ell)} Q_{\ell,k}(z^M) \quad \text{Type-2 Polyphase Decomposition}$$

$$\begin{bmatrix} F_0(z) \\ F_1(z) \\ \vdots \\ F_{M-1}(z) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} z^{-(M-1)} \\ z^{-(M-2)} \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} Q_{0,0}(z^M) & Q_{0,1}(z^M) & \dots & Q_{0,M-1}(z^M) \\ Q_{1,0}(z^M) & Q_{1,1}(z^M) & \dots & Q_{1,M-1}(z^M) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Q_{M-1,0}(z^M) & Q_{M-1,1}(z^M) & \dots & Q_{M-1,M-1}(z^M) \end{bmatrix}$$

$$\underline{F}^T(z) = z^{-(M-1)} \tilde{\underline{E}}(z) \mathbf{Q}(z^M); \quad \tilde{\underline{E}}(z) \triangleq [1 \quad z \quad \dots \quad z^{(M-1)}] = \underline{E}^T(z^{-1})$$

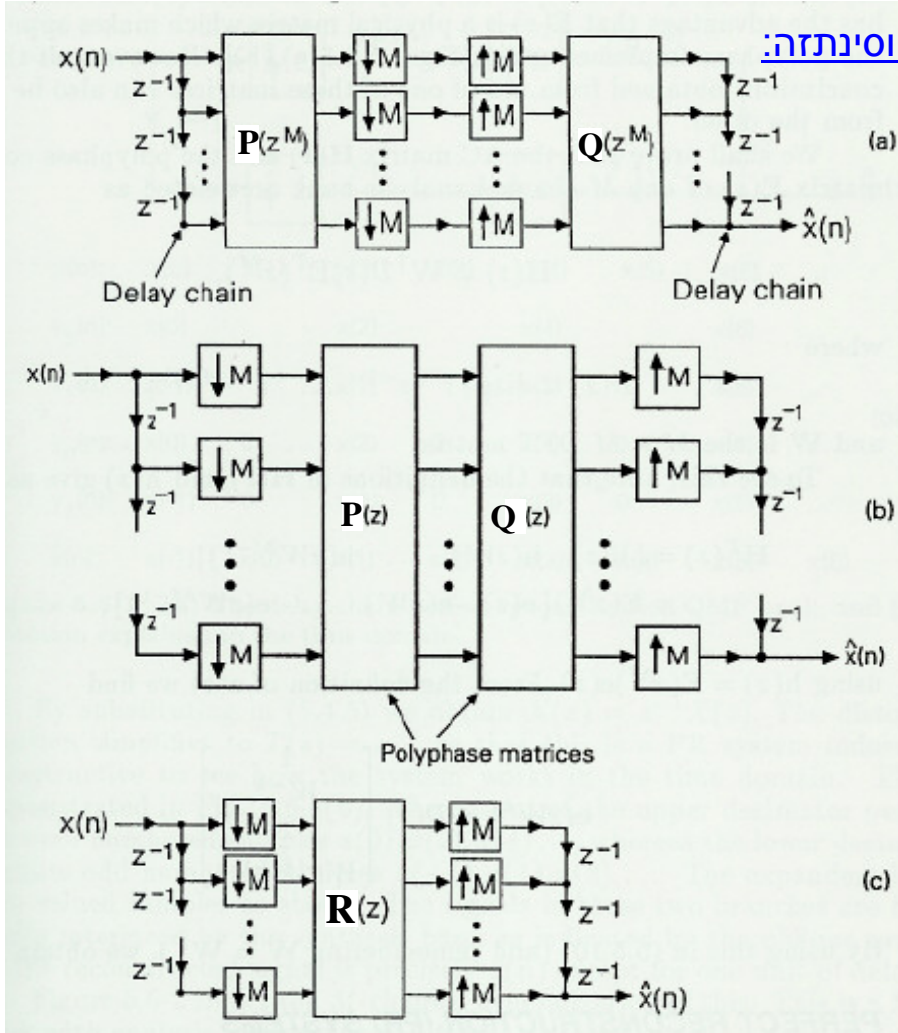
המטריצה $\mathbf{Q}(z)$ קרויה Type -2 Polyphase Matrix

שילוב שני המערכים – אנליזה וסינתזה:

האיור מהספר:

P.P. Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice Hall, 1993.

Fig. 5.5-3 (עם שינוי סימונים)

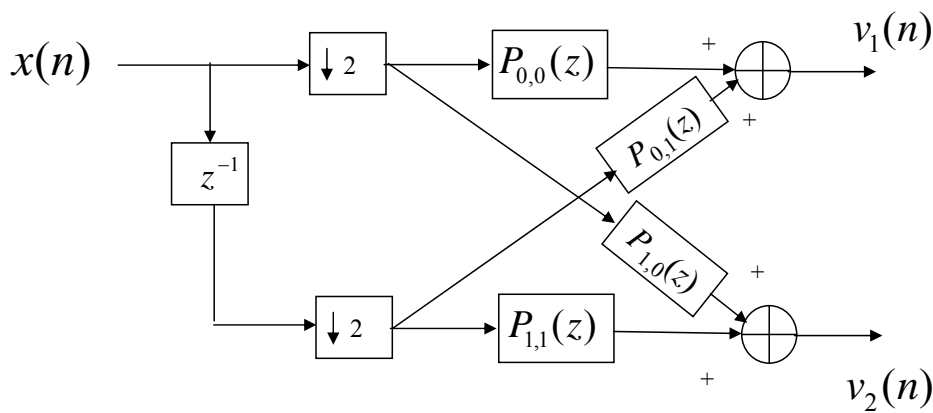


ומתקבלת מע' יחידה
(עד כדי השהיה) כאשר:

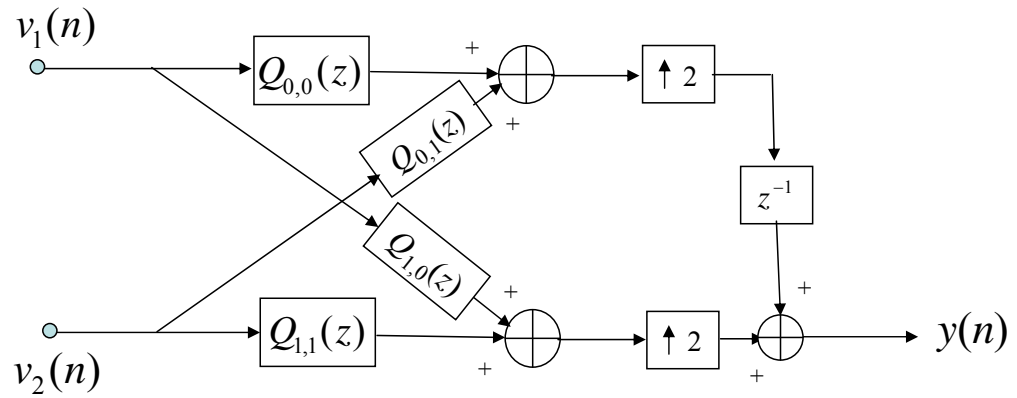
$$\mathbf{R}(z) \triangleq \mathbf{Q}(z)\mathbf{P}(z) = \mathbf{I}$$

דיאגרמת מימוש יעיל – מערך מסננים כללי

מערך אנליזה



מערך סינתזה



5. התמרת פוריה לזמן קצר

Short-time Fourier Transform

- מבוא
- אינטרפרטציות שונות.
- התמרת פוריה לזמן-קצר דיסקרטית (DSTFT).
- מודיפיקציה של ה-DSTFT (ת. כתה).
- חישוב ה-DSTFT באמצעות ה-DFT וקשר למערך אחיד.
- שימוש בדצימציה ואינטרפולציה.
- תנאי Portnoff לשחזור מדויק.
- אנליזה/סינתזה בשיטת WOLA (weighted-overlap-add).
- וקשר למערך אחיד של מסנני DFT.
- התמרת Gabor וקשר ל-DSTFT

Oppenheim & Schaffer

מקורות ספרות: Ch. 10 – 4 (אך עם הגדרת STFT שונה מעט)

- T. F. Quatieri: *Discrete-Time Speech Signal Processing – Principles and Practice*, Prentice Hall, 2002, Ch. 7.
- R. E. Crochiere & L. R. Rabiner, *Multirate Digital Signal Processing*, Prentice- Hall, 1983, Ch. 7

5 - 1

מבוא

התמרת פוריה קונבנציונלית של סדרה $\{x(n)\}$

$$X(e^{j\theta}) = F \{x(n)\} \triangleq \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jn\theta} \quad (\text{DTFT})$$

וההתמרה ההפכית:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta}) e^{jn\theta} d\theta$$

התמרת פוריה לזמן קצר - STFT

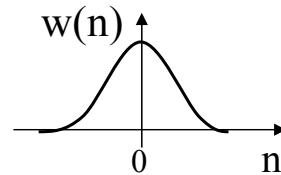
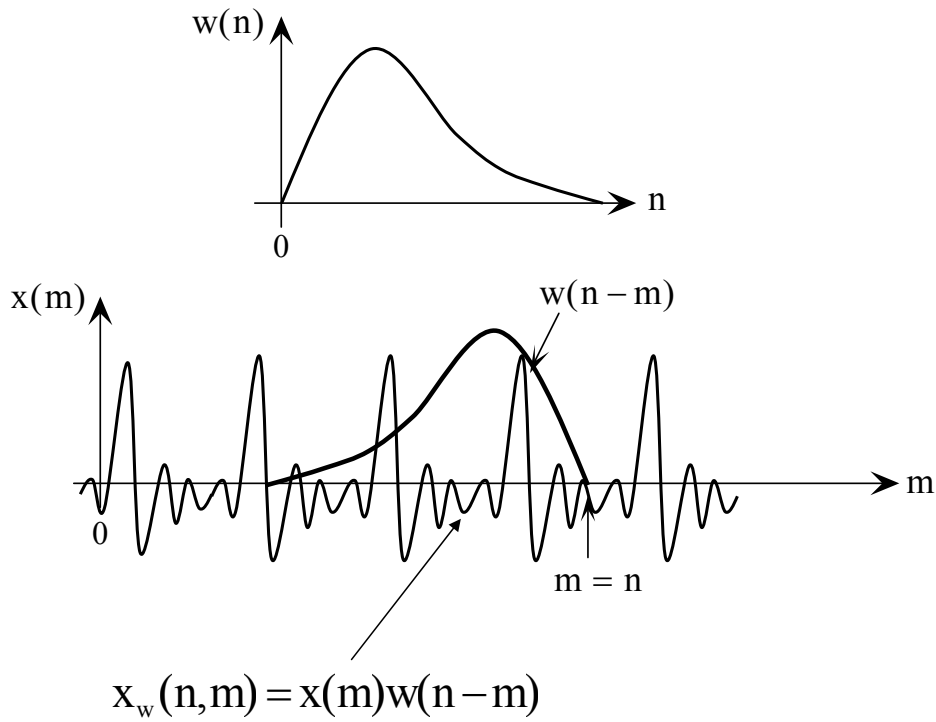
$$X_n(e^{j\theta}) \triangleq \sum_{m=-\infty}^{\infty} w(n-m)x(m)e^{-jm\theta}$$

כאשר $w(n)$ זו סדרת "חלון" המחליקה על פני הסדרה $\{x(n)\}$ כלומר, זו התמרת פוריה (לפי m) של הסדרה:

$$x_w(n,m) = x(m)w(n-m)$$

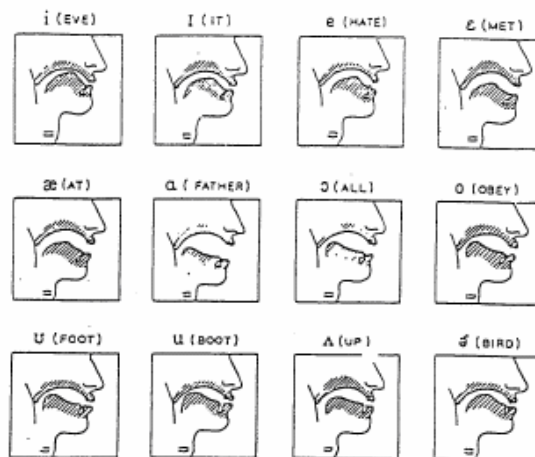
כמודגם בציור הבא:

5 - 2

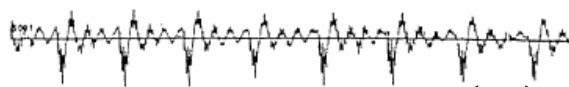


בשימושים רבים, החלון הינו בעל אורך סופי וסימטרי:

אות דיבור כדוגמה לאות שתכונותיו הספקטרליות משתנות בזמן

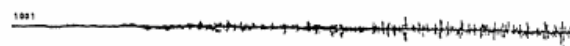


אות דיבור קולי
(Voiced – a,e,u,o,i)

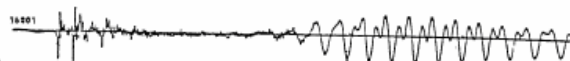


מחזור Pitch

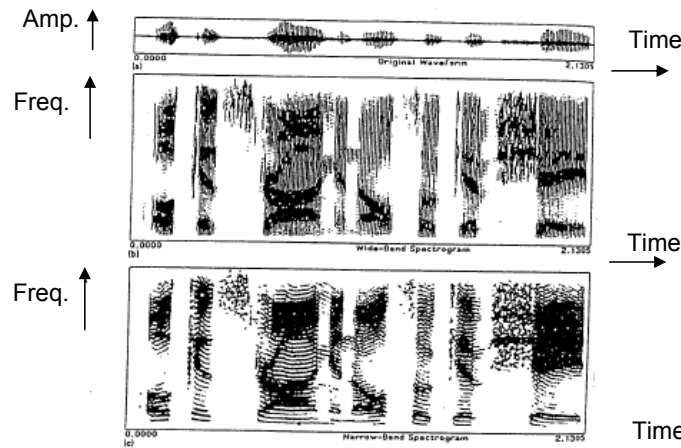
אות דיבור א-קולי
(Un-Voiced – s,f,sh)



"פוצץ"
(Plosive – p,k,t,b)



ספקטרוגרמות של אות דיבור



המשפט הנאמר: "Oak is strong and also Gives Shade"
 D.E. Veenman – "Speech Signal Analysis", האירור מתוך:
 in C.T. Chen: *Signal Processing Handbook*.

1. [ספקטרוגרמה רחבת-סרט](#): שימוש בחלון אנליזה צר (בעל משך הקטן ממחזור Pitch)
 2. [ספקטרוגרמה צרת סרט](#): שימוש בחלון אנליזה רחב (בעל משך של מספר מחזורי pitch).
- הקווים האנכיים הדקים מתאימים למחזורי Pitch עוקבים.
 הקווים האפקיים הדקים הם הרמוניות ה-Pitch.
 הפסים הכהים מתארים השתנות [הפורמנטיים](#) (תדירות התהודה של המעבר הקולי) בזמן.

$$X_n(e^{j\theta}) = F_{(m)} \{x_w(n, m)\} \quad \text{לפיכך,}$$

ולכן, ההתמרה ההפכית (עבור n קבוע):

$$x_w(n, m) = w(n - m)x(m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X_n(e^{j\theta}) e^{jm\theta} d\theta$$

ובהצגת $m = n$ (ובהנחה $w(0) \neq 0$):

$$x(n) = \frac{1}{2\pi w(0)} \int_{-\pi}^{\pi} X_n(e^{j\theta}) e^{jn\theta} d\theta$$

הקשר להתמרת פוריה הרגילה ניתן מתוך משפט הקונבולוציה הקומפלכסית:

$$w(n - m)x(m) \xleftrightarrow{F_{(m)}} X_n(e^{j\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{W}(e^{j\varphi}) X(e^{j(\theta+\varphi)}) d\varphi$$

כאשר $\tilde{W}(e^{j\varphi})$ זו התמרת פוריה של החלון $w(n-m)$ לפי m .

אינטרפרטציות שונות של ה-STFT

1. התמרת פוריה של אות הנשקף מבעד לחלון מחליק - כפי שהוצג לעיל.

2. סינון ליניארי

את הביטוי

$$X_n(e^{j\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) w(n-m) e^{-jm\theta}$$

ניתן לפרש כקונבולוציה בין אות $x(n)e^{-jn\theta}$, לבין סדרת החלון $w(n)$.

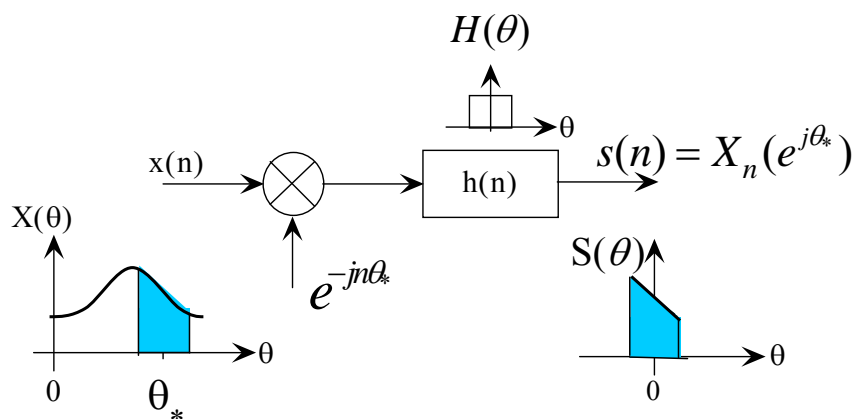
כלומר,

$$X_n(e^{j\theta}) = [x(n)e^{-jn\theta}] * w(n)$$

כאשר θ הוא פרמטר.

5 - 7

עבור $\theta = \theta_*$ אנו מקבלים לפיכך את הסכמה הבאה:



$$h(n) = w(n)$$

$$S(\theta) \triangleq F_{(n)} \{ X_n(e^{j\theta_*}) \}$$

$$S(\theta) = H(\theta) X(\theta + \theta_*)$$

כלומר, מתבצעת דה-מודולציה של האות כך ש- θ_* מוזז לראשית ואות

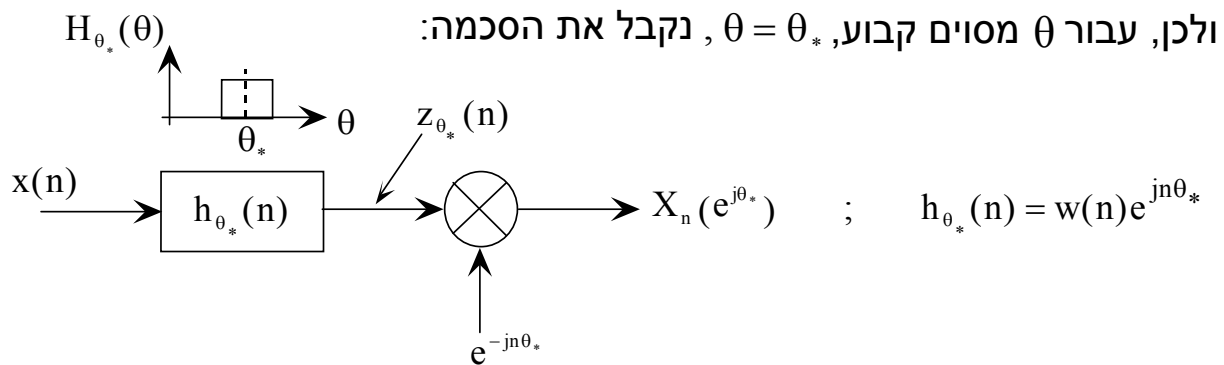
זה עובר סינון באמצעות $h(n)$ (הציור מדגים מקרה ספציפי בו $h(n)$ הוא מסנן LPF אידיאלי).

5 - 8

3. מערך מסננים (Filter - bank)

$$X_n(e^{j\theta}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)w(n-m)e^{-jm\theta} \stackrel{n-m=\ell}{=} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} w(\ell)x(n-\ell)e^{-j(n-\ell)\theta}$$

$$= e^{-jn\theta} \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} (w(\ell)e^{j\ell\theta})x(n-\ell) = e^{-jn\theta} \left\{ [w(n)e^{jn\theta}] * x(n) \right\}$$



אם $w(n) = h(n)$ הוא התגובה לדגם יחידה של מסנן LP, אזי $h_{\theta_*}(n)$ הוא מסנן BP קומפלכסי שמרכזו בתדר θ_*

5 - 9

תפוקת המסנן, $z_{\theta_*}(n)$, קרויה גם "אות אנליטי" (Analytic Signal) ונתונה מהנ"ל ע"י:

$$z_{\theta_*}(n) = \underbrace{X_n(e^{j\theta_*})}_{\text{מעטפת קומפלכסית}} \cdot \underbrace{e^{jn\theta_*}}_{\text{גל נושא}}$$

שים לב שסכימה, על פני כל ערכי θ_* , של $z_{\theta_*}(n)$ נותנת את אות הכניסה:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi w(0)} \int_{-\pi}^{\pi} X_n(e^{j\theta}) e^{jn\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi w(0)} \int_{-\pi}^{\pi} z_{\theta}(n) d\theta$$

אולם ברור מהנ"ל שניתן גם להשתמש בסט סופי של מסננים אשר סכום יציאותיהם יתן את $x(n)$ וזה מביא אותנו ל-DSTFT

5 - 10

התמרת פוריה לזמן קצר דיסקרטית

Discrete Short-Time Fourier Transform - DSTFT

נתבונן בסט דיסקרטי של תדרים: $\theta_k = \frac{2\pi}{M}k$, $k=0,1,\dots,M-1$

אזי, עפ"י האינטרפרטציה האחרונה:

$$X_n(e^{j\theta_k}) = [x(n) * h_k(n)]e^{-jn\theta_k}$$

כאשר:

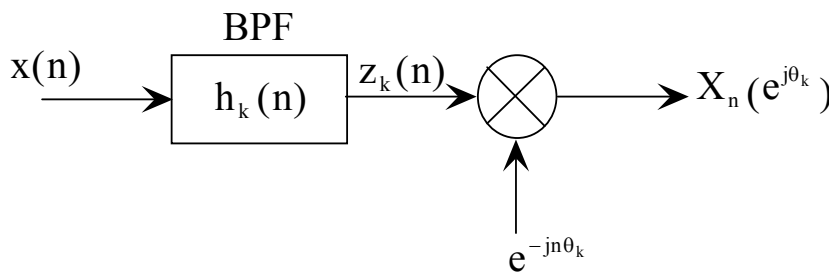
$$h_k(n) = h(n)e^{jn\theta_k} \quad ; \quad h(n) = w(n)$$

נניח ש- $h(n)$ הוא LPF, הקרוי אז $\text{Prototype Low Pass Filter}$.

אזי, $h_k(n)$ הוא BPF, המתקבל מהזזת תדר של ה LPF לתדר מרכזי θ_k .

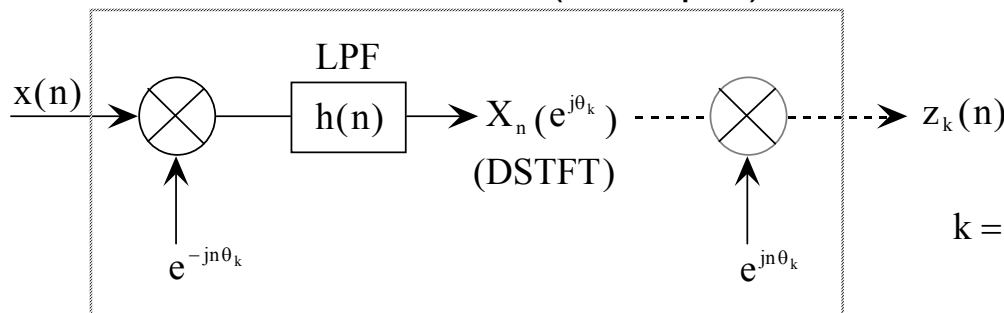
5 - 11

מתקבלת הסכמה:



$$k = 0, 1, \dots, M - 1$$

ועפ"י האינטרפרטציה השניה (סינון ליניארי):

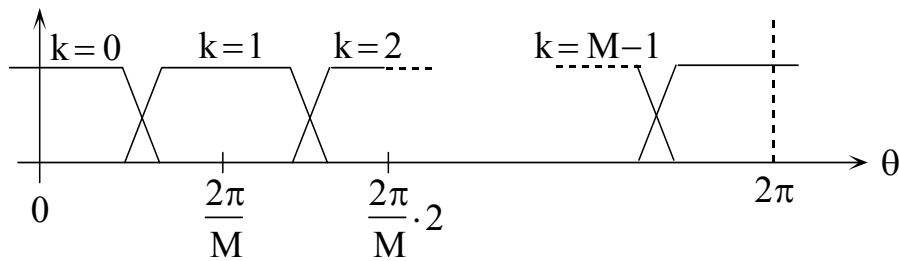


$$k = 0, 1, \dots, M - 1$$

(מימוש BPF קומפלכסי)

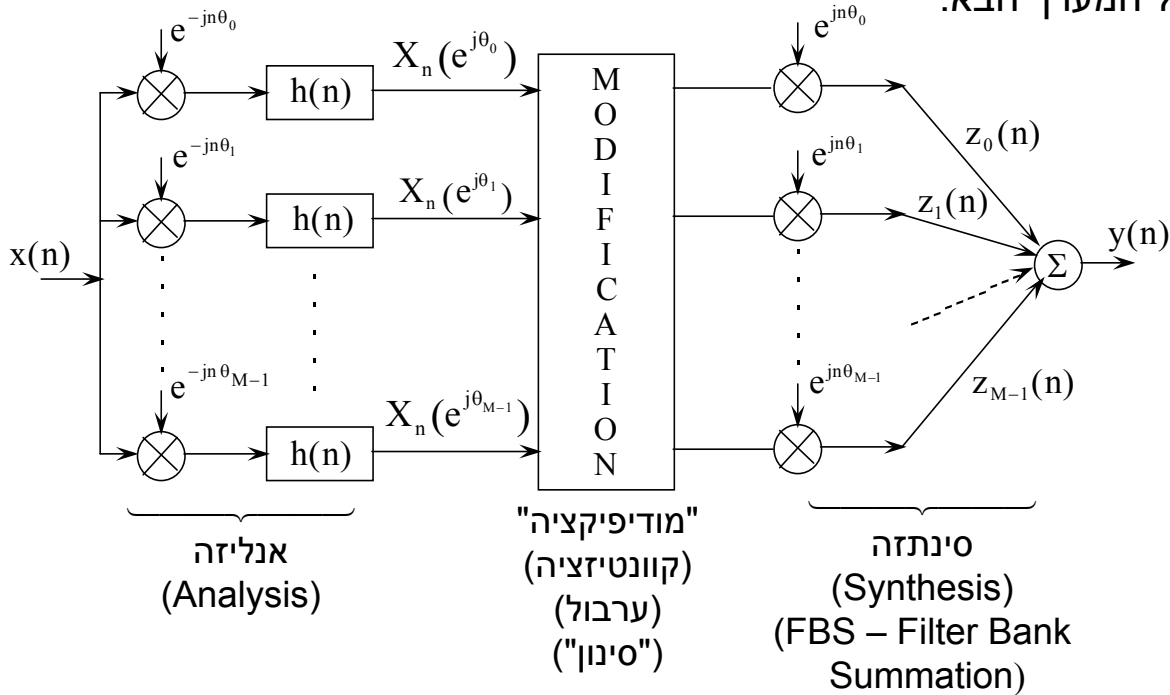
הערה: את BP ממשי מתקבל על ידי סכום האותות משני הערוצים k ו- $M - k$ ($k \neq 0$).

5 - 12



לניתוח כל תחום התדרים:

ומתקבל המערך הבא:



מהסכמה הנ"ל:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} z_k(n) = \sum_{k=0}^{M-1} X_n(e^{j\theta_k}) e^{jn\theta_k} ; \quad \theta_k \triangleq \frac{2\pi}{M} k$$

שים לב: זהו אינו ביטוי מקובל של IDFT !

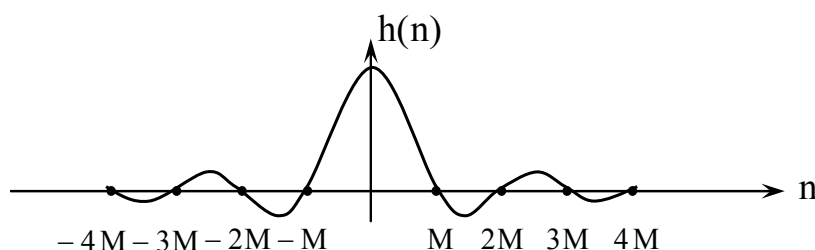
מכיוון שהסכמה הנ"ל שקולה לבנק מסנני BP קומפלכסיים, שיציאותיהם :

הרי שהתנאי למערכת יחידה (עם מסננים לא-סיבתיים) הוא:

$$\sum_{k=0}^{M-1} h_k(n) = \delta(n)$$

$$\begin{cases} h(0) = 1/M \\ h(\ell M) = 0 \quad \ell \neq 0 \end{cases}$$

שזהו תנאי שכבר ראינו עבור מערך אחד של מסנני DFT:



חישוב ה-DSTFT באמצעות ה-DFT

$$z_k(n) = X_n(e^{j\theta_k})e^{jn\theta_k} \quad \text{מוצא ה-BPF ה-} k$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_k(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{j\frac{2\pi}{M}mk} x(n-m)$$

נחליף משתנים: $m \rightarrow -m$ ונקבל:

$$z_k(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(-m)x(n+m)e^{-j\frac{2\pi}{M}mk}$$

נציב כעת $\ell = 0, 1, \dots, M-1$; $r = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$; $m = rM + \ell$ ונקבל:

$$z_k(n) = \sum_{\ell=0}^{M-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} h(-rM - \ell)x(n+rM + \ell)e^{-j\frac{2\pi}{M}(rM+\ell)k}$$

$$e^{-j\frac{2\pi}{M}(rM+\ell)k} = e^{-j\frac{2\pi}{M}\ell k} \cdot 1 \quad \text{ומתוך}$$

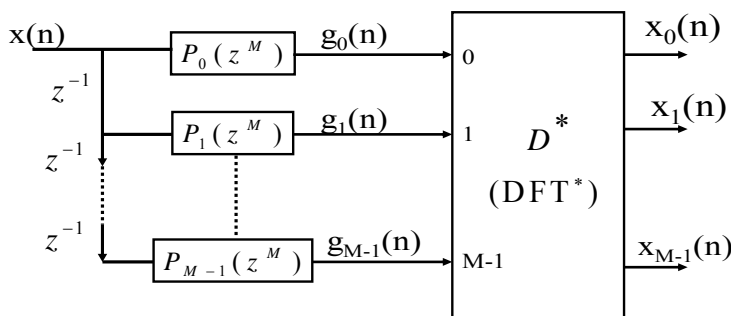
5-15

$$z_k(n) = \sum_{\ell=0}^{M-1} \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rM + \ell)h(-rM - \ell) \right] e^{-j\frac{2\pi}{M}\ell k} \quad \text{מתקבל:}$$

$$u_n(\ell) \triangleq \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(n+rM + \ell)h(-rM - \ell) \quad ; \quad \ell = 0, 1, \dots, M-1 \quad \text{נגדיר:}$$

$$z_k(n) = \sum_{\ell=0}^{M-1} u_n(\ell)e^{-j\frac{2\pi}{M}\ell k} = \text{DFT} \{u_n(\ell)\}_{\ell=0}^{M-1} \quad ; \quad k = 0, 1, \dots, M-1 \quad \text{אזי,}$$

ותוצאה זו מתלכדת עם התוצאה שקבלנו עבור מערך אחיד של מסנני DFT, לאחר התאמת סימונים:



$$g_\ell(n) \equiv u_n(-\ell); \quad \ell = 0, 1, \dots, M-1$$

תוך שימוש ב- $(-\ell) \bmod M = M - \ell$

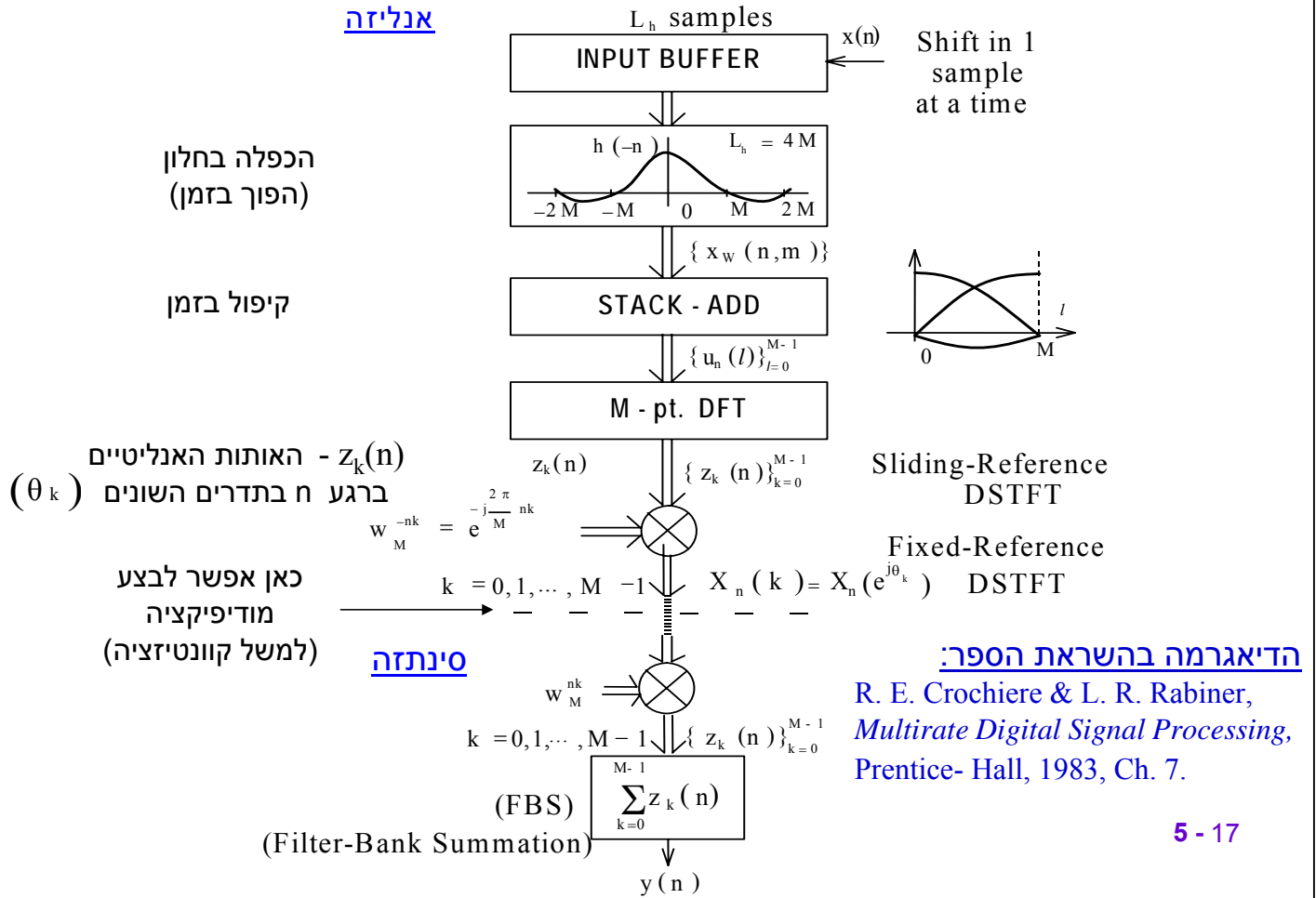
$$x_k(n) \equiv z_k(n); \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

לקבלת ה-DSTFT:

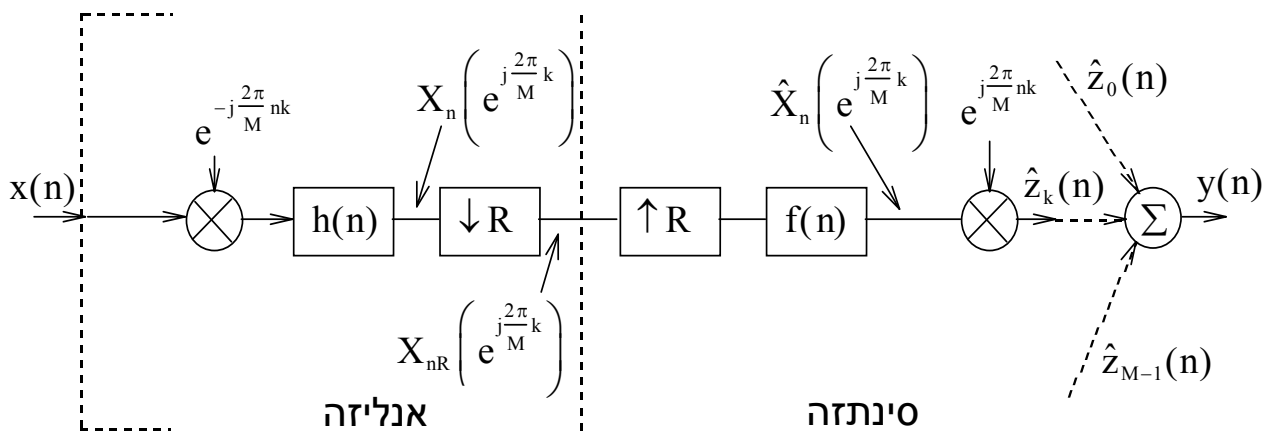
$$X_n(e^{j\frac{2\pi}{M}k}) = e^{-j\frac{2\pi}{M}nk} z_k(n), \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

5-16

דיאגרמה לחישוב ה-DSTFT



שימוש בדצימציה ואינטרפולציה



$h(n)$ - מסנן האנליזה או "חלון האנליזה"
 $f(n)$ - מסנן הסינתזה (האינטרפולציה) או "חלון הסינתזה"

פעולת האינטרפולציה:

$$\hat{X}_n \left(e^{j \frac{2\pi}{M} k} \right) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(n - rR) X_{rR} \left(e^{j \frac{2\pi}{M} k} \right)$$

למציאת התנאים האנליטיים לשחזור מדויק, נציג:

$$X_n(e^{j\theta_k}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)e^{-jm\theta_k} ; \quad \theta_k = \frac{2\pi}{M}k$$

• דצימציה (R:1):

$$X_{nR}(e^{j\theta_k}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(nR-m)e^{-jm\theta_k}$$

• אינטרפולציה (1:R):

$$\begin{aligned} \hat{X}_n(e^{j\theta_k}) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(n-rR)X_{rR}(e^{j\theta_k}) \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \left[\sum_{r=-\infty}^{\infty} f(n-rR)h(rR-m) \right] e^{-jm\theta_k} \end{aligned}$$

5 - 19

• שחזור - FBS:

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=0}^{M-1} \hat{X}_n(e^{j\theta_k}) \cdot e^{jn\theta_k} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{r=-\infty}^{\infty} x(m) f(n-rR) h(rR-m) \underbrace{\sum_{k=0}^{M-1} e^{j\frac{2\pi}{M}k(n-m)}}_{\downarrow} \\ &= M \cdot \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(n-pM) \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(n-rR) h(rR-n+pM) \end{aligned}$$

תנאי מספיק לשחזור מדויק (תנאי Portnoff*) (עד כדי הקבוע M):

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} f(n-rR)h(rR-n+pM) = \delta(p) \quad \forall n, \quad \forall p$$

* M. R. Portnoff, "Time-Frequency Representation of Digital Signals and Systems Based on Short-Time Fourier Analysis", IEEE Trans. ASSP, Vol. 28, No. 1, Feb. 1980, pp. 55-69.

בצוע הסינתזה בעזרת ה- DFT (FFT)

$$X_n(k) \triangleq X_n(e^{j\theta_k})$$

לשם הנוחיות נגדיר:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} \hat{X}_n(k) W_M^{nk} \quad ; \quad W_M \triangleq e^{j\frac{2\pi}{M}}$$

קיבלנו קודם (FBS):

$$\hat{X}_n(k) \triangleq \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(n-rR) X_{rR}(k)$$

כאשר,

$$y(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(n-rR) \sum_{k=0}^{M-1} X_{rR}(k) W_M^{+nk}$$

לכן,

$$X_n(k) = W_M^{-nk} DFT \{u_n(l)\}_{l=0}^{M-1}$$

קיבלנו כמו כן,

$$X_{rR}(k) = W_M^{-rRk} DFT \{u_{rR}(l)\}_{l=0}^{M-1} = W_M^{-rRk} z_k(rR)$$

כלומר,

5 - 21

ומכאן

$$y(n) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(n-rR) \underbrace{\sum_{k=0}^{M-1} z_k(rR) W_M^{(n-rR)k}}_{\downarrow}$$

$$M \cdot IDFT \{z_k(rR)\}_{k=0}^{M-1} \Big|_{l \rightarrow (n-rR)} = M \cdot u_{rR}((n-rR))_M \leftarrow \begin{array}{l} \text{הרחבה} \\ \text{מחזורית} \\ \text{של } u_{rR}(\cdot) \end{array}$$

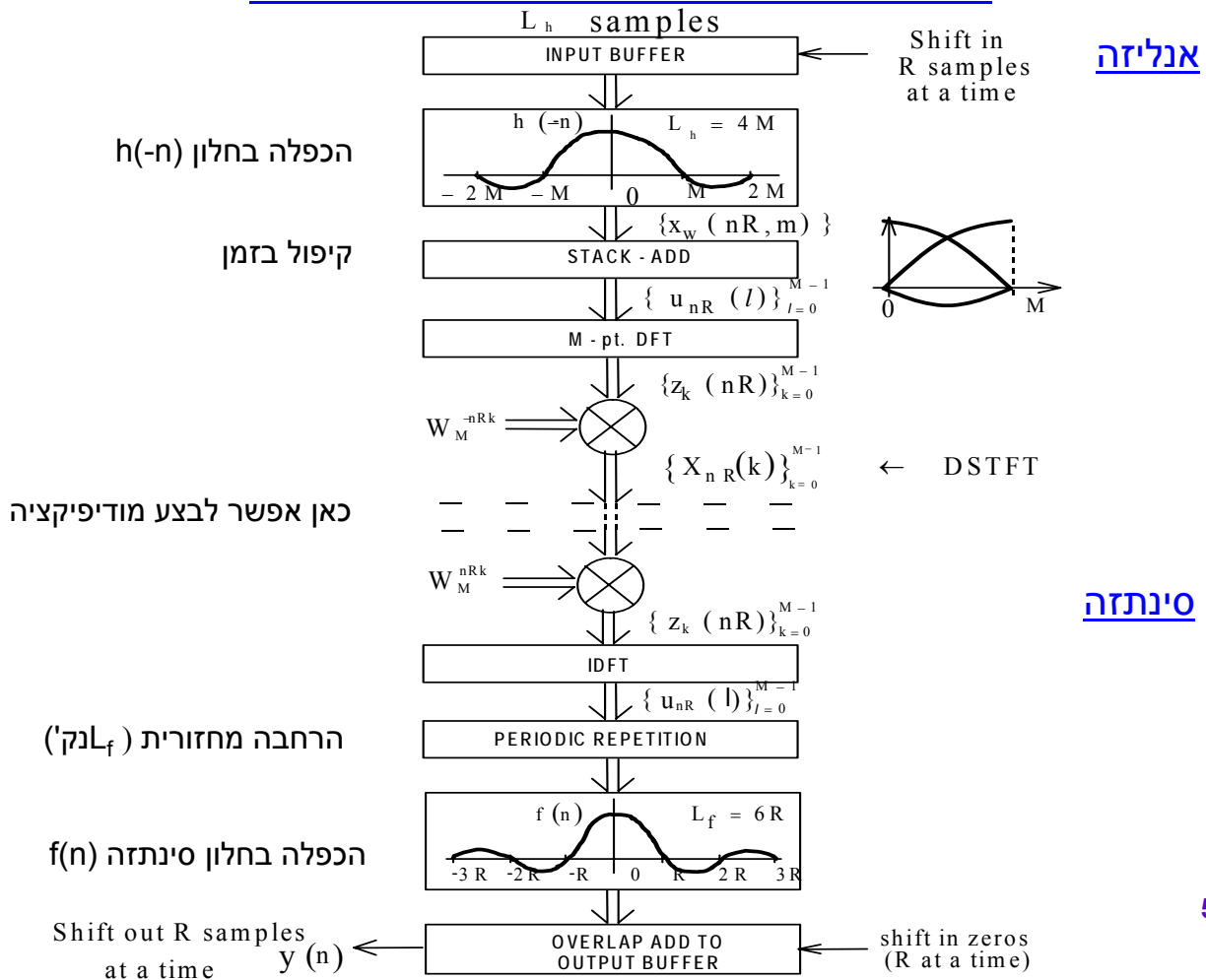
והתוצאה:

$$y(n) = M \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(n-rR) u_{rR}((n-rR))_M$$

שיטת סינתזה זו קרויה **WOLA** (Weighted Overlap & Add).

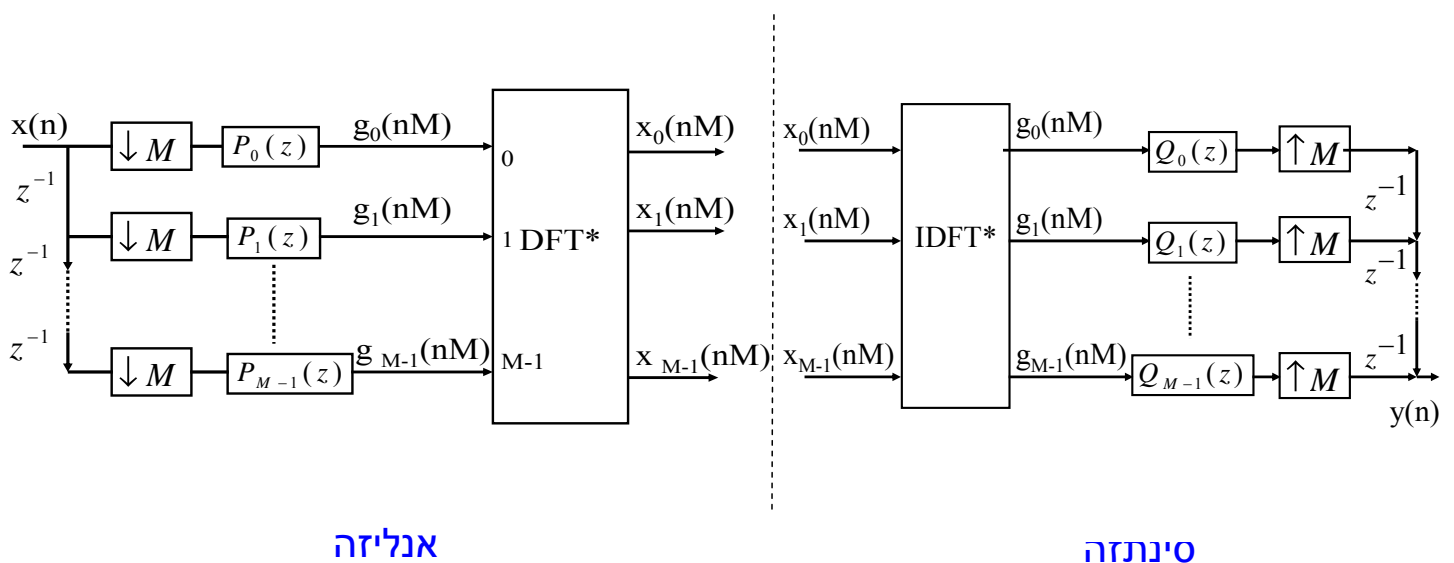
5 - 22

דיאגרמת בצוע אנליזה וסינתזה WOLA עם DFT



5 - 23

הסכמה הנ"ל שקולה לסכמה הבאה שקיבלנו עבור מערך מסנני DFT עם דצימציה ואינטרפולציה (לאחר התאמת הסימונים):



כאשר עבור $M=R$ תנאי Portnoff שקול ל: $P_\rho^H(z)Q_\rho^F(z) = 1, \quad \rho = 0, 1, \dots, M-1$

5 - 24

התמרת Gabor וקשר ל-DSTFT

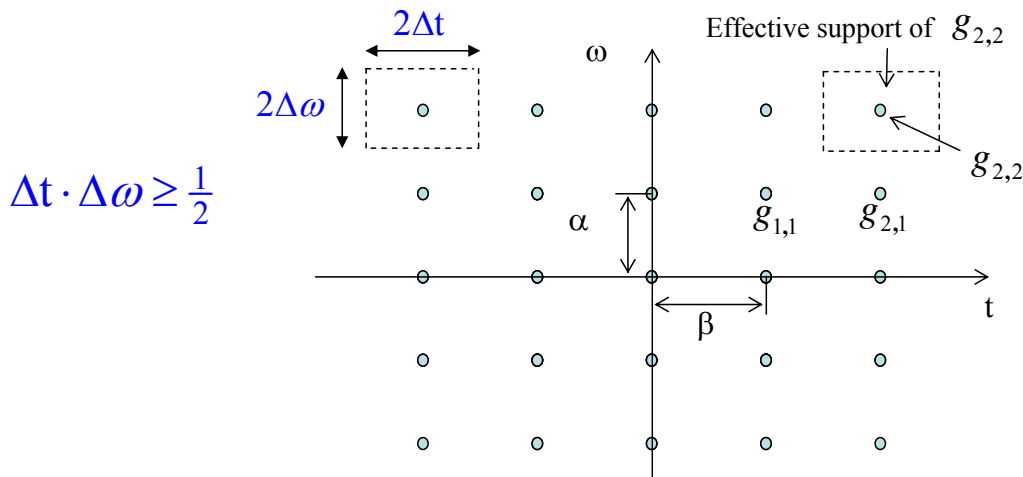
(Gabor Transform or Gabor Representation)

• התמרת (או הצגת) Gabor רציפה

תהיה $g_{m,n}(t)$ משפחת פונקציות רציפות המוגדרות באופן הבא:

פונקציות Gabor $g_{m,n}(t) \triangleq g(t - m\beta)e^{jn\alpha t}$, $(m,n) \in \mathbb{Z}^2$

נניח ש- $g(t)$ ממורכזת בראשית, הן בזמן והן בתדר, אזי הפונקציות $g_{m,n}(t)$ ממורכזות במישור זמן-תדר על נקודות סריג כמתואר באיור הבא:



בתנאים מתאימים ניתן להציג פונקציה רציפה בעזרת פונקציות גבור בצורה הבאה:

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} g_{m,n}(t)$$

כאשר המקדמים $\{c_{m,n}\}$ הם מקדמי הייצוג ונקראים **מקדמי Gabor**.
הערה: ניתן להראות שתנאי לקיום ההצגה הוא: $\alpha\beta \leq 2\pi$.

הצגת Gabor דיסקרטית

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{P-1} c_{m,r} g_{m,r}(n); \quad g_{m,r}(n) \triangleq g(n - m\beta)e^{jr\alpha n}$$

$\alpha = \frac{2\pi}{P}$, P שלם; β שלם

כמקודם, נניח ש- $g(n)$ ממורכזת בראשית, במישור זמן-תדר ו- $g_{m,r}(n)$ מתקבלת מ- $g(n)$ על ידי הזזות בזמן ובתדר. כאן, ציר התדר מוגבל לתחום $(-\pi, \pi]$.

נזכיר כעת את ה- DSTFT, עם דצימציה ביחס $R:1$ ו- M ערוצי תדר, כאשר האנליזה מבוצעת עם חלון $h(n)$ והסינתזה עם חלון $f(n)$:

$$\hat{X}_n \left(e^{j\frac{2\pi}{M}k} \right) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(n-rR) X_{rR} \left(e^{j\frac{2\pi}{M}k} \right)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} \hat{X}_n \left(e^{j\frac{2\pi}{M}k} \right) e^{j\frac{2\pi}{M}nk} \quad \text{והאות המשוחזר (FBS):}$$

$$= \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} f(n-rR) X_{rR} \left(e^{j\frac{2\pi}{M}k} \right) \cdot e^{j\frac{2\pi}{M}nk}$$

ואם תנאי Portnoff מתקיים: $y(n) = x(n)$

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{P-1} c_{m,r} g_{m,r}(n) \quad \text{ייצוג גבור:}$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{P-1} c_{m,r} g(n-m\beta) e^{jr\alpha n} ; \alpha = \frac{2\pi}{P}$$

$$\beta = R ; P = M \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{M} \quad \text{נקבע:}$$

$$g(n) = f(n)$$

ונשווה לביטוי ל- $x(n)$ בשקף הקודם (כשתנאי Portnoff מתקיים). נקבל, לאחר החלפת משתנים שם: $r \leftarrow k$ (תדר) ; $m \leftarrow r$ (זמן),

$$c_{m,r} = X_{mR} \left(e^{j\frac{2\pi}{M}r} \right)$$

מכיון ששחזור מושלם אפשרי רק אם $R \leq M$, הרי שנדרש:

$$\beta \leq P \rightarrow \beta \leq \frac{2\pi}{\alpha} \rightarrow \boxed{\alpha\beta \leq 2\pi}$$

כאשר $\alpha\beta$ מגדיר את שטח "תא הדגימה" במישור זמן-תדר.

עבור $R = M$ (דגימה קריטית): $\alpha\beta = 2\pi$.

חישוב מקדמי הייצוג

כשהמשפחה $\{g_{m,r}\}$ אינה אורתוגונלית, לא ניתן לחשב את מקדמי Gabor ע"י מכפלות פנימיות $\langle X, g_{m,r} \rangle$.

נשתמש לכן בדרך החישוב שראינו עבור $X_{mR} \left(e^{j\frac{2\pi}{M}r} \right)$:

5 - 29

$$X_{mR} \left(e^{j\frac{2\pi}{M}r} \right) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(\ell) e^{-j\frac{2\pi}{M}r\ell} h(mR - \ell) \quad \text{ולכן,}$$

$$c_{m,r} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(\ell) h(-(\ell - mR)) e^{-j\frac{2\pi}{M}r\ell} \quad ; \quad \frac{2\pi}{M} = \alpha$$

$$R = \beta$$

$$\gamma(n) \triangleq h(-n) \quad ; \quad \gamma_{m,r}(n) \triangleq \gamma(n - mR) e^{jr\alpha n} \quad \text{נגדיר:}$$

$$\boxed{c_{m,r} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} x(\ell) \gamma_{m,r}^*(\ell) = \langle X, \gamma_{m,r} \rangle} \quad \text{אזי,}$$

הפונקציה $\gamma(n)$ קרויה הפונקציה הבי-אורתוגונלית של $g(n)$.

ועפ"י תנאי Porfnoff – תנאי מספיק לשחזור מושלם (עם $\alpha = \frac{2\pi}{M}$; $\beta = R$):

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} g(n - m\beta) \gamma \left(n - m\beta - \frac{2\pi}{\alpha} p \right) = \frac{\delta(p)}{M} \quad \forall p ; \forall n$$

5 - 30

6. מבוא ל-Wavelets Introduction to Wavelets

- מוטיבציה
- התמרת Wavelet רציפה (CWT)
- דגימה דיאדית (Dyadic Sampling)
- אנליזה רבת רזולוציות (MRA)
- התמרת Wavelet דיסקרטית (DWT)
- מימוש ה-DWT ע"י מערכי מסננים
- הרחבות (במידת האפשר)

מקורות ספרות:

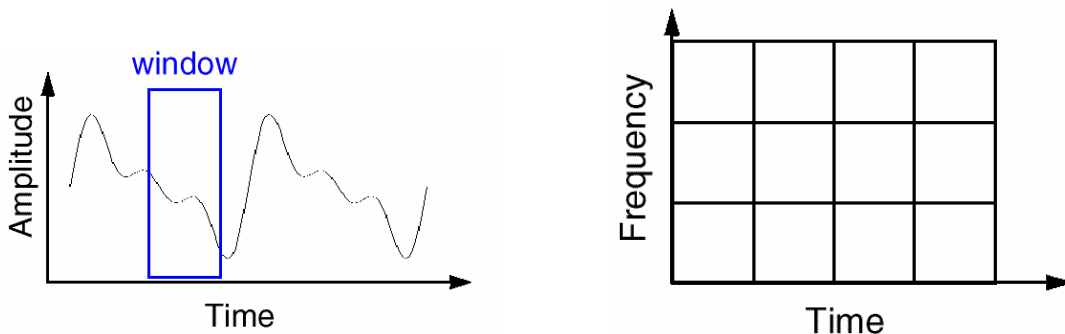
[5] C. S. Burrus, R. A. Gopinath, and H. Guo, *Introduction to Wavelets and Wavelet Transforms – A Primer*, Prentice Hall, 1998.

S. G. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation", *IEEE Trans., on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol.11, No. 7, July 1989, pp. 674-693.

6 - 1

מוטיבציה

לשם ניתוח אותות לא-סטציונריים (למעשה "קווי-סטציונריים") הצגנו אנליזת פוריה לזמן קצר (STFT, DSTFT, Gabor-Transform) שבוצעה על ידי החלקת חלון על פני האות וביצוע התמרת פורייה של האות ה"משתקף" בחלון:

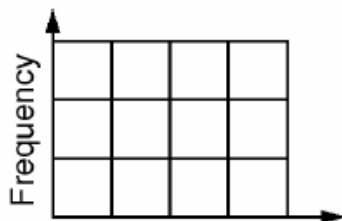


הבעיה באנליזה זו שרזולוציות הזמן והתדר קבועות בכל המישור "זמן-תדר", כשהן נקבעות על ידי פ' החלון, עפ"י עקרון אי-הודאות: $\Delta t \Delta f \geq \frac{1}{4\pi}$, או $\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$.

6 - 2

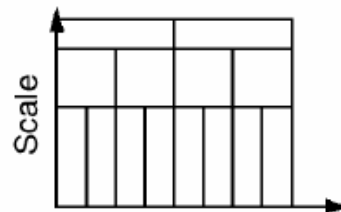
לפיכך, עבור אירוע מעבר קצר בזמן, שמשכו קטן מ- Δt קשה יהיה לקבוע את מיקומו המדויק בזמן במישור זמן-תדר. התמרת Wavelet – מאפשרת אנליזה עם פונקציות בסיס שמשכן האפקטיבי אינו קבוע ולכן ניתן להבחין במיקום אירועים מסוג כזה.

להלן מודגם ה"ריצוף" (Tiling) במישור זמן-תדר:



Time
STFT (Gabor)

$$\{\gamma(t - \tau)e^{j\omega t}\}$$



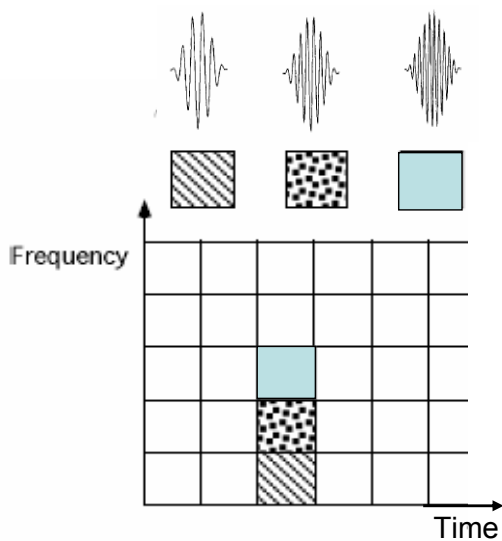
Scale
Time
Wavelet Analysis

$$\{\psi(\frac{t-\tau}{s})\} \quad \text{פ' בסיס:}$$

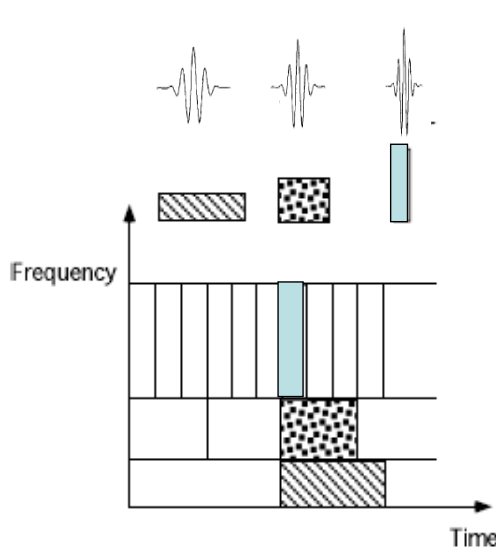


Low scale

High scale



STFT



Wavelet Transform

נדון במרחב הפונקציות הרציפות עם אנרגיה חסומה, $L^2(\mathbb{R})$, ומכפלה פנימית:

$$\langle f(t), \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \varphi^*(t) dt$$

$$\|f(t)\| = \sqrt{\langle f(t), f(t) \rangle} \quad \text{המשרה נורמה:}$$

$$f(t) \in L^2(\mathbb{R}) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = E < \infty \quad (\text{אנרגיה חסומה})$$

$$\varphi(t, \tau) = \gamma(t - \tau) e^{j\omega t} \quad \text{למשל, עבור STFT:}$$

$$\gamma(t) - \text{פ' חלון} \quad \tau - \text{פרמטר הזזה (בזמן)}$$

$$STFT_f(\omega, \tau) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \gamma^*(t - \tau) e^{-j\omega t} dt$$

התמרת Wavelet רציפה Continuous Wavelet Transform

$$f(t), \psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

$$CWT_f(a, b) \triangleq \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

$$a - \text{פרמטר Scaling } (a > 0), \quad b - \text{פרמטר הזזה (Shift)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (\text{bandpass function}) \quad \text{Mother Wavelet} - \psi(t)$$

$$\|\psi(t)\| = 1 \quad \psi_{a,b}(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right); \quad \|\psi_{a,b}(t)\| = 1$$

אינטרפרטציה של סינון:

$$CWT_f(a, b) = f(t) * \bar{\psi}_a(t) |_{t=b}$$

$$\bar{\psi}_a(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{a}} \psi^*\left(\frac{-t}{a}\right)$$

דוגמה

פ' wavelet הנוצרת מהנגזרת השניה של פ' גאוסית:

$$\psi(t) = \frac{2}{\pi^{1/4} \sqrt{3\sigma}} \left(\frac{t^2}{\sigma^2} - 1 \right) \exp\left(\frac{-t^2}{2\sigma^2} \right) \quad \text{Mexican hat wavelet}$$

$$\Psi(\omega) \triangleq \mathcal{F}(\psi(t)) = C_0 \sigma^{5/2} \omega^2 \exp\left(\frac{-\sigma^2 \omega^2}{2} \right); \quad C_0 - \text{קבוע}$$

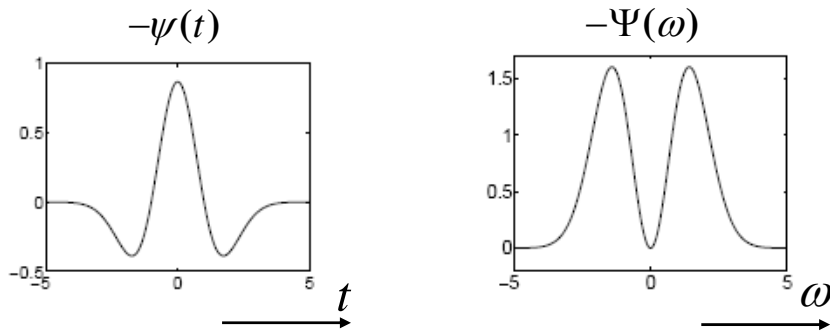
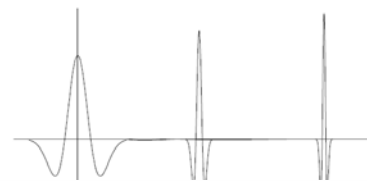
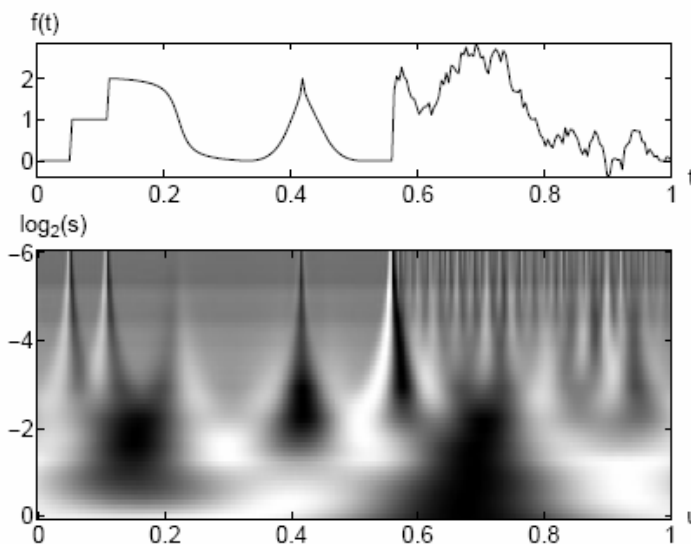


Figure 4.6: Mexican hat wavelet for $\sigma = 1$ and its Fourier Transform.

S. Mallat: *A Wavelet Tour*, Academic Press, 1998 האיר מהספר: 6 - 7



The Mexican hat and dilated shifts.
From N. Temme: *Introduction to Wavelets*

Figure 4.7: Real wavelet transform computed with a Mexican hat wavelet. The vertical axis represents $CWT_f(s, u)$. Black, grey and white points correspond respectively to positive, zero and negative wavelet coefficients

S. Mallat: *A Wavelet Tour* Academic Press 1998 האיר מהספר:

התמרת Wavelet הפכית

נתונה $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$ ממשית המקיימת $C_\psi < \infty$, כאשר:

$$C_\psi \triangleq \int_0^\infty \frac{|\psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega$$

אזי, לכל $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, מתקיים:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty CWT_f(a,b) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db \frac{da}{a^2}$$

וכן,

$$\int_{-\infty}^\infty |f(t)|^2 dt = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |CWT_f(a,b)|^2 db \frac{da}{a^2}$$

התנאי $C_\psi < \infty$ מכונה: Admissibility Condition.

6 - 9

לשם קיום התנאי נדרש: $\Psi(\omega=0) = \int \psi(t) dt = 0$ וכן ש- $\Psi(\omega)$ דועך ל-0, כאשר $|\omega| \rightarrow \infty$, מספיק מהר. אם $\Psi(0) = 0$ ו- $\Psi(\omega)$ הוא גזיר אזי התנאי הנ"ל מתקיים. ניתן להראות ש- $\Psi(\omega)$ הוא גזיר אם $\psi(t)$

מקיים:

$$\int_{-\infty}^\infty (1+|t|) |\psi(t)| dt < \infty$$

דגימה "דיאדית" - Dyadic Sampling

ההתמרה הרציפה, שבה הפרמטרים a, b רציפים, היא התמרה יתירה. כלומר, ניתן לדגום את הפרמטרים הללו ועדיין לקבל שחזור מלא של האות מהתמרתו. דגימה שמאפשרת שחזור היא דגימה "דיאדית":

$$a = a_0^{-j}, \quad b = k b_0 a_0^{-j}$$

כאשר: $a_0 = 2, \quad b_0 = 1 \rightarrow a = 2^{-j}, \quad b = k 2^{-j}; \quad j, k \in \mathbb{Z}$

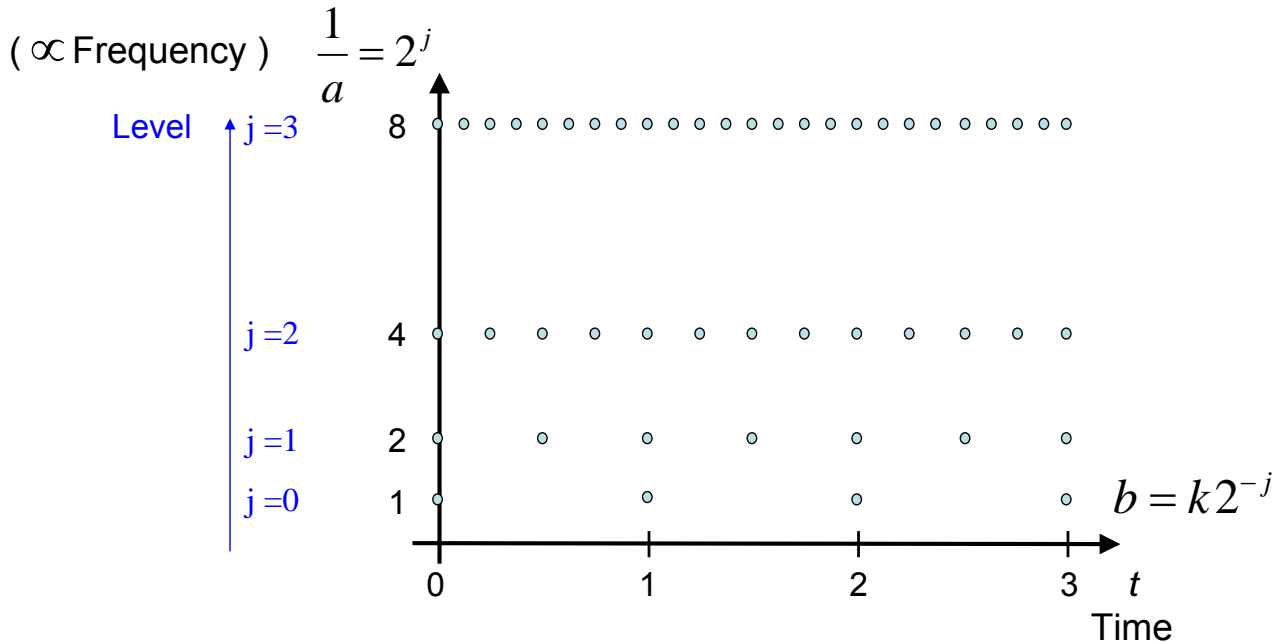
כלומר,

$$\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

6 - 10

$a = \text{Scale}$

סריג דגימה דיאדי



מגדירים:

$$\begin{aligned} \underline{d_{j,k}} &= CWD_f(2^{-j}, k2^{-j}) \triangleq 2^{j/2} \int f(t) \psi^*(2^j t - k) dt \\ &= \int f(t) \underline{\psi_{j,k}^*(t)} dt \end{aligned}$$

כאשר,

$$\underline{\psi_{j,k}(t)} \triangleq 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

אם $\{\psi_{j,k}(t)\}$ הן פונקציות אורתוגונליות לכל $j, k \in \mathbb{Z}$, אזי ההתמרה ההפכית:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

הערה: אם הפונקציות הללו אינן אורתוגונליות אזי יש להשתמש בפונקציות שהן בי-אורתוגונליות להן.

אנליזה רבת – רזולוציות Multiresolution Analysis (MRA)

אנליזה זו הוצעה במאמר:

S. G. Mallat, "A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation", IEEE Trans., on Pattern Analysis and Machine Intelligence, Vol.11, No. 7, July 1989, pp. 674-693.

פונקצית Scaling (Scaling Function)

מניחים שקיימת פונקציה $\varphi(t)$, כך שסט הפונקציות המתקבל מכל ההזזות שלה:

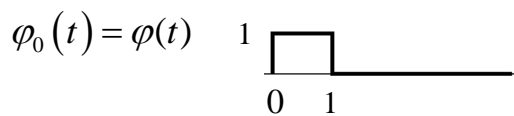
$$\varphi_k(t) \triangleq \varphi(t - k) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

מהווה בסיס אורתונורמלי של תת מרחב V_0 של $L^2(\mathbb{R})$:

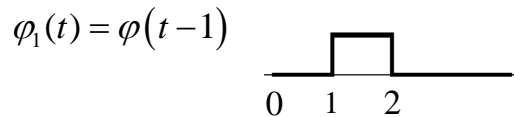
$$V_0 = \text{span}_k \{ \varphi_k(t) \} \subset L^2(\mathbb{R}) \quad ; \quad \langle \varphi_k(t), \varphi_\ell(t) \rangle = \delta_{k\ell}, \quad k, \ell \in \mathbb{Z}$$

6 - 13

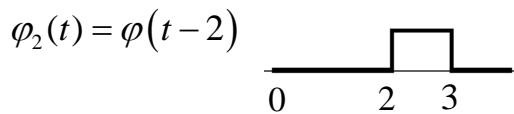
דוגמה



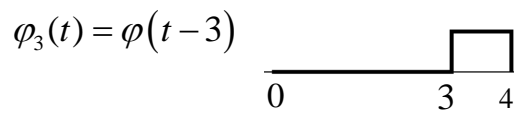
$$\varphi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{פ' Haar:}$$



עבור פונקציה זו, V_0 הוא מרחב כל האותות הקבועים למקוטעים שעבורם ניתן לרשום:



$$f(t) = \sum_k a_k \varphi_k(t)$$



כאשר,

$$a_k = \langle f(t), \varphi_k(t) \rangle, \quad k \in \mathbb{Z}$$

→
t

אם נשנה את סקלת הזמן של פ' ה-Scaling, על ידי הכפלה של משתנה הזמן בפקטור 2: $\varphi_k(2t) = \varphi(2t - k)$, כלומר הצרה של ציר הזמן, נקבל רזולוציות זמן טובה פי 2 ומרחב אותות הכולל פונקציות נוספות.

6 - 14

באופן כללי ניתן כך להגדיר סט של תת-מרחבים $\{V_j\}$ עם פ' בסיס אורתונורמליות:

$$\text{Dyadic Scaling Functions } \varphi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \varphi(2^j t - k) \quad j, k \in \mathbb{Z}$$

$$\|\varphi_{j,k}(t)\| = 1 \quad \text{כשהמקדם } 2^{j/2} \text{ נדרש כדי לקיים}$$

$$\langle \varphi_{j,k}(t), \varphi_{j,\ell}(t) \rangle = \delta_{k,\ell} \quad j, k, \ell \in \mathbb{Z} \quad \text{ומתקיים:}$$

תת-מרחב V_j כלשהו בסט נתון לכן על ידי:

$$V_j = \text{span}_k \{ \varphi_k(2^j t) \} = \text{span}_k \{ \varphi_{j,k}(t) \}$$

כלומר, עבור $f(t) \in V_j$

$$f(t) = \sum_k a_k \varphi_{j,k}(t)$$

$$a_k = \langle f(t), \varphi_{j,k}(t) \rangle$$

6 - 15

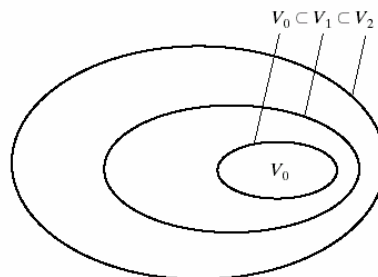
Multiresolution Analysis - MRA

עפ"י Mallat, הדרישה הבסיסית לאנליזה מרובת רזולוציות (MRA) היא שתתי המרחבים $\{V_j\}$ יהיו nested זה בזה:

$$\{0\} \dots \dots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \dots \dots \subset L^2(\mathbb{R})$$

$$V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \in \mathbb{Z} \quad \text{כלומר,}$$

FIGURE 7.10 The nested function spaces spanned by a scaling function.



מעבר מרמה אחת לבאה אחריה:

$$\text{Dyadic Multiresolution} \quad f(t) \in V_j \leftrightarrow f(2t) \in V_{j+1}$$

תכונה הידועה כ- [Two-scale Property](#).

מתכונת ה-nesting, אם $\varphi(t) \in V_0$, אזי גם $\varphi(t) \in V_1$. לכן, סט הפונקציות $\{2^{1/2}\varphi(2t-n)\}, n \in \mathbb{Z}$, שפורש את V_1 , מאפשר גם לייצג את $\varphi(t)$ על ידי:

$$\varphi(t) = \sum_n h_0(n) \sqrt{2} \varphi(2t-n)$$

Two-scale
Relationship
(or: Dilation equation)

או:

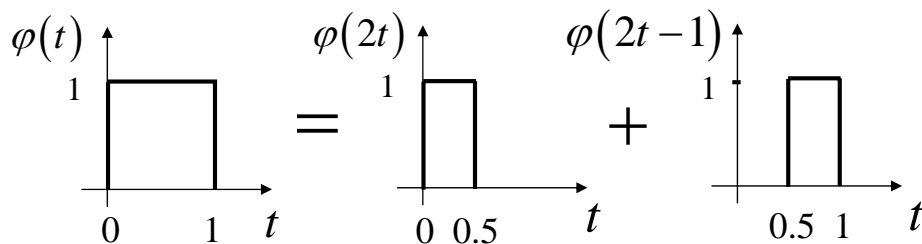
$$\varphi(t) \equiv \varphi_0(t) \equiv \varphi_{0,0}(t) = \sum_n h_0(n) \varphi_{1,n}(t)$$

כאשר $h_0(n), n \in \mathbb{Z}$ הם מקדמי הפירוק.

6 - 17

למשל, עבור [Haar scaling function](#), קל לראות שמתקיים:

$$\varphi(t) = \varphi(2t) + \varphi(2t-1)$$



ולכן:

$$h_0(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_0(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

6 - 18

התמרת פוריה של פ' Scaling

$$\Phi(\omega) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) e^{-j\omega t} dt ; \quad H_0(\omega) = \sum_n h_0(n) e^{-j\omega n}$$

[$\theta = \omega T$; $T = 1$]

מה- Two-Scale Relationship לעיל ניתן לרשום:

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} H_0\left(\frac{\omega}{2}\right) \Phi\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

זהו קשר רקורסיבי שממנו ניתן לקבל:

$$\Phi(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} H_0\left(\frac{\omega}{2^k}\right) \right\} \Phi(0)$$

לתשומת לב: $H_0(\omega) \equiv H_0(e^{j\omega})$ והיא מחזורית ב- ω במחזור 2π .

פונקציות Dyadic Wavelets

יהיה W_j תת המרחב האורתוגונולי המשלים ל- V_j ב- V_{j+1} :

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (\text{דה-קומפוזיציה})$$

כאשר \oplus מציין **Direct Sum**.

כלומר, עבור $f \in V_{j+1}$, ניתן לרשום:

$$f = f_1 + f_2$$

כאשר,

$$V_j \cap W_j = \{0\} , \quad f_1 \in V_j , \quad f_2 \in W_j$$

פונקצית ה- wavelet $\psi(t)$ מוגדרת כך שעבור כל $j \in \mathbb{Z}$,

הסט $\{\psi_{j,k}(t)\}$ הוא בסיס אורתונורמלי הפורש את תת המרחב W_j .

כאשר,

$$\psi_{j,k}(t) \triangleq 2^{j/2} \psi(2^j t - k) , \quad k \in \mathbb{Z}$$

כלומר,

$$W_j = \text{span}_k \{ \psi_{j,k}(t) \}$$

הפונקציה $\psi(t) \in W_0$ קרויה **Mother Wavelet** וקיים:

$$\langle \varphi_{j,k}(t), \psi_{j,\ell}(t) \rangle = 0, \quad j, k, \ell \in \mathbb{Z}$$

$$\langle \psi_{i,k}(t), \psi_{j,\ell}(t) \rangle = \delta_{ij} \delta_{k\ell}, \quad i, j, k, \ell \in \mathbb{Z}$$

כאשר,

$$\delta_{ij} \delta_{k\ell} \triangleq \begin{cases} 1, & i = j \ \& \ k = \ell \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

עתה, מתוך $V_{i+1} = V_i \oplus W_i$, אפשר לרשום גם $V_i = V_{i-1} \oplus W_{i-1}$ וכך הלאה, כך שמרחב האות $L^2(\mathbb{R})$ ניתן לרישום באופן הבא:

$$L^2(\mathbb{R}) = V_j \oplus W_j \oplus W_{j+1} \oplus \dots, \quad j \in \mathbb{Z}$$

כאשר $j = j_0$ הוא אינדקס שרירותי הנבחר עפ"י הרזולוציה הגסה ביותר שמעוניינים בה. למשל, עבור $j_0 = 0$:

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \dots$$

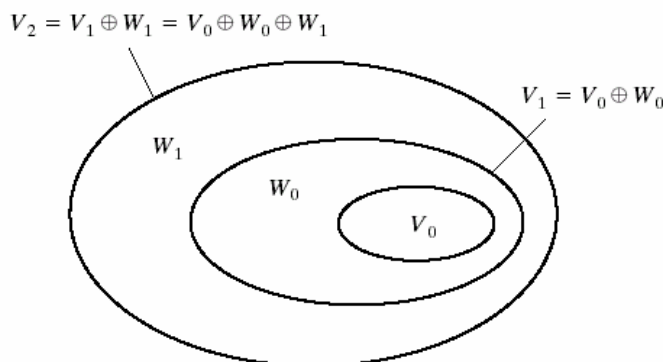


FIGURE 7.11 The relationship between scaling and wavelet function spaces.

האיור נלקח מהספר:

R. C. Gonzales and R. E. Woods, *Digital Image processing*, 2nd ed, Prentice Hall, 2001.

מכיוון ש- $\psi(t) \in W_0$ ו- $V_1 = V_0 \oplus W_0$, הרי ש- $\psi(t) \in V_1$,
 לכן, ניתן לתאר את $\psi(t)$ על ידי פונקציות ה- scaling $\varphi_{1,n}(t) = \sqrt{2}\varphi(2t-n)$
 שפורשים את V_1 , כלומר:

$$\psi(t) = \sum_n h_1(n) \sqrt{2} \varphi(2t-n)$$

או:

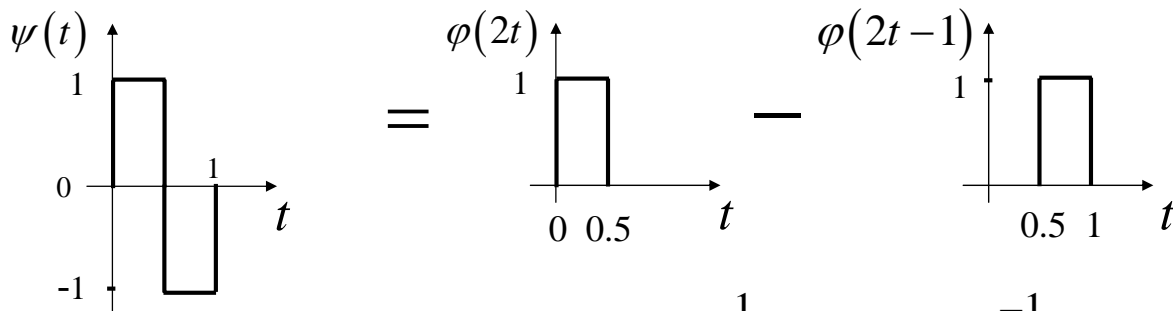
$$\psi(t) \equiv \psi_0(t) \equiv \psi_{0,0}(t) = \sum_n h_1(n) \varphi_{1,n}(t)$$

כאשר $h_1(n)$ הם מקדמי הפירוק.

הערה: פ' ה- scaling $\varphi(t)$ קרויה אז גם ה- **Father wavelet**

למשל, עבור **Haar mother wavelet**, מתקיים:

$$\psi(t) = \varphi(2t) - \varphi(2t-1)$$



$$\text{ולכן: } h_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad h_1(1) = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

קל לראות שמתקיים, כנדרש:

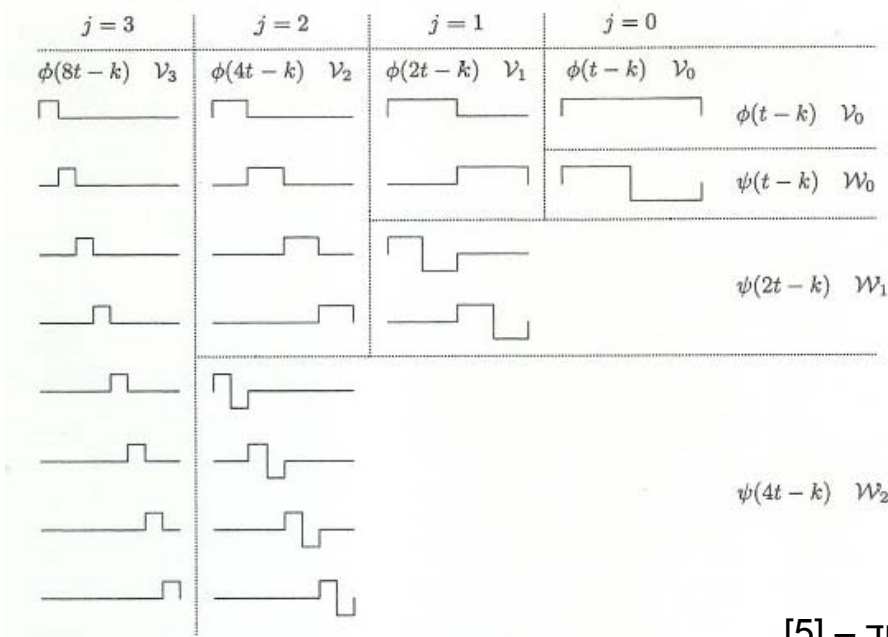
$$\|\psi(t)\| = 1$$

$$\langle \varphi_{j,k}(t), \psi_{j,\ell}(t) \rangle = 0, \quad j, k, \ell \in \mathbb{Z}$$

$$\int \psi(t) dt = 0$$

$$\langle \psi_{i,k}(t), \psi_{j,\ell}(t) \rangle = \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad i, j, k, \ell \in \mathbb{Z}$$

הדגמת דה-קומפוזיציה עבור פ' Haar



[5] הדוגמה מספר הלימוד - (Burrus et. al.)

Figure 2.16. Haar Scaling Functions and Wavelets Decomposition of V_3

תכונות כלליות של מקדמי הפירוק

1. בהנחה ש: $\int \varphi_{j,k}(t) dt \neq 0, j, k \in \mathbb{Z}$
 ומהדרישה $\int \psi(t) dt = 0$

מקבלים: $\sum_n h_1(n) = 0$

2. מה - Two Scale Relationship :

$$\int \varphi(t) dt = \sum_n h_0(n) \sqrt{2} \int \varphi(2t-n) dt = \sum_n h_0(n) \frac{1}{\sqrt{2}} \int \varphi(y-n) dy$$

ומכיוון ש- $\int \varphi(t) dt = \int \varphi(t-n) dt$ (אין תלות ב- n)

מקבלים: $\sum_n h_0(n) = \sqrt{2}$

התמרת wavelet דיסקרטית Discrete Wavelet Transform - DWT

נניח שהרזולוציה הגסה ביותר ב-MRA היא עבור $j = j_0$, אזי:

$$L^2(\mathbb{R}) = V_{j_0} \oplus W_{j_0} \oplus W_{j_0+1} \oplus \dots$$

ולכן, עבור אות $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$, ניתן לרשום

$$f(t) = \sum_k \langle f(t), \varphi_{j_0,k}(t) \rangle \varphi_{j_0,k}(t) + \sum_k \sum_{j=j_0}^{\infty} \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle \psi_{j,k}(t)$$

נסמן:

$$c_{j_0,k} \triangleq \langle f(t), \varphi_{j_0,k} \rangle ; \quad \varphi_{j_0,k}(t) \triangleq 2^{j_0/2} \varphi(2^{j_0}t - k)$$

$$d_{j,k} \triangleq \langle f(t), \psi_{j,k} \rangle ; \quad \psi_{j,k}(t) \triangleq 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

ולכן:

$$f(t) = \underbrace{\sum_k c_{j_0,k} \varphi_{j_0,k}(t)}_{\text{"Approximation"}} + \underbrace{\sum_k \sum_{j=j_0}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)}_{\text{"Detail"}}$$

לעיתים מעדיפים הסימון $c_j(k)$, $d_j(k)$ למקדמים $c_{j,k}$, $d_{j,k}$, בהתאמה.

במקרים רבים נוח לבחור $j_0 = 0$ ומסמנים: $c_{0,k} \equiv c_0(k) \equiv c(k)$

ומקבלים:

$$f(t) = \sum_k c(k) \varphi(t - k) + \sum_k \sum_{j=0}^{\infty} d_j(k) 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$$

דוגמה לביתוח אות דופלר

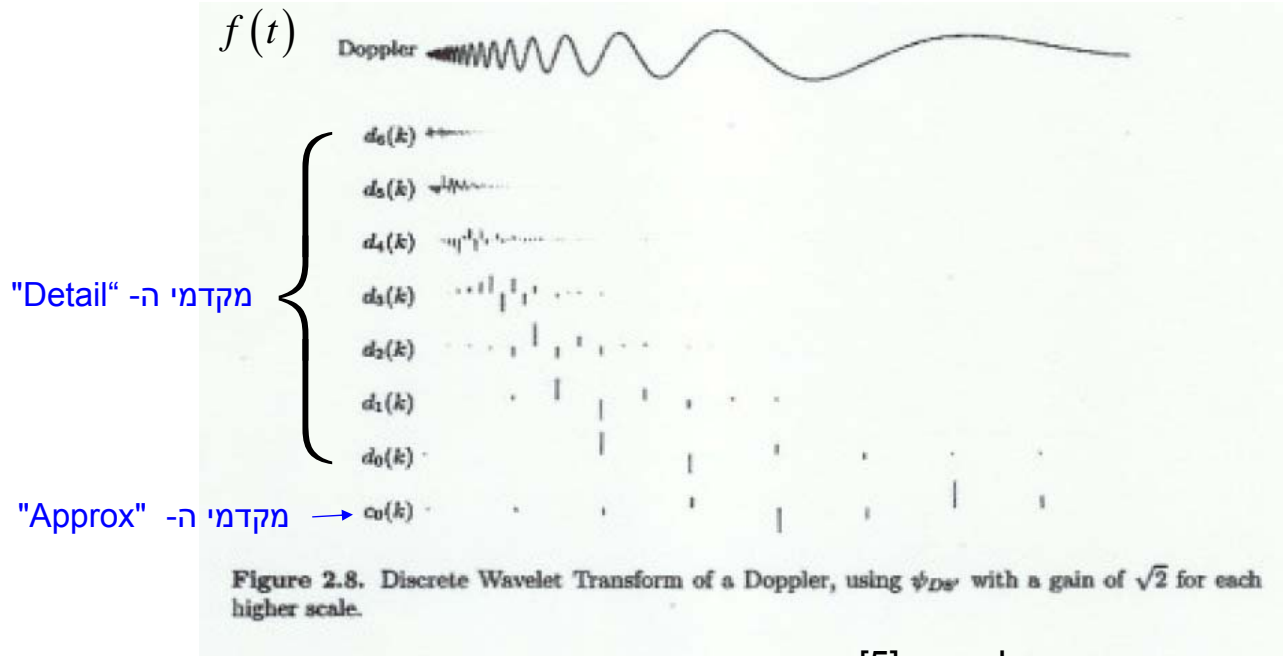


Figure 2.8. Discrete Wavelet Transform of a Doppler, using ϕ_{D8} with a gain of $\sqrt{2}$ for each higher scale.

הדוגמה מספר הלימוד - [5]
(Burrus et. al.)

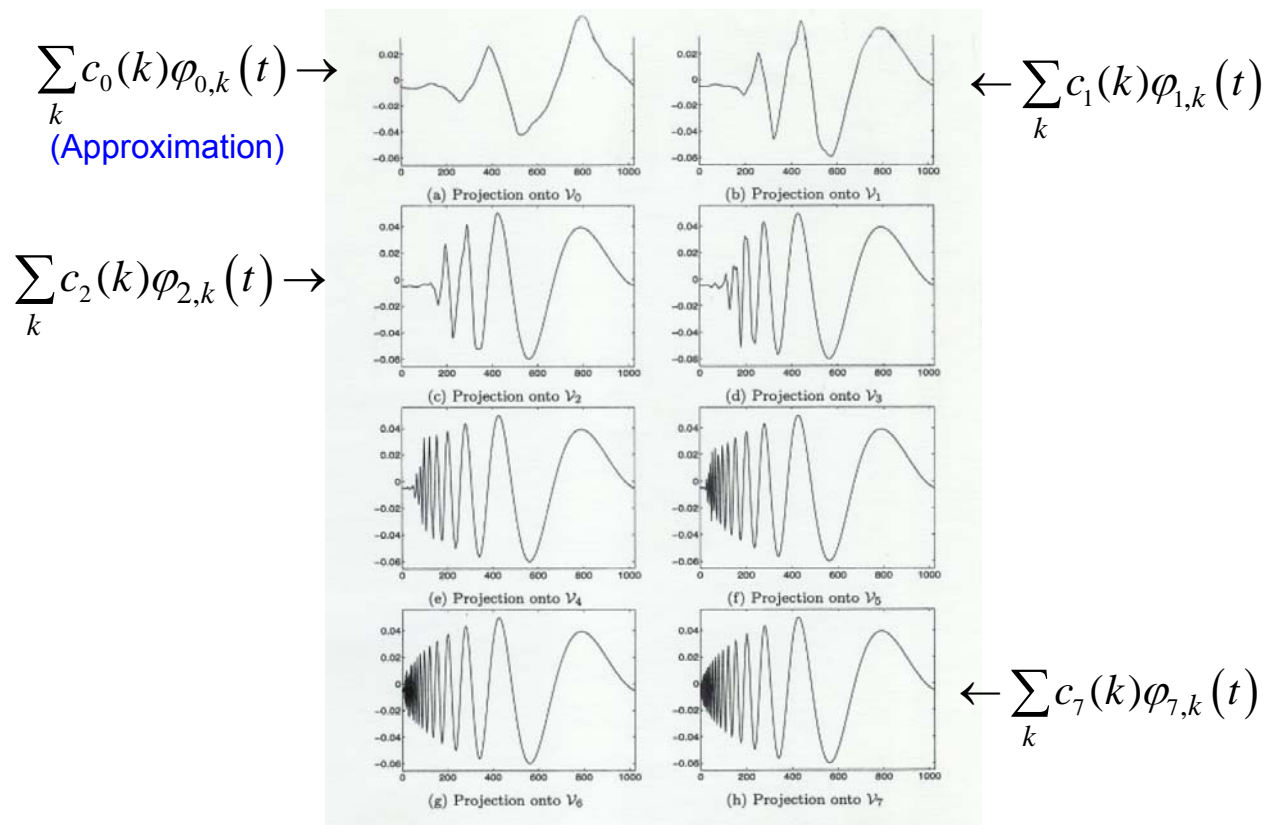


Figure 2.9. Projection of the Doppler Signal onto \mathcal{V} Spaces using ϕ_{D8} .

(From Burrus et. al.)

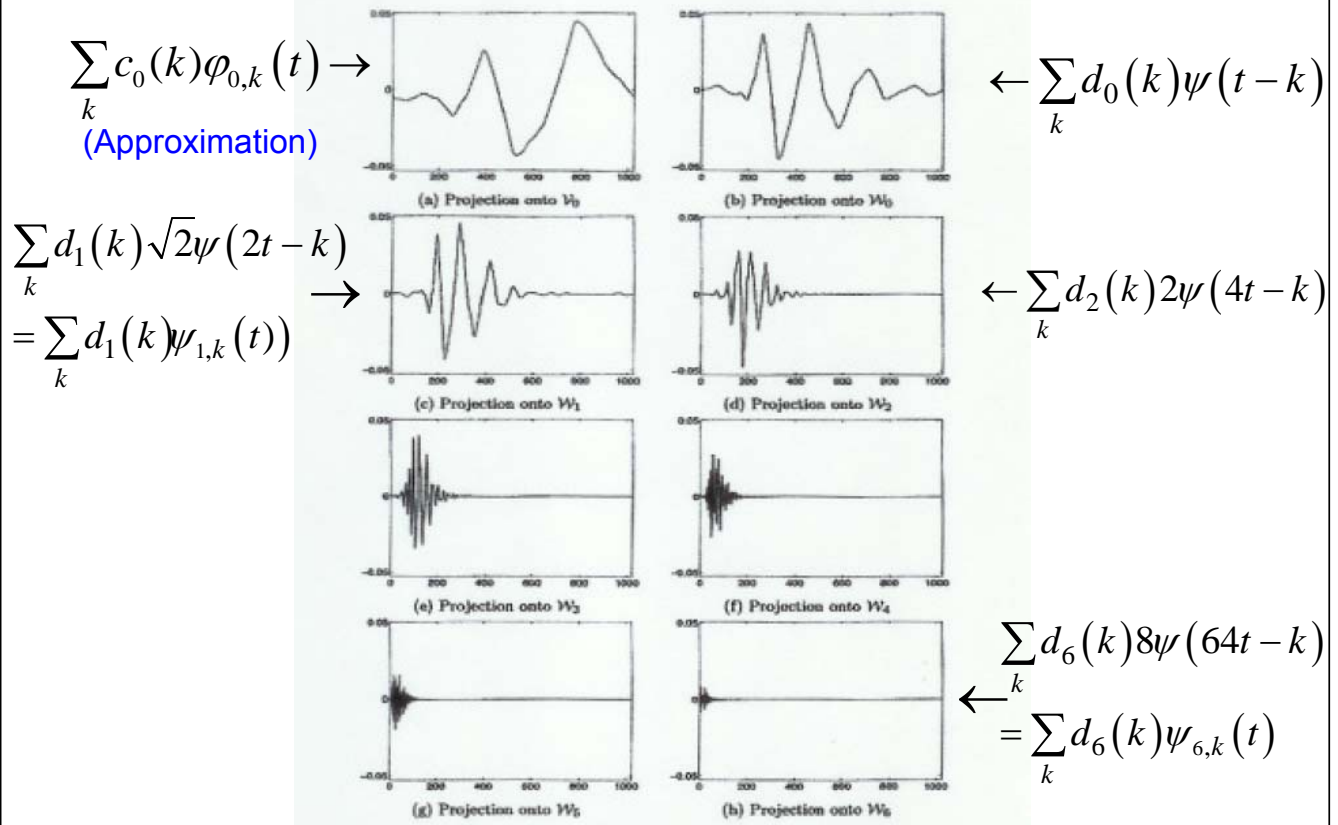


Figure 2.10. Projection of the Doppler Signal onto W Spaces using ψ_{DW}
(From Burrus et. al.)

משפט Parseval

עבור $\{\psi_{j,k}(t)\}, \{\varphi_{j,k}(t)\}$ המהווים בסיסים אורתונורמליים כמוגדר לעיל, כלומר:

$$\langle \varphi_{j,k}(t), \varphi_{j,l}(t) \rangle = \delta_{k,l}, \quad j, k, l \in \mathbb{Z}$$

$$\langle \psi_{i,k}(t), \psi_{j,l}(t) \rangle = \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad i, j, k, l \in \mathbb{Z}$$

$$\langle \varphi_{j,k}(t), \psi_{j,l}(t) \rangle = 0, \quad j, k, l \in \mathbb{Z}$$

מתקיים משפט Parseval:

$$\int |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c(k)|^2 + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |d_j(k)|^2 \quad (j_0 = 0)$$

מימוש ההתמרה ע"י מערכי מסננים

נניח שהאות $f(t)$ נמצא בתת-מרחב V_{j+1} והמקדמים $c_{j+1}(k)$ ידועים. כלומר,

$$f(t) \in V_{j+1} \Rightarrow f(t) = \sum_k c_{j+1}(k) \varphi_{j+1,k}(t)$$

נבטא כעת את המקדמים $c_j(k)$, $d_j(k)$ בתלות במקדמים הידועים $c_{j+1}(k)$: מכיוון ש- $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$, ניתן לבטא את $f(t)$ ע"י סכום ההטלות שלו על תת-מרחבים אלה. כלומר,

$$f(t) = \sum_k c_j(k) \varphi_{j,k}(t) + \sum_k d_j(k) \psi_{j,k}(t); \quad f(t) \in V_{j+1}$$

נשתמש כעת ב- Two-Scale Relationship:

$$\varphi(t) = \sum_n h_0(n) \sqrt{2} \varphi(2t - n)$$

ולכן,

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{(j+1)/2} \sum_n h_0(n) \varphi(2^{j+1}t - 2k - n)$$

החלפת n ב- $m - 2k$ נותנת:

$$\varphi_{j,k}(t) = \sum_m h_0(m - 2k) \varphi_{j+1,m}(t)$$

ומכאן,

$$c_j(k) = \langle f(t), \varphi_{j,k}(t) \rangle = \sum_m h_0(m - 2k) \langle f(t), \varphi_{j+1,m}(t) \rangle$$

ולכן,

$$c_j(k) = \sum_m h_0(m - 2k) c_{j+1}(m)$$

באופן דומה, בעזרת:

$$\psi(t) = \sum_n h_1(n) \sqrt{2} \varphi(2t - n)$$

מתקבל:

$$d_j(k) = \sum_m h_1(m - 2k) c_{j+1}(m)$$

את הקשרים הללו ניתן לתאר ע"י קונבולוציה ופעולת דילול באופן הבא:

$$c_j(k) = h_0(-n) * c_{j+1}(n) \Big|_{n=2k}$$

$$d_j(k) = h_1(-n) * c_{j+1}(n) \Big|_{n=2k}$$

ולכן, כאשר המקדמים $c_{j+1}(k)$ (רמה $j + 1$) ידועים, ניתן לחשב את המקדמים של הרמה j ע"י מערך מסננים דו-ערוצי:

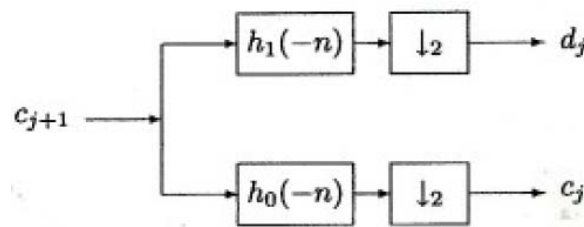


Figure 3.2. Two-Band Analysis Bank (From Burrus et. al.)

אפשר להמשיך באופן זה ולחשב את d_{j-1}, c_{j-1} מ- c_j , כפי שרואים באיור הבא, וכך הלאה – במבנה עץ.

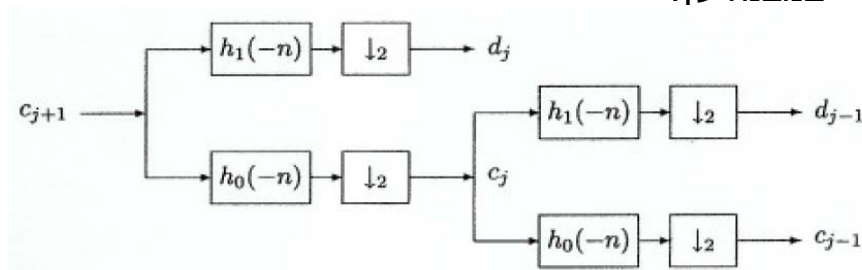


Figure 3.3. Two-Stage Two-Band Analysis Tree

(From Burrus et. al.)

בדרך כלל הרמה הגבוהה ביותר (התדר הגבוה ביותר) נקבעת להיות $j = J$ סופי כלשהו והאנליזה מתבצעת מ- $j = J$ ועד לרמה הנמוכה יותר- $j = j_0$, עפ"י הרזולוציה הגסה ביותר שמעוניינים בה (תת מרחב V_{j_0}).

כלומר, עבור $f(t) \in V_J$ הייצוג הוא לפי:

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_k c_J(k) \varphi_{J,k}(t) \\ &= \sum_k c_{J-1}(k) \varphi_{J-1,k}(t) + \sum_k d_{J-1}(k) \psi_{J-1,k}(t) \\ &= \sum_k c_{J-2}(k) \varphi_{J-2,k}(t) + \sum_k \sum_{j=J-2}^{J-1} d_j(k) \psi_{j,k}(t) \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

ולבסוף:

$$f(t) = \sum_k c_{j_0}(k) \varphi_{j_0,k}(t) + \sum_k \sum_{j=j_0}^{J-1} d_j(k) \psi_{j,k}(t); \quad f(t) \in V_J$$

למשל, עבור $J = 3, j_0 = 0$:

$$f(t) = \sum_k c_0(k) \varphi_{0,k}(t) + \sum_k \sum_{j=0}^2 d_j(k) \psi_{j,k}(t); \quad f(t) \in V_3$$

ומתקבלת הסכמה הבאה:

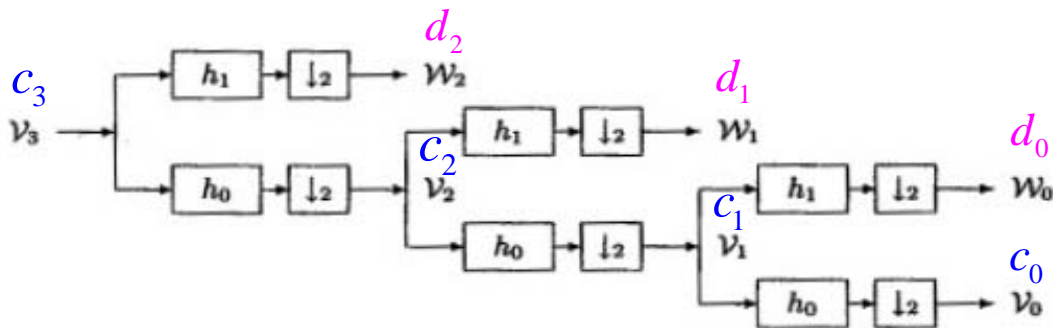


Figure 3.4. Three-Stage Two-Band Analysis Tree (From Burrus et. al.)

נראה בהמשך שהמסנן שהמקדמים שלו הם $h_0(n)$ הוא מסנן Lowpass והמסנן עם המקדמים $h_1(n)$ הוא מסנן Highpass.

לפיכך, מקבלים במבנה העץ שהוצג אנליזה מסוג Octav-band, כמודגם באיור הבא:

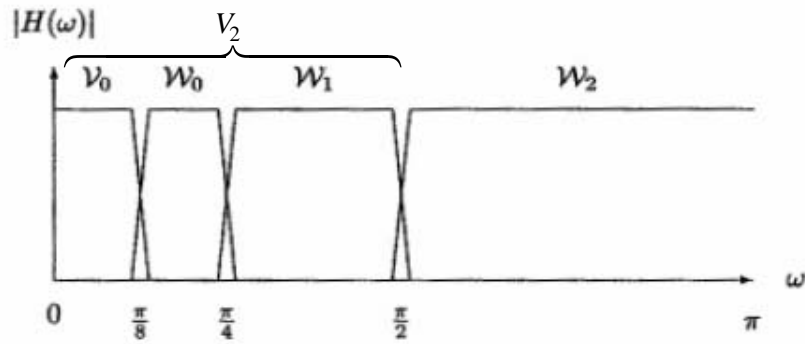


Figure 3.5. Frequency Bands for the Analysis Tree (From Burrus et. al.)

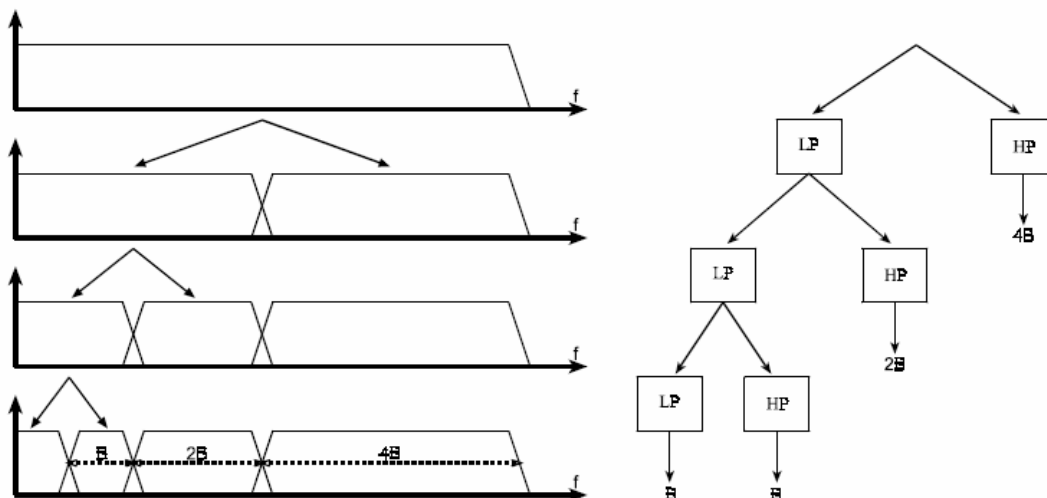
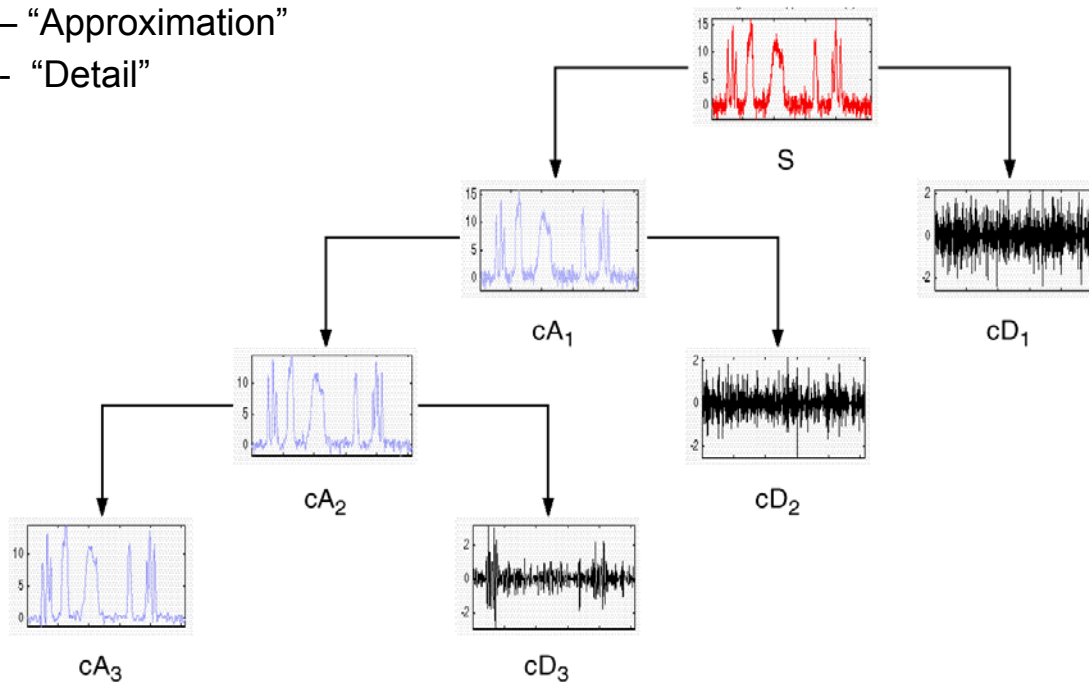


Figure 4
Splitting the signal spectrum with an iterated filter bank.

Wavelet Decomposition

A – “Approximation”

D - “Detail”



41

מערכי הסינתזה

קבלנו קודם את ה- Two Scale Relationship ע"י כך שניצלנו את התכונה $V_0 \subset V_1$, כך שאם $\varphi(t) \in V_0 \leftarrow \varphi(2t) \in V_1$, הרי שקיים גם $\varphi(t) \in V_1$ וניתן לתאר את $\varphi(t)$ בתלות פונקציות הבסיס ב- V_1 :

$$\varphi(t) = \sum_n h_0(n) \sqrt{2} \varphi(2t - n)$$

נמצא כעת תאור של $\varphi(2t) \in V_1$ ע"י פונקציות הבסיס הפורשות את V_0 ואת W_0 , שכן: $V_1 = V_0 \oplus W_0$. כלומר, עבור $\varphi(t) \in V_0$, $\varphi(2t) \in V_1$, $\psi(t) \in W_0$, ניתן לרשום:

$$\varphi_{1,0}(t) = \sqrt{2} \varphi(2t) = \sum_n g_0(n) \varphi(t - n) + \sum_n g_1(n) \psi(t - n)$$

כאשר $g_1(n)$, $g_0(n)$ הם מקדמי הפירוק בתתי-המרחבים W_0, V_0 , בהתאמה.

שימוש בתוצאה זו לתיאור $\varphi_{j+1,k}(t) \in V_{j+1}$ ע"י $\varphi_{j,k}(t) \in V_j$ ו- $\psi_{j,k}(t) \in W_j$ (לאחר מניפולציות אלגבריות):
 $(V_{j+1} = V_j \oplus W_j)$ נותן

$$\varphi_{j+1,k}(t) = \sum_m g_0(k-2m)\varphi_{j,m}(t) + \sum_m g_1(k-2m)\psi_{j,m}(t)$$

חישוב $c_{j+1}(k)$ ע"י ביצוע המכפלה הפנימית $\langle f(t), \varphi_{j+1,k}(t) \rangle$ (בהנחה $f(t) \in V_{j+1}$) נותן את הקשר:

$$c_{j+1}(k) = \sum_m c_j(m)g_0(k-2m) + \sum_m d_j(m)g_1(k-2m)$$

הקשר הנ"ל נותן את מערך הסינתזה הדו-ערוצי הבא לחישוב $c_{j+1}(k)$ מהמקדמים $c_j(k), d_j(k)$:

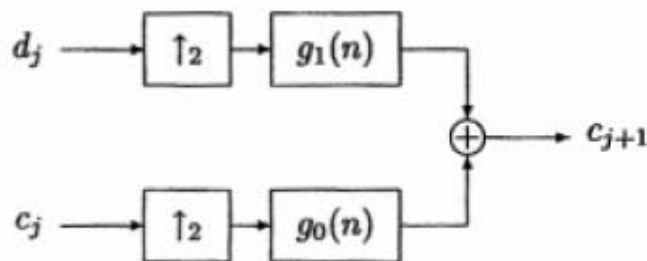


Figure 3.6. Two-Band Synthesis Bank (From Burrus et. al.)

חישוב המקדמים d_j, c_j מתאפשר באופן דומה מהמקדמים ברמה הקודמת d_{j-1}, c_{j-1} (ראה האיור הבא) וכך הלאה.

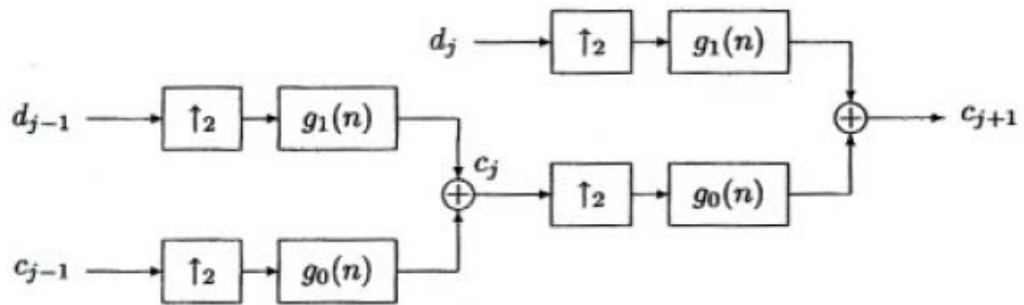


Figure 3.7. Two-Stage Two-Band Synthesis Tree (From Burrus et. al.)

כדי להתאים את מערך הסינתזה למערך האנליזה שהצגנו קודם, יש להתייחס ל- C_{j+1} כסט המקדמים המתאים לרמה הגבוהה ביותר $J -$ ולהשתמש במספר דרגות כמו במערך האנליזה.